

国外数学题选解

GUOWAISHUXUETIXUANJIE

天津科学技术出版社



国外数学题选解

秦 伟 编译

天津科学技术出版社

封面设计：白慧敏

国外数学题选解

秦 伟 编译

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

天津市新华书店发行

*

开本 787×1092毫米 1/32 印张 6 3/4 字数 115,000

一九八〇年四月第一版

一九八〇年四月第一次印刷

印数：1—220,000

统一书号：13212·15 定价：6.56元

前 言

青少年学生对自然科学的爱好，往往首先表现在对数学的兴趣上。这种兴趣的发展对于提高他们的数学素养进而为专攻其他学科有着不可低估的意义。有不少趣味数学书籍对于发展和培养这种兴趣起着积极的作用。但同时也必须注意到，有些趣味书籍经常不同程度地脱离数学本身的系统性和严谨性，因而也不可能真正地提高学生们的数学水平。本书试图较好地处理数学的趣味性和科学性的关系。

本书主要是根据美国数学家查尔斯·特里克 (Charles Trigg) 编的一本习题集 (Mathematical Quickies) 的俄译本选编的，同时也参考了国外几本习题集，共收入 300 道初等数学题。书中题目的原作者有不少是著名的数学家。考虑到读者对象是青少年，所以，大部分题目饶有趣味，引人入胜。但这些题目十分注意数学本身的科学性，重视运用基础知识。每个读者可以各按其力、各取所需。哪怕是一个初中一年级的学生，也可以找到他感兴趣而又能完成的题目。有些读者也许不是独立地完成题目，而是专挑答案中有趣的地方阅读，据我们亲身经验，这也同样带来愉快和收获。

我们希望这本书会有助于扩大广大青少年学生的眼界，激发他们对数学的兴趣和爱好，提高他们分析和解决数学问题的能力。但本书不是教科书，谨供爱好数学的青少年学生课余参考。中学数学教师也可用以辅导学生课外数学小组的活动。

秦 伟 一九七九年十月

问 题

1. 比较根式.

$\sqrt[3]{8!}$ 与 $\sqrt[3]{9!}$ 哪个大?

2. 阶乘的和.

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!)$$

的和等于多少?

3. 乘积.

化简下列乘式:

$$(3^{2^0} + 1)(3^{2^1} + 1)(3^{2^2} + 1) \cdots (3^{2^n} + 1)$$

4. 分数的和.

证明: 当 $n > 1$ 时, 和式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

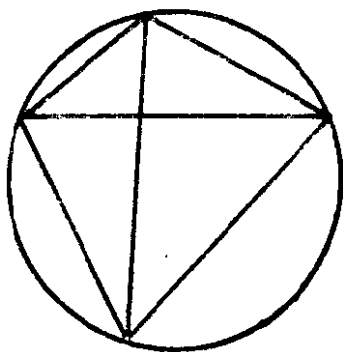
的值不是整数.

5. 上班往返时间.

某人上班时步行, 回家时坐车, 在路上一共化一个半小时。如果往返都坐车, 全部行程只需30分钟。试问, 如果往返都步行的话, 要多少时间?

6. 四边形的对角线.

求证: 任意一个圆内接四边



(6 题图)

形，其对角线的乘积等于每组对边乘积之和。

7. 分解因式。

不用把各项分组的方法，分解下式：

$$x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8.$$

8. 生日。

一个人在1937年元旦发现，在第 x^2 年时他是 x 岁。他说：“如果把我现在的岁数加上我生日的月份数，则等于我生日的日子的平方。”问此人生于何年何月何日？

9. 三个奇数。

不存在三个连续的奇数，使其中每一个奇数都可以写成两个除零以外的平方数之和。

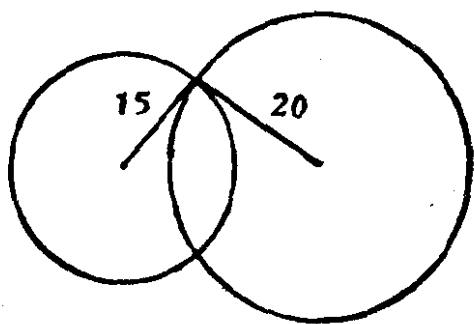
10. 四次方程。

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$$

有几个负根？

11. 每侧一百万个点。

有两百万个质点完全分布在直径1厘米的圆内。是否存在一条直线，使这些点能分布在它的两侧，而每侧恰好为一百万个？



(14题图)

12. 素数集的无穷性。

试证存在无穷多个素数。

13. 复数。

化简下列式子：

$$(27 + 8i)/(3 + 2i^3).$$

14. 相交的圆。

半径为15的圆与半径为20的圆相交，两圆通过交点的半径交成直角。问：两圆减去相交部分后，余下两部分面积之差为多少？

15. 网球比赛。

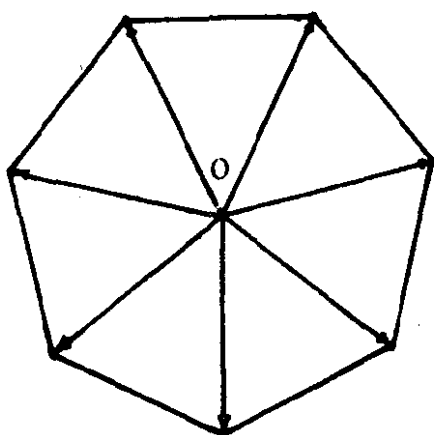
在网球赛中，有 n 个选手参加。每名运动员只要输掉一场就被淘汰。问需要多少场比赛方可推出冠军？

16. 向量和为零。

证明：由正 n 边形的中心至它各顶点的向量的和等于零。

17. 相交的圆柱体。

两个直圆柱体的对称轴相交成直角，每个圆柱体的直径都是2厘米。这两个圆柱体公共部分的体积是多少？



(16题图)

18. 用和式表示正整数。

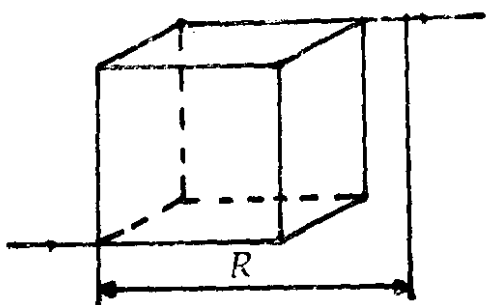
3 这个数可以用四种方法写成一个或几个正整数的和，如 3 ； $1 + 2$ ； $2 + 1$ ； $1 + 1 + 1$ 。试证明：用类似的方式去表示一个正整数 n 可以有 2^{n-1} 种方法。

19. 带有理根的四次多项式。

求证：四次方程

$$(\quad)x^4 + (\quad)x^3 + (\quad)x^2 + (\quad)x + (\quad) = 0$$

中有括号的地方任意填入 $1, -2, 3, 4, -6$ (每个括号填入一个数) 后，总会有一个有理根。



(20题图)

20. 立方体导线网络.

如图, 此正立方体网络每一棱边的电阻为1欧姆. 求该网络对角上两端点间的电阻有多大?

21. 有趣的除法.

除式 $AHHAAH:JOKE=HA$ 的每一个字母代表十个数字中的某一个. 把这个密码除式翻译出来.

22. 卖花人.

一位姑娘在商店里买了 x 朵玫瑰花, 付款 y 元 (x 、 y 都是整数). 她要走的时候, 卖花人对她说: “您要是再多买10朵花的话, 我就总共收您两元钱, 这样, 每一打花您可以节省8角.” 请给出 x 、 y 的答案 (注: 一打花是12朵).

23. 多边形面积的比.

一个等边三角形与一个正六边形周长相等, 问它们的面积之比是多少?

24. 翻碗.

将 n 个底朝上的碗翻过来. 规则是: 每一次翻 $n-1$ 个碗, 可重复这个过程充分多次. 求证: 当 n 为偶数时此题有解, n 为奇数时没有解.

25. “世界末日”.

1946年4月5日, 某外国报纸刊登了一条消息, 说一个著名的“天文学家”和“数论专家”预言: 2141年将是世界末日, 并声称他的预言“是通过深刻的数学和历史研究”得

来的。他计算了：

$$1492^n - 1770^n - 1863^n + 2141^n$$

这个式子当 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 直到 $n = 1945$ 的值，他发现他多年艰辛地算出来的那些数都能被1946整除。而1492，1770，1863分别是一些重要历史事件的年代：发现新大陆、英国殖民者制造的波士顿城惨案、林肯在葛底斯堡发表著名讲演。那么，2141年将发生什么呢？显而易见——世界末日……。

请读者用普通的计算得出他的结果，揭露这个伪科学家的真面目吧！

26. 六个整数。

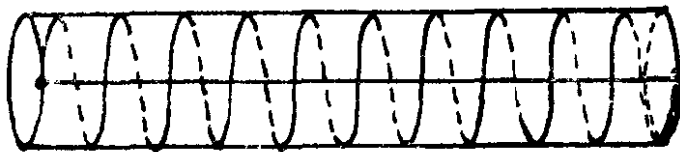
请找出六个不同的最小整数，使其中任意五个数的乘积等于第六个数的倒数用循环小数表示时的周期数字。例如，41的倒数是

$$\frac{1}{41} = 0.0243902439\dots$$

它的周期是02439。

27. 螺线的长。

有一段圆柱管，上面螺旋地绕了十圈导线，管长9厘米，它的外圆周长4厘米，导线的两端在圆柱体同一条母线上。求螺线的长度是多少？



(27题图)

28. 极小值问题。

证明：对于任何正数 p, q, r 和 s ，分式

$$\frac{(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1)(r^2 + r + 1)(s^2 + s + 1)}{pqrs}$$

不小于81.

29. 完全平方数.

证明：任何一个在十进制中以两位或两位以上数字表示的完全平方数，都起码包含有两个不同的数字。

30. 委员会成员.

某个大企业的理事会由15位经理组成。这些人必须同时加入20个附属的委员会。委员会的组成有以下要求：

- (1) 每个经理参加4个委员会；
- (2) 每个委员会由三人组成；
- (3) 不允许两个经理同时参加两个相同的委员会。

问怎样分配才能满足以上条件？

31. 分四份.

请将100分成四个数之和，使得第一个数加上4，第二个数减去4，第三个数乘以4，第四个数除以4，而他们的和、差、积、商都相同。

问这四个数各是多少？

32. 未知的余式.

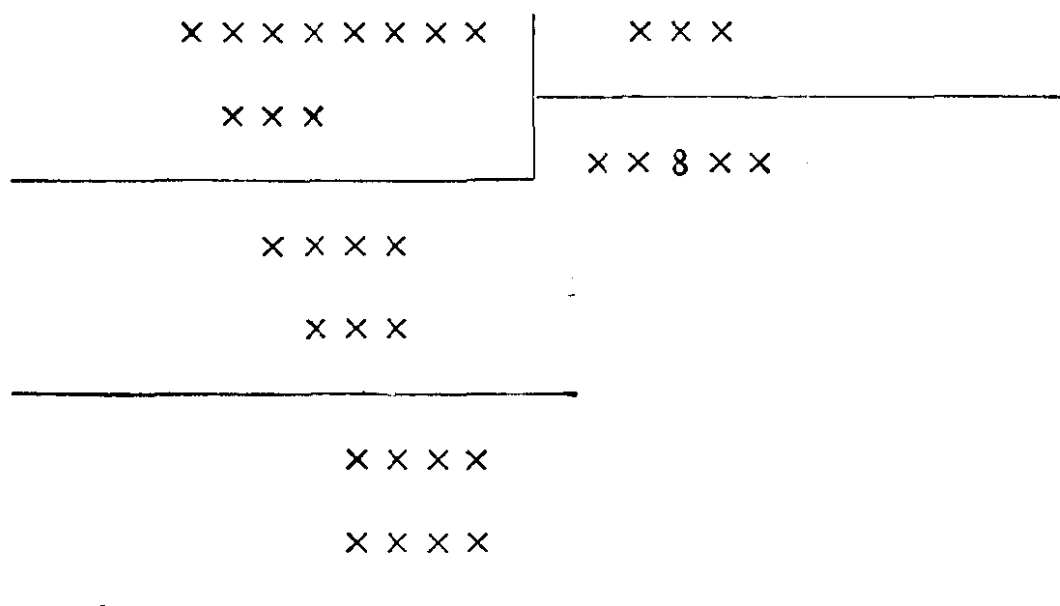
已知

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,$$

求 $f(x^5)$ 除以 $f(x)$ 的余式。

33. 费解的除式.

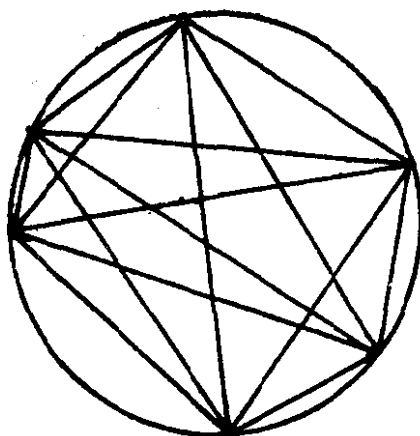
还是我们遇到过的“数论专家”（见25题），一头扎入了一道算术题之中。他试算了



的 $81 \cdot 10^9$ 种解答方案（这题要求把 $\times$ 处的数字找出来）。然而，我们说答案只有 $(81 \cdot 10^9)^0$ 个，让那个“学者”难为情去吧！

34. 圆内的三角形。

圆周上有 n 个点，用直线段将它们彼此相连。这些线段中任意三条在圆内都没有公共交点。那么，由这些直线段构成的，其顶点位于圆内的三角形的数目是多少？



(34题图)

35. 化简根式。

将根式

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

化简。

36. 藏物.

某人因需要决定将一件物品藏在一个荒岛的岸边。那里有两块大石头 A 和 B ，还有三棵椰子树 C_1 、 C_2 、 C_3 。他从 C_1 开始，作 C_1A 的垂线 C_1A_1 ，使得 $C_1A_1 = C_1A$ ，并且 A_1 和 $\triangle AC_1B$ 各在直线 C_1A 的一侧。类似，再作 C_1B 的垂线 C_1B_1 ，使得 $C_1B_1 = C_1B$ ，并且 B_1 和 $\triangle AC_1B$ 各在直线 C_1B 的一侧。然后，连接 A_1B 与 B_1A ，把它们的交点记作 P_1 。

接着，他又对 C_1 和 C_2 两棵树作了同样的处理，得到 P_2 与 P_3 两点。

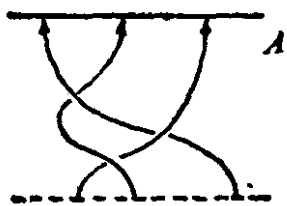
最后，他把物品埋藏在 $\triangle P_1P_2P_3$ 的外接圆的圆心处。

过了一段时间，他重返荒岛。可是，一场大风暴把三棵椰子树刮得杳无踪影。试问：他应该怎样做才能找到那些埋藏的东西呢？

37. 加班工作.

某企业共有350名职工。在假日期间加班时老职工每人奖给10元，新职工奖给8.15元。全体新职工和一部分老职工加了班。经核算后发现报酬的总数目与老职工总数目无关。问给所有新职工的加班费总数是多少？

38. 搞乱了绳子.



(38题图)

木板 A 上有三枚钉子，三条同样长的绳子系在这三枚钉子上。这三条绳子被搞乱了（如图所示）。现在，要在这三条绳子的自由端上再接上三条新绳子（这三条绳子也可以被搞乱），

并把新绳子的另一端再系在木板 B 的三枚钉子上。然后，通

过移动木板 A 、 B ，得到三条平行的直绳子。

应该怎样接这些绳子？

39. 打盹的学生。

一个中学生在代数课快下课时睡着了。他只听见老师讲的一句话：“……我们仅仅知道，所有的根都是正的实根。”这个学生睁眼望黑板，家庭作业是一个20次方程，他赶紧把它抄下来，但他只来得及抄下 $x^{20} - 20x^{19}$ ，其他的被老师擦掉了。但是他想起常数项是 $+1$ 。

你能不能帮助一下解出这道题？

40. 多面体的边。

试证明：在三维空间中，多面体不可能有七条棱边。

41. 简单的恒等式。

求证 $63! \equiv 61! \pmod{71}$ 。

(亦即求 $63! - 61!$ 除以71等于多少？)

42. 等边三角形。

求证：如果 a 、 b 、 c 是三角形的三条边，并且 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ，

那么这个三角形一定是等边三角形。

43. 化简。

计算根式

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \cdots} \right)^{\frac{1}{3}}$$

44. 一套书。

有一套书，每隔七年出一册。前七册书问世的年代之和为13524，问第一册是何时出版的？

45. 三个中项。

设数 a 和数 b 的等比中项是 G ，等差中项是 A ，调和中项是 H 。用几何法证明： G 是 A 和 H 的比例中项。

$$\left(\text{附注： } A = \frac{a+b}{2}, G = (ab)^{\frac{1}{2}}, H = \frac{2ab}{a+b} \right)$$

46. 一百的倍数。

证明： $11^{10} - 1$ 能被100整除。

47. 分割球面。

将一个球面分割为若干全等的小块，使每块的每条边都是大圆的圆弧，且该圆弧小于大圆周的四分之一。

48. 两个正六边形。

一个正六边形内接于一个圆，另一个正六边形外切此圆。不用根式运算，试求这两个正六边形面积之比是多少？

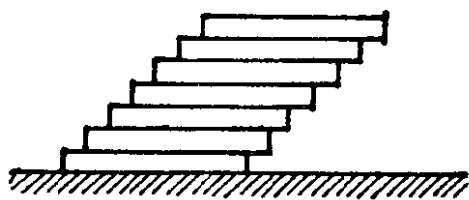
49. 含有和式的方程。

如果

$$\frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3} = \frac{199}{242},$$

把整数 n 确定下来。

50. 成堆的木块。



(50题图)

有 n 块长方体形状的木块，每块的尺寸都是 $10 \times 20 \times 2.5$ 立方厘米。如果不触动最上面一块木头则能保持这一堆木块不垮下来，问这

堆木块边缘的最大水平距离是多少？

51. 掷骰子。

一个骨骰子，六个面的数字为0，1，2，3，4，5。

开始掷这个骰子，当掷到总点数超过12就停止不掷了。

问：这种掷法最可能出现的总点数是多少？

52. 线性方程组。

“这个包含 n 个未知量、 n 个线性方程的方程组有个奇怪的性质。”

“哦，什么性质？”

“你看，它们的系数构成等差级数。”

“您这么一解释我就明白了。您是说，方程组类似于 $6x + 9y = 12$, $15x + 18y = 21$ 这种样子？”

“就是这个意思。老实告诉你吧，这个方程组只有唯一的解。你会解吗？”

“哎呀，我可不行！”

你呢？

53. 整除的概率。

将0, 1, 2, ..., 9这十个数字按照任意一种次序填入下面数字序列中空白的地方，形成一个28位数：

5 383 8 2 936 5 8 203 9 3 76.

那么，所形成的数能被396整除的概率是多少？

54. 无整数解的方程。

证明方程 $x^2 - 3y^2 = 17$ 没有整数解。

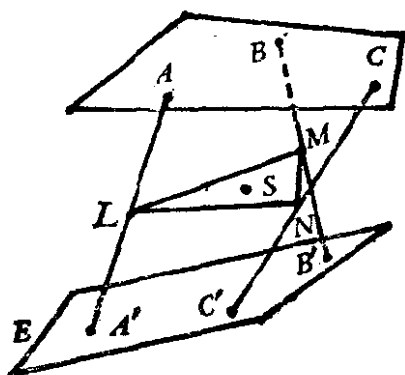
55. 数学教授的儿子。

一位数学教授在黑板上写了一个多项式 $f(x)$ ，它的系数都是整数，然后说：“今天是我儿子生日。如果把他的年龄 A 去代替多项式中的 x ，就得到等式 $f(A) = A$ 。大家注意， $f(0) = P$ ，其中 P 是大于 A 的素数。”

教授的儿子多少岁？

56. 在空间中的位置.

设平面 E 的一侧有三个不在一条直线上的点 A, B, C , 这三点所在的平面与平面 E 相交. 在 E 上取任意三点 A', B', C' . 连接 AA', BB', CC' , 它们的中点是 L, M, N ,



(56题图)

$\triangle LMN$ 的形心是 S . 现在, 让 A', B', C' 在平面 E 上彼此独立地变化. 那么, 点 S 处于空间的哪些位置上?

57. 气象观测.

气象站发现, 在某段时间里, 若早晨下过雨, 则晚上是晴天; 若晚上下过雨, 则早晨是晴天. 一共下了九天雨, 出现了六次晴朗的晚上和七次晴朗的早晨. 问: 这段时间包括几天?

58. 角平分线相等.

证明: 若一个三角形两个内角的平分线相等, 则此三角形是等腰三角形.

59. 三条直线交于一点.

设 A_1, B_1, C_1 分别是三角形 ABC 的边 BC, CA, AB 上的点, 为使直线 AA_1, BB_1, CC_1 相交 (或互相平行), 需要也只需要

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

60. 八等分圆.

试证：如果 k 是任意实数，则曲线

$$x^4 + kx^3y - 6x^2y^2 - kxy^3 + y^4 = 0$$

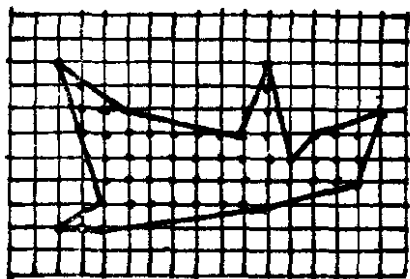
把单位圆圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 分为八等分。

61. 不含方幂的等差数列。

请写出一个由整数组成的等差数列，它有无限项，并使其中任何一项都不是整数的 r 次幂 ($r = 2, 3, \dots, n$)。

62. 多边形面积。

求出图中多边形的面积。注意：它的顶点都在网格的结点上。



(62题图)

63. 阶乘方程。

求出方程

$$n!(n-1)! = m!$$

的全部解。

64. 两个三角形。

已知线段 a, b, c 组成一个三角形，求证 $\sqrt{a}$ 、 $\sqrt{b}$ 、 $\sqrt{c}$ 也能组成一个三角形。

65. 圆内最大角。

A 与 B 是圆内的两个点，求圆周上一点 C ，使 $\angle ACB$ 为最大。

66. 九宫行列式。

所谓九宫，是指将九个整数排成的三行三列方阵，使每行、每列及对角线上三数之和均相等。设 S 为这九个数之和， D 是由方阵形成的行列式，那么： D/S 为整数。

67. 非完全平方的五位数。

试证明，在10进制中，任何一个完全平方数不能用五个