

《数学·我们·数学》丛书

数学与经济

SHU XUE YU JING JI

史树中 著

要 目

- 数学在经济学中的作用
- 诺贝尔经济学奖与数学
- 经济学中的最优化和均衡
- 计划与市场·竞争与互利
- 增长与控制·不确定性与模型
- 数学与经济学的共同未来

《数学·我们·数学》丛书

数学与经济

史树中 著

湖南教育出版社

数 学 与 经 济

shuxue yu jingji

史树中 著

责任编辑: 孟实华

湖南教育出版社出版发行 (长沙展览馆路3号)
湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷一厂印刷

850×1168毫米 32开 印张, 7.375 字数, 170000

1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷

印数, 1——1,200

ISBN7—5355—1155—4/G·1150

定 价: 4.30 元

我們讚賞數學
我們需要數學

一九八六年十月書祝

“
數學。我們。數學。
、

成功

陳省身



写在前面

丁石孙（北京大学）

最近钱学森同志在一封信中提出了一个观点，他认为数学应该与自然科学和社会科学并列，他建议称为数学科学。当然，这里问题并不在于是用“数学”还是用“数学科学”，他认为在人类整个知识系统中，数学不应被看成是自然科学的一个分支，而应提高到与自然科学和社会科学同等重要的地位。

我基本上同意钱学森同志的这个意见。数学不仅在自然科学的各个分支中有用，同时在社会科学的很多分支中也有用。近期随着科学的飞速发展，不仅数学的应用范围日益广泛，同时数学在有些学科中的作用也愈来愈深刻。事实上，数学的重要性不只在于它与科学的各个分支有着广泛而密切的联系，而且数学自身的发展水平也在影响着人们的思维方式，影响着人文科学的进步。总之，数学作为一门科学有其特殊的重要性。为了使更多人能认识到这一点，我们决定编辑出版《数学·我们·数学》这套小丛书。与数学有联系的学科非常多，有些是传统的，即那些长期以来被人们公认与数学分不开的学科，如力学、物理以及天文等。化学虽然在历史上用数学不多，不过它离不开数学大家是看到的。对这些学科，我们的丛书不打算多讲。

我们选择的题目较多的是那些与数学的关系虽然密切，但又不大被大家注意的学科，或者是那些直到近些年才与数学发生较为密切关系的学科。我们这套丛书并不想写成学术性的专著，而是力图让更大范围的读者能够读懂，并且能够从中得到新的启发。换句话说，我们希望每本书的论述是通俗的，但思想又是深刻的。这是我们的目的。

我们清楚地知道，我们追求的目标不容易达到。应该承认，我们很难做到每一本书都写得很好，更难保证书中的每个论点都是正确的。不过，我们在努力。我们恳切希望广大读者在读过我们的书后能给我们提出批评意见，甚至就某些问题展开辩论。我们相信，通过讨论与辩论，问题会变得愈来愈清楚，认识也会愈来愈明确。

1989年4月

于北京大学

前言

这是一本数学工作者写的关于学习经济学的体会的书。作者很高兴它能跻身于这套《数学·我们·数学》丛书之中，并被冠以一本正经的大名《数学与经济》。但是如果让作者重新来取一个题目，我更想称它为：《一名数学工作者在经济学王国中漫游》。所谓漫游，就是说象个旅游者那样，作为他乡客，闯进了一块不熟悉的土地；只见那里千岩竞秀、万壑争流，于是就四处乱走，尽兴观光；边走还边以他乡的眼光随发议论，有时虽也能招来本地居民会心的首肯，有时则不免惹出他们皱眉的耻笑。这本书就是作为数学工作者的作者在经济学王国多年“漫游”中所发议论的笔记，它原本不是深思熟虑的研究，也就不必做出一番专门的架势来。笔调自可以轻松些。对作者来说，写惯数学符号的笔忽然挣脱了抽象严格的羁绊，开始论古道今，谈东说西，已感十分愉快。倘若它还能成为一本“供数学工作者参考”的“经济学王国导游手册”（正如几乎所有的导游手册一样，都不是给本地居民看的），甚至还引得有些数学工作者去那里“扎根”，那就是意外收获了。

然而，经济学毕竟是一门严肃的科学，它是不能容忍人们太放肆的。用马克思的话来说，搞得不好会“把人们心中最激烈、最卑鄙、最恶劣的感情，把代表私人利益的复仇女神召唤到战场上来”。^①既然要把随心所发的议论公诸于世，就不能过分漫不经心。好在作者的数学职业习惯早已使自己十分迂腐，向来不敢道听途

^① 马克思，《资本论》第一卷第一版序言，《马克思恩格斯选集》，第二卷，人民出版社，1972年版，第208页。

说、滥发高论。对一些论断虽不能都给出数学意义的严格证明，总希望做到有根据、讲道理。即使不能说处处都有第一手材料，也要尽力去对证史实和引文的可靠。至于数学上的准确，那属本行，自信还不会太离谱；只是为了有更多的读者，没有完全当正规的数学来写。有时为了强调数学上的复杂，不得不动用一些不常见的概念和符号，也尽可能把预备知识限制在最起码的高等数学以内。

世上常有些人认为经济学很容易。似乎谁都能对一些经济问题发表高见，谁都能摇身一变为“经济学家”，侈谈各种“独创新原理”或“救世大宏图”。对于书呆子才会去念的抽象艰深数学，想当然是与“经济学”不相干的，或者至多能拿来算算豆腐帐。作为书呆子一员的本书作者则感到经济学越读越难，越读越不敢说自己读懂了多少经济学，甚至不敢说自己的数学根底足以对付各类经济学问题。本书在很大程度上要谈谈作者的这种感受。

把数学与经济学作比较，与人们日常生活密切相关的经济学似乎比数学“平易近人”得多。其实不然。真正“平易近人”的是数学，经济学更可能“拒人千里”。数学虽然板着用符号装扮的面孔，令人生畏，但总是平等待人、恪守信义；一旦你与它搞熟了，它会对你特别亲热，并且从不与你翻脸。经济学天天跟人见面，却老是喜怒无常，叫人不可捉摸；你自以为已经有点了解它，它却说变就变，使你又陌生起来；你想听听它的朋友的看法，又常常是5位经济学家有7种不相容的意见。谓予不信，不妨看看古今中外关于通货膨胀的研究和讨论。这就是说，对数学的任何方面，我们清楚地知道我们知道些什么；而对经济学的许多方面，正如某位经济学大教授所说：“我们并不知道我们知道些什么。”^①这样的学问难道不是越学越难吗？

① 这里指美国经济学家莱本斯坦 (Harvey Leibenstein, 1922—)。这句话可参看丹尼尔·贝尔、欧文·克里斯托尔编，《经济理论的危机》，上海译文出版社，1985年版，第137页。

至于数学与经济学的关系，我们想提请人们注意：数学与经济学并不是有些人所想象的那样离得很远。历史已经证明，数学家与经济学家有非常紧密的联系。不少经济学家有过数学家的学术生涯，而数学家又常常会在经济学研究中出奇兵。最近半个世纪来，尽管有人赞赏，有人反对，经济学的“数学化”倾向是明摆的事实。本书将试图为这种越来越强烈的倾向描一张草图，并且还想说明，“数学化”并不是使经济学变得难懂，恰恰是使一部分经济学容易理解了。

作者在当数学系的大学生时也曾爱好过经济学，甚至下决心啃过《资本论》，但真正闯进经济学王国还是近10年的事。10年前，当我在巴黎第九大学的《决策数学研究中心（CEREMADE）》进修时，开始接触一些数理经济学家。在许多学术报告的听讲中，我忽然发现我所关心的极为抽象的非线性泛函分析在经济学中大有用武之地，甚至不少问题还是源出于经济学。这当然使我十分感兴趣。由于意识到当时国内长期来在苏联早年的影响下，这方面几乎完全是空白，我就花了点时间对国外数量经济学的理论与实际应用作了点调查，并向我所在的南开大学写了一份报告。这份报告当时很受各级领导的重视。当我1981年回国后，领导就鼓励我从事经济数学的教学科研工作。开始时我还甚为犹豫，因为这将意味着我要放弃大量的数学工作时间。恰好这时有一位美国经济学教授来访。他在一次座谈会上说，对我国曾有过的某些经济指标，他与他的同行不需5分钟就可断定是不可能的，因为这是计算需要多少钢、多少能源等等的数学。听了这席话真叫人不是滋味。但正是这位洋教授的“指教”和“促进”，使我认识到应该尽我的绵薄之力，让中国多几个人来懂得这样的数学。

从此，就迫使我不得不花大量时间来读经济学。其中虽然主要读“数学化”的西方经济学，为了明辨是非，也读了不少马克思主义经典作家的原著以及苏联的、东欧的和国内的经济著作。同时，也开始关心起国内外的经济动态来。尽管如此，我却始终

没有成为经济学界的“局内人”，而老是作为“局外人”在那里“漫游”。在领导和国内外同行们（包括数学家和经济学家）的支持帮助下，近10年来，我的绝大部分研究生都成了经济数学的研究工作者。他们曾对许多实际经济问题做过数学模型，也对一些数理经济学理论问题作过数学研究。其中还有10来名后来在国外的大学攻读经济学博士学位。他们正在反过来成为我的经济学老师。我们甚至还在南开大学数学系办了一个经济数学专业。惭愧的是，我自己却还是只会搞数学。对我来说，再要立志去研究经济学看来已经太晚了。何况在国内的条件下，运用数学来研究经济学在很多方面需要“白手起家”。不过既然已读了那么些经济学，不管读懂多少，至少在数学与经济学的关系上，总有不少话可说。当我接受了本丛书的约稿后，居然一下子写了那么多，并且还老感到言犹未尽。但愿它并未因此过多地浪费读者的时间，也望读者批评指正。

最后，作者还应感谢国家教委和国家自然科学基金委的长期支持。没有他们的科研基金，我的身边决不可能积累那么多经济学资料。在国内的数学界中，我想我大概是少有的掌握大量经济学图书资料的人之一。这当然为写作本书带来莫大的方便。

史 树 中

一九九〇年二月

目 录

前言	1
1. 引言·历史的回顾	1
数理经济学的开端——边际效用学派——计量经济学——诺贝尔经济学奖金——数学在经济学中的渗入——本书的小目标	
2. 可用数学研究的经济学和经济学研究中的数学	18
经济学或政治经济学的定义——规范经济学和实证经济学——可用数学研究的经济学——经济学研究中的数学——数学在经济学中的作用	
3. 生产的最优化·产出与成本的对偶性	35
新古典主义的最优化——生产最优化问题怎样变成数学——数学怎样导得经济学结论——数学推广的威力——数学被“翻译”成经济学——柯布—道格拉斯生产函数——产出与成本的对偶性	
4. 消费的最优化·效用与偏好	55
效用最大化问题——两个实例：征税和价格补贴——斯鲁茨基方程——效用概念的历史渊源——基数效用与序数效用——偏好的定义及德布罗—爱伦贝格—拉德爾定理	
5. 计划与市场·资源的最优配置	76
资金最优分配问题——集中决策和分散决策——三种不同情形——拉格朗日乘子与“最优利率”——资	

源最优配置与影子价格——“社会主义是否可行”的论战——“试验纠错法”——兰格与社会主义的经济改革

6. 一般经济均衡·经济学的公理化方法 ————— 92

亚当·斯密的“看不见的手”——瓦尔拉斯的一般经济均衡——简化情形与布劳维不动点定理的等价——经典的阿罗—德布罗定理——数学公理化方法——“反均衡”、“非均衡”等等

7. 福利经济学与社会选择 ————— 111

所谓福利经济学——帕累托最优——古诺—纳什平衡——“囚犯难题”——福利经济学基本定理——社会选择与“投票悖论”——阿罗不可能性定理——附录：阿罗不可能性定理的证明

8. 商品交换中的竞争与互利 ————— 130

“背对背”与“面对面”——埃奇沃思盒——埃奇沃思猜想——德布罗—斯卡夫定理——无原子测度空间和标准分析——新的“无理数”？

9. 经济学中的不确定性 ————— 145

一场赌博的“圣彼得堡悖论”——冯·诺伊曼—摩尔斯顿效用函数公理——经济决策的“阿莱悖论”根——风险和不确定性——阿罗—普拉特风险度量——带不确定性的一般经济均衡

10. 宏观经济模型 ————— 165

凯恩斯与宏观经济学——凯恩斯体系的方程——一个简单的宏观经济模型——宏观经济模型的研制历史和现状——宏观经济模型的作用

11. 经济增长理论和经济控制论 ————— 180

经济增长理论得了诺贝尔奖——哈罗德——多马模型——新剑桥学派模型——新古典主义模型——经

济控制论是一种语言——拉姆赛其人——最优经济
增长问题——“大道定理”

12. 结语·数学与经济学的共同未来—————202

“成功地运用数学”才是“真正完善”——我们的“环
游路线”——数学是可有可无的吗？——经济学与大
象——数学的300年与经济学的200年——经济学中
运用数学的展望——以笑话来作为本书的结束

附录：诺贝尔经济学奖金获得者名单—————214

外文人名索引—————216

引言·历史的回顾

经济学系统运用数学方法最早的例子，通常都认为是17世纪中叶英国古典政治经济学的创始人配第^①的著作《政治算术》（有中译本）。但实际上，从19世纪中叶起，数学才真正开始与经济学结下不解之缘。

1838年，作为拉普拉斯^②和泊松^③的数学学生，以概率论研究开始其学术生涯的古诺^④，忽然发表了一本题为《财富理论的数学原理研究（Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses）》的经济学著作。这本书中充斥了数学符号。例如，记市场需求为 d ，市场价格为 p ，则需求作为价格的函数，就可记为 $d = f(p)$ 。对于今天的经济系科的大学生来说，这自然已是司空见惯的事。但是在古诺的时代，经济学家们则完全不能容忍这种“胡言乱语”。他们的反对迫使古诺对经济学沉默了25年。1863年古诺又用普通语言重写他的著作。书名

① William Petty, (1623—1687). 英国经济学家。

② Pierre Simon Laplace, (1749—1827), 法国数学家。

③ Siméon Denis Poisson, (1781—1840), 法国数学家。

④ Antoine Augustin Cournot, (1801—1877); 法国数学家、经济学家和哲学家。

中的“数学”与“研究”都回避了，而变成《财富理论的原理(Principes de la Théorie des Richesses)》。但数学家的严谨思维方法仍使这本著作遭到了冷遇。古诺的历史地位直到他去世80年以后才被充分肯定。正如德布罗^①在他1983年的诺贝尔经济奖讲演中所说：

“如果要对数理经济学的诞生选择一个象征性的日子，我们这一行会以罕见的一致意见选定1838年，…古诺是作为第一个建立阐明经济现象的数学模型的缔造者而著称于世的。”^②

古诺有今天的声誉，首先是与他的同年、同窗、几乎同名但不同姓的至交安东尼·奥古斯特·瓦尔拉斯的儿子勒翁·瓦尔拉斯^③分不开的。老瓦尔拉斯也算是个有过著作的经济学家，但由于他总是言行不合时宜，终生都未获得经济学教席。他对经济学最大的贡献是培养了他的儿子。小瓦尔拉斯学过工程，写过小说，到了1858年才听从父教，决心献身于经济学。但他在法国同样未能获得教席。他当过记者，干过银行职员，都很不成功。最后在1870年到了瑞士的洛桑大学才成为经济学教授，并开创了一代“洛桑学派”。由于其父亲和古诺的影响，以及他曾受过的良好的工程教育，促使小瓦尔拉斯经常从数学和工程的观点来考虑经济学问题。在研究目前通称为“边际效用”、他称为“稀缺性”的理论^④时，他忽然感到自己的数学太差。于是努力向一位力学教授学习微积分。当他的有关边际效用研究的题为《交换的一种数学理论的原理》的论文发表时，他沮丧地发现杰文斯^⑤已先于他在1862

① Gérard Debreu, (1921—), 美籍法裔经济学家和数学家。1983年诺贝尔经济奖获得者。

② 德布罗，数学思辨模式的经济理论，史树中译，王毓云校，数学进展，17:3 (1988)，251—259。

③ Antoine Auguste Walras, (1801—1866), Léon Walras, (1834—1910), 父子两人都是法国经济学家。

④ 关于边际效用的讨论请参看第4章。

⑤ William Stanley Jevons, (1835—1882), 英国经济学家。

年,发表了一篇题为《政治经济学的一般数学原理的注记》的论文,同样阐述了边际效用(杰文斯称为“最后效用”)的理论。不过沮丧之余,他又欣慰他毕竟在数学上下了功夫,使得他的表达形式比杰文斯要好,因为后者尽管后来大谈其“经济学如果是一种科学,它必须是一种数学的科学”,^①实际上其数学比他更不高明。

杰文斯和瓦尔拉斯两人都被认为是经济学的“边际效用学派”的奠基者。这个学派的先驱者是戈森^②,而另一个奠基者则是门格尔^③。但这两位经济学家竟由于他们的数学程度不同而有完全不同的遭遇。前者由于他的数学太好,在他的著作中写下了大量数学符号、公式、图表,再加上他的出言不逊、目空一切,自比“经济学上的哥白尼”,结果使他的著作几乎无人理会。最后只是在他去世20年后的1878年,才被杰文斯和瓦尔拉斯尊为精神上的前辈。而门格尔则出于对数学的无知,居然完全无视牛顿和莱布尼茨^④以来数学家和物理学家已经用了二百年的微分法,而于1871年重新发明了所谓“边际分析法”。这种方法包含着一种模糊的数学语言,但阐明着清晰的边际效用学派的经济学,因而使他在经济学界一举成名。到了后一代的经济学家才搞清楚,门格尔等所说的各种“边际”,原来就是数学家所说的“导数”或“偏导数”!从此,微分学以至其它高等数学,也就开始在经济学中登堂入室。

然而,真正产生今日意义下的数理经济学的还不完全是边际效用学派的研究,而是(小)瓦尔拉斯另一项倍受称颂的经济学成就,那就是他在1874年前后提出的一般经济均衡理论。熊彼特^⑤曾经不止一次地说过,由于瓦尔拉斯提出一般经济均衡理论^⑥,

① 杰文斯,《政治经济学理论》,郭大力译,商务印书馆,1984年版,第30页。

② Hermann Heinrich Gossen, (1810—1858), 德国经济学家。

③ Carl Menger, (1840—1921), 奥地利经济学家。

④ Issac Newton, (1642—1727), 英国数学家和物理学家; Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646—1716), 德国数学家和哲学家。微积分学是他们两人创始的。

⑤ Joseph Alois Schumpeter, (1883—1950), 奥地利经济学家。

⑥ 参看第6章。

使他成为所有经济学家中最伟大的一个。一般经济均衡的观念一直可以追溯到亚当·斯密^①，甚至更早。但被表达成瓦尔拉斯的联立方程组的形式，则应归功于瓦尔拉斯所受到的那些工程和数学的教育。商品的供给和需求及其与价格的错综复杂关系，一旦被一些数学方程来刻划后，由这些方程的解所形成的理想经济状态也就随之而生，而它就是所谓“瓦尔拉斯一般经济均衡”。

尽管如此，后人一方面要感谢瓦尔拉斯的数学修养，使他懂得了用联立方程组来表达一般经济均衡；不管有多少人对这一理论有多少责难，这一理论是人类智慧最高结晶之一大概是无法否认的；而在另一方面，后人或许同样要庆幸瓦尔拉斯数学知识有限，才使他毫不犹豫地提出了他的一般经济均衡理论。瓦尔拉斯虽然正确地提出了一般经济均衡的数学框架，但是他的数学论证则完全是不可信的。80年以后，当1954年第一个一般经济均衡模型的严格数学证明由阿罗^②和德布罗提出时，人们才明白，幸而瓦尔拉斯对数学不求甚解。如果他是一个完全彻底的数学家，或许一般经济均衡理论就会夭折。原来，用来严格证明一般经济均衡存在的数学工具直到1911年才初露端倪，因为所谓“布劳维^③不动点定理”到那时才问世。而证明一般经济均衡所必要的布劳维不动点定理的推广：“角谷^④不动点定理”，则是到了1941年才出现。从1874年到1954年的这80年间，所谓数理经济学 (mathematical economics)，几乎就等于一般经济均衡理论的数学研究。其中还使冯·诺伊曼^⑤这样的大数学家也投身进去，为它砌上一块基石。直到1959年，德布罗发表了他的《价值理论，经济均衡的一种公理化分析》(有中译本)，正式宣告运用数学公理化方法的数

① Adam Smith, (1723—1790), 英国经济学家。

② Kenneth Joseph Arrow, (1921—), 美国经济学家，1972年诺贝尔经济学奖获得者。

③ Luitzen Egbertus Jan Brouwer, (1881—1967), 荷兰数学家。

④ 角谷静夫 (Kakutani Shizuo), (1911—), 日本数学家。

⑤ John von Neumann, (1903—1957), 美籍匈牙利数学家。