

黑龙江科学技术出版社

怎样学几何解数学题



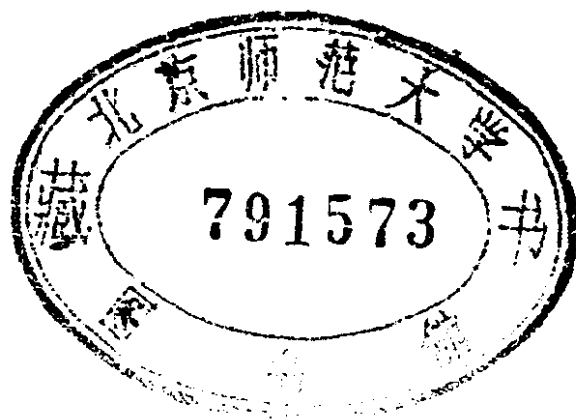
$\cos^2 x - 2\sin x$

怎样学会解数学题

〔苏〕 И·М·弗里德曼 等著

陈淑敏 尹世超 译

JY1126/02



黑龙江科学技术出版社

一九八一年·哈尔滨

内 容 提 要

本书阐述了解答中学数学题的实质，给出解数学题的方法。全书分两篇，第一篇提供关于习题及其解答的一般知识，探讨分析习题和寻找题解的一般方法；第二篇探讨解答某些常见类型习题的方法。书中在例题之外安排了适当的练习，并附有必要的答案和提示。

本书不仅有助于中学生和自学数学的青年读者学会解数学题，而且对中学数学教师，高等师范院校数学系的学生，以及从事数学教材教法研究的同志，也有一定的参考价值。

封面设计：方大伟

怎样学会解数学题

[苏] J. M. 弗里德曼 等著

陈淑敏 尹世超 译

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区分部街28号)

黑龙江新华印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092毫米 1/32·印张 7 10/16·字数 150,000

1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷

印数 1—152,000

书号：13217·010

定价：0.78元

前 言

解题在数学教学中具有重要的地位，所以解题训练很受重视。可是，直到现在，也许这种训练的唯一方法就是教给解答一定类型的习题的方法，并按照所掌握的方法做大量的，有时是特别费力的练习。因此，为学生提供的所有的解题参考书，都是以习题集的形式编写的（带有答案和对习题的某些提示）。

近年来，出现了一系列的参考书，就解题和寻求这些习题的解法阐述一些一般的提示和建议（启发法）。但是，这些参考书对于解答数学习题的问题阐述得不够充分，缺乏必要的系统性，没有考虑到学生所遇到的那些实际困难。

解题训练的心理学研究表明，学生在解题时不具备一般能力的基本原因，在于没有经常亲自动手进行分析，没有从中归纳出一般的运算方法及其理论根据。因此，有必要为学生写出这样一些解题参考书。这些书，最好能有助于排除妨碍学生在解答数学题时形成能力的因素。

本书也许是创作这种参考书的第一次尝试。它是否合适，请读者鉴定。

作 者

致 读 者

本书写给中学学生，技术学校和职业技术学校的学生，以及所有想学会解答数学习题的人们。

解题的本领是数学水平和掌握教材深度的主要标志之一。因此，任何数学考试，任何知识的检验，其主要的，也许是最困难的部分是解题。而就在这里暴露出，许多人解题时不能显示出足够的力量。在各种考试中，无论是中学里的考试，还是高等学校和技术学校的招生考试，常常遇到这样的情况，即学生在理论方面表现得似乎有足够的知识，知道所有需要的定义和定理，但在解答非常简单的习题时却糊涂起来。

在中学学习期间，学生要解答大量的，有几万道之多的习题。结果有些学生掌握了解题的一般本领，而许多学生一遇到形式不熟，或少见的习题，就茫无所措，不知如何去解答。

这种状况的原因何在呢？

原因当然很多。其中一个原因是，一部分学生留心解题过程，努力弄懂解题的方式和方法，研究习题。而另一部分学生，很可惜，不考虑这些，只是极力设法如何能快点解出给定的习题。这些学生没有在应有的程度上分析所解的习题，不能从中分析出解题的一般方式和方法，解题常常只是为了得个答案。

大多数学生对于解题的实质，对于习题本身概念都非常模糊，而且有时是错误的。如果学生提不出习题是由什么组成的，他们怎么能解出复杂的习题呢？如果他们不知道证明的意义在哪里，又怎么能解出证明题呢？许多学生不明白按结构解题的意义在哪里，为什么和什么时候需要对答案进行检验，等等。

显而易见，以这样的概念，不可能产生自觉和持久的解题能力。确实，观察表明，许多学生只是仿照他们在课堂里见过的例题来解答习题。所以，一遇到类型不熟的习题时，学生就嚷嚷说：“这样的题我们没解过呀”，“这我们没学过呀”。好象非得把所有的题都学完，并预先把所有类型的题都逐个地解过不可。

那么，可以学会解答任何一道习题吗？

当然，学会解答任何一道习题是不可能的。因为我们学习解题不管学得怎么好，总会遇到不会解的题；数学家们要花费自己毕生的精力，去寻求某些问题的解答，有些著名的问题解了许多年也还未能解出来。但是，如果就中学的习题，或者各种考试所提出的问题而言，那么每一个中学生还是都能学会解答的。当然，这里也可能遇到不能马上解决的问题。为了把题解出来，需要坐下来非常用心地做。但原则上，这样习题中的任何一道都能理解，都能够把它解出来。

为了学会解题，应当多花费劳动。但这种劳动不在于仅仅解答大量的习题。如果要简略地说明为此需要做些什么，那么，可以这样说：应当学会这样一种对待习题的态度，即：把习题看作是精密研究的对象，而把解答习题看作是设计和

发明的目标。

本书的宗旨，是帮助读者学会解答中学与升大学和技术学校的入学考试所提出的数学习题。如果读者确实希望学会解题，那么，就请你拿出耐力和顽强精神吧。这本书不能只是读，而需要详细研究。也就是说，需要象人们所说的那样，边读边用笔和纸来进行运算。应当仔细地深入思考书中所写的一切，思索出所读过内容的要点。应当有耐性地、从容不迫地做完书中所指定的全部练习题。最要紧的是，别着急，书要慢慢地读，深思熟虑地读，按照需要可以翻回到已经读过的地方。应该明白，能够真正地学会一点东西，特别是学会象解答数学题这样复杂的本领，只能是独立的和顽强的劳动的结果。

本书由互相联系的两篇组成。在第一篇里，提供关于习题及其解答的一般知识，探讨分析习题和寻找题解的一般方法。在第二篇里，探讨解答某些最常见类型的习题的方法。书中的习题照例取自中学教科书和某些试卷。本书有给学生独立做的练习题。练习题的答案和提示直接放在该题的后面。但是，我们建议不要急于看答案和提示。要设法独立地检查自己的解答，认真斟酌之后再对照书中所给的答案。

如果读者的耐心和顽强精神足以把这本书详细研究到最后，就会感觉到具有了充分的信心，再遇到不熟悉的习题时就不会茫无所措了。我们想，那时读者就会满怀希望和兴味地解答你们所遇到的习题了。

祝你们成功！

作者

目 录

前言	1
致读者	1

第一篇 习题及其解答

第一章 习题的组成部分	3
1.1 解题从哪儿开始?	3
1.2 习题的条件和要求	3
1.3 分析习题的方向	8
1.4 习题的条件是怎样给出的?	13
1.5 习题的图表表示法	17
1.6 习题的图表表示法所用的图式	22
第二章 解答数学习题的实质和结构	32
2.1 解答数学习题是什么意思?	32
2.2 解题过程的结构	37
2.3 典型习题及其解答	53
2.4 非典型习题及其解答	65
第三章 寻找解答数学习题的方案	72
3.1 识别习题的类型	73
3.2 用归结为已解过的习题的方法 寻找解题方案	79
3.3 怎样在石堆中抓住老鼠?	90
3.4 解题过程的模拟	103

第二篇 解题方法

第四章	变换表达式的习题	115
4.1	表达式的类型及其变换的实质	115
4.2	把表达式变换成典型形式的习题	128
4.3	简化表达式的习题	133
4.4	因式分解	143
4.5	表达式的微分法	148
第五章	方程和不等式及方程组和不等式组	154
5.1	方程和不等式及其解答的实质	154
5.2	有理方程	161
5.3	有理不等式	164
5.4	无理方程和无理不等式	171
5.5	指数和对数方程, 指数和对数不等式	177
5.6	三角方程和三角不等式	181
5.7	方程组	192
5.8	二元不等式和二元不等式组	201
第六章	证明题	212
6.1	证明的实质和方法	212
6.2	恒等式的证明	218
6.3	不等式的证明	224
6.4	完全数学归纳法	228
	符号索引	234

第一篇 习题及其解答

第一章 习题的组成部分

1.1 解题从哪儿开始？

如果要你解题，你从哪儿开始呢？

或许有人以为这个问题没有什么特别的意义。因为问题很清楚，想解题，就得从解题的某种尝试开始。应当指出，确实有许多学生这样做：一接到题，立刻就开始做解题的某种尝试。

苏联著名心理学家加利佩林曾把这些人的思想行为准确地称为“布朗运动”，也就是混乱的思想行为。这些人急于做某种解题的尝试，就象人们说的那样，先做做试试，当尝试已经被证实是错误的时候，他们马上就做第二种尝试——又错了，然后再来第三种，就这样，一直到或者放弃所有的解题尝试，或者往往是偶然地找到了正确的解法。

最要紧的是，这样的解答没有深入全面地分析习题。解题总是应当从分析习题开始。

在这里，我们就从对习题进行分析开始学起。

1.2 习题的条件和要求

得到习题后，我们自然要仔细地阅读。

习题 1 在直角三角形中，内切圆的切点把斜边分成长

度分别是 5 厘米和 12 厘米的两条线段。求出三角形的两条直角边。

在读这道题时，我们首先可以发现的是：这道题有确定的论断和要求。题中的论断是：“在直角三角形中，内切圆的切点把斜边分成长度分别是 5 厘米和 12 厘米的两条线段”。题的要求是需要“求出三角形的两条直角边”。

习题的要求经常是用问题的形式来陈述的。但是，任何问题都以找出这个问题的答案的要求为前提，所以，任何问题都能够用要求来代替。

习题 2 旅行者在河上乘船航行了 90 公里，又步行了 10 公里。其中步行比乘船少用了 4 个小时。如果旅行者用他乘船那么多的时间步行，而用步行那么多的时间乘船，那么这两段距离相等。他步行和乘船各用了多少时间？

这道题的问题可以用这样的要求代替：求出旅行者步行的时间和乘船的时间。

可以看出，任何习题的简单陈述都是由若干论断和要求组成的。习题的论断称为习题的条件。

由此可见，分析习题时，首先要做的就是将习题的陈述划分成条件和要求两部分。我们发现，在习题中通常不只有一个条件，而是有几个独立的基本的（即不能往下再分的）条件；习题中的要求或许也不只一个。所以，必须把习题所有的论断和要求划分成各别的基本的条件和要求。

在习题 1 中可以分出这样一些基本的条件：

- 1) 题中所说的三角形是直角三角形；
- 2) 一个圆内切于这个三角形；

- 3) 圆切斜边的切点把斜边分成两条线段;
- 4) 这两条线段中的一条长度等于 5 厘米;
- 5) 另一条线段的长度等于 12 厘米。

这道题的要求可以分成两个基本的要求:

- 1) 求出三角形一条直角边的长度;
- 2) 求出三角形另一条直角边的长度。

习题 2 的论断可以分成以下几个条件:

- 1) 旅行者乘船在河上航行了 90 公里;
- 2) 他步行了 10 公里;
- 3) 他步行比乘船少用了 4 个小时;
- 4) 如果旅行者用乘船那么多的时间步行, 则走完的距离为 S_1 ;
- 5) 如果他用步行那么多的时间乘船, 则航行完的距离为 S_2 ;
- 6) 距离 S_1 和距离 S_2 相等。

从这道题的问题中可以分出这样两点要求:

- 1) 求出旅行者步行的时间;
- 2) 求出他乘船航行的时间。

把习题的陈述划分成条件和要求做起来并不那么容易。

在许多情况下, 为此需要把习题分开来理解, 并对习题加以改编。例如:

习题 3 数 2^{100} 含有多少位数 (在十进位的计算体系中)?

这道题的陈述是由一个问题组成的。但是, 深入地思考这个问题, 我们就可以从中分析出这样的条件:

1) 2^{100} 是自然数;

2) 在十进位的计算体系中, 按照通常的方式可以把它写成多位数的形式.

那么, 这道题的要求就是: 求出这个多位数含有多少位.

习题 4 解方程 $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$.

这道题的陈述是由一个要求组成的. 但是, 分析这个要求使我们能从中分析出条件和要求. 条件: $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$ 是一个方程, 而要求: 解出这个方程.

当然, 不能到此为止, 还需要继续分析下去. 我们发现, 方程中含有两个字母: a 和 x . 其中字母 a ——参数, 即在已知习题的范围里, 当作常数的量; x ——变量, 它的变化域是数集, 例如是实数集 (这通常在题中预先说明). 此外, 回想一下方程表示什么也很有用处.

那么, 这道题的条件就是这样的:

1) a 是参数;

2) x 是变量, 它的变化域是实数集;

3) $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$ 是带变量 x 的命题.

那么, 这道题的要求可以这样说: 在变量 x 的变化域中, 求出所有使给定的命题成立的 x 的值.

习题的分析还可以继续下去. 可以问: 在已知的条件下求出变量 x 的值意味着什么? 找到这个问题的答案, 我们就能够使习题的要求明确化. 习题的要求就会具有这样的形式: 求出 x 关于 a 的表达式, 当参数 a 为所有可以容许的值时, 这些表达式将都能代入已知命题中 x 的位置, 使这个命题成

立。

正如我们所看到的，习题的分析、习题的条件和要求的分析可以进行到不同的深度。分析的深度主要要看所给习题的类型和解答这些习题的一般方法我们是否熟悉来决定。如果熟悉，那么，最简单的，归结为确定已知习题类型的分析对我们就足够了。如果不熟悉，那么，为了找到习题的解法就需要更深入地分析。

练 习 1

设法独立地分析下列习题，指出其中每道题所有的基本条件和要求：

1.1 当 ω 是何值时，命题 $2^x > 4$ 为真？

1.2 如果 $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(1, 1)$, $D(3, 5)$ ，作出向量 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{CD} 的和。

1.3 一列火车以每小时 72 公里的速度从 A 地开往 B 地。经过 45 分钟后，另一列火车以每小时 75 公里的速度从 B 地开往 A 地。 AB 间的距离为 348 公里。在离 B 地多远的地方两列火车相遇？

1.4 立方体的边长为 a 。立方体各边间的距离等于多少？

答案：

1.1 条件：1) $2^x > 4$ 是带变量 ω 的命题；2) 变量 ω 的变化域是 R 集。要求：找出集 $X \subset R$ ，当所有的 $\omega_0 \in X$ 时，命题 $2^{\omega_0} > 4$ 为真。

1.2 条件：1) 点 A 的坐标是 $(-1, 2)$ ；2) 点 B 的坐

标是(2, 3); 3) 点 C 的坐标是(1, 1); 4) 点 D 的坐标是(3, 5); 5) 向量 \overrightarrow{AB} 的起点是 A , 终点是 B ; 6) 向量 \overrightarrow{CD} 的起点是 C , 终点是 D 。要求: 作一个向量, 使之等于向量 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{CD} 的和。

1.3 条件: 1) 由 A 地向 B 地行驶的火车速度为 72 公里/小时; 2) 由 B 地向 A 地行驶的火车速度为 75 公里/小时; 3) 第一列火车从 A 地开出 45 分钟以后第二列火车从 B 地开出; 4) A 地和 B 地之间的距离为 348 公里。要求: 求出由 B 地到这两列火车相遇地点的距离。

1.4 条件: 1) 已知一个立方体; 2) 立方体的边长等于 a 。要求: 1) 求出立方体同一面上的对边之间的距离; 2) 求出立方体对面平行边之间的距离; 3) 求出立方体交错边之间的距离。

1.3 分析习题的方向

我们还回到习题 3。分析这道题, 我们分析出下列条件: 1) 2^{100} 是自然数; 2) 按照通常的方式, 可以把它写成多位数的形式。

为什么从习题的陈述中恰好就分出这些条件呢? 要知道, 也可以分出其他的条件来, 例如: 2^{100} 是 2 自乘 100 次的积或者说 2^{100} 是实数等等。但为什么我们分出的条件不是这些, 而是前面所说的那些呢?

全部的问题在于, 对习题进行分析, 从习题的陈述中分析出它的条件, 我们在任何时候都必须使这种分析适应于习