

高等学校教材

# 结 构 力 学

(第三版)

上 册

李廉锴 主编

高等教育出版社

高等学校教材

# 结 构 力 学

(第三版)

上 册

李廉锴 主编

高等教育出版社

(京) 112号

### 内 容 提 要

本书是在第二版(曾获国家教委优秀教材二等奖)的基础上,根据国家教委审定的《结构力学课程教学基本要求》修订的。本书取材适宜,内容精练,由浅入深,联系实际,并反映了本学科的新内容。

全书共十七章,分上下两册出版。上册包括绪论、平面体系的机动分析、静定梁与静定刚架、静定拱、静定平面桁架、影响线及其应用、结构位移计算、力法、力法应用、位移法、渐近法、矩阵位移法、平面刚架静力分析程序十三章,下册包括结构的极限荷载、结构弹性稳定、结构动力学、悬索计算四章。全书各章均附有复习思考题和习题,上、下册各附有自测题两组,便于学习。

本书可作为铁路工程、公路工程、桥梁与隧道等专业的教材,也可作土建、水利类专业教材,以及供有关工程技术人员参考。

责任编辑 余美茵

#### 图书在版编目(CIP)数据

结构力学(上)/李廉锟主编.—3版.—北京:高等教育出版社,1996

ISBN 7-04-005343-8

I. 结… II. 李… III. 结构力学 IV. 0342

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第00990号

\*

高等教育出版社出版  
新华书店总店北京发行所发行  
化学工业出版社印刷厂印装

\*

开本 787×1092 1/16 印张 19.5 字数 480 000

1979年5月第1版 1996年5月第3版

1997年7月第2次印刷

印数 15 731—25 940

定价 15.00元

## 第三版序

本书第二版曾获国家教委优秀教材二等奖，第三版是在其基础上，根据国家教委审定的《结构力学课程教学基本要求》和十余年来教学改革的情况修订而成的，本书可作为道桥类专业教材，亦可作土建、水利类专业教材。

在第三版中，删去了三铰拱和桁架内力的图解法、位移计算中的弹性荷载法以及用此法绘制超静定桁架和无铰拱的影响线等内容；将第二版中的超静定梁及超静定桁架和超静定拱两章，精简合并为一章——力法应用；新增了平面刚架静力分析程序、结构的极限荷载及悬索计算等三章；其余章节亦有不同程度的改写；各章（除第一章外）均增设了复习思考题；对习题也作了少量调整和补充；带\*和\*\*的章节属选学内容，可根据具体情况取舍；带\*的习题则是配合选学内容的或是较难的。此外，上、下册各附有两组自测题（取材于编者历年自命试题），供教学参考。

第三版仍由李廉锟教授主编，参加修订工作的有缪加玉（第一至七章、十二、十三章、附录），钟桂岳（第八至十章），卢同立（第十四至十六章），杨仕德（第十一、十七章），陆铁坚（部分思考题及习题）。

本书第三版由清华大学包世华教授和北方交通大学赵如骊副教授审阅，并请同济大学李明昭教授和长沙铁道学院曾庆元教授审阅了悬索计算内容。审阅人对原稿提出了很多宝贵的意见；兰州铁道学院、北方交通大学等单位的教师们，对本书第二版及这次修订工作提出了不少中肯的建议。所有这些，对第三版的定稿起了重要作用，在此一并致以诚挚的感谢！

限于编者水平，书中难免有疏漏和不妥之处，恳望读者指正。

编者

一九九四年九月

## 第二版序

本书是在湖南大学、西南交通大学、长沙铁道学院合编、李廉锰主编的第一版的基础上，根据一九八〇年五月教育部高等学校工科力学教材编审委员会结构力学编审小组审订的《结构力学教学大纲（草案）》修订的，适用于铁道工程、公路工程、桥梁及隧道等专业，亦可供土建、水利类专业参考。

本书与第一版比较，删去了矩阵力法原理及有限单元法基础两章，其他章节大部分作了增删或改写。书中带星号的部分是供选学的内容，可按不同专业和学时取舍。带星号的习题是配合选学内容的或是较难的。大部分习题附有答案，可供查对。

本次修订工作由长沙铁道学院担任，李廉锰任主编，执笔的有李廉锰（第十三、十五章）、缪加玉（第一至七章、第十二章）、钟桂岳（第八至十一章、第十四章），欧阳炎、卢同立分别参加了第十三、十四章的部分修订工作，杨仕德校阅了部分书稿及习题答案。

本书第二版由北方交通大学陈英俊、王道堂同志和同济大学李明昭同志担任主审，清华大学龙驭球同志复审，同济大学、西南交通大学、西安公路学院、长沙交通学院等院校的代表参加了审稿会，审阅者对第二版原稿提出了很多宝贵的意见，此外，兰州铁道学院等兄弟院校的教师亦提出了不少中肯的建议，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中一定还有许多不当之处，恳望读者指正。

编者

一九八三年十月

# 目 录

第三版序 .....	I	第五章 静定平面桁架 .....	52
第二版序 .....	II	§ 5-1 平面桁架的计算简图 .....	52
第一版序 .....	V	§ 5-2 结点法 .....	54
第一章 绪论 .....	1	§ 5-3 截面法 .....	56
§ 1-1 结构力学的研究对象和任务 .....	1	§ 5-4 截面法和结点法的联合应用 .....	59
§ 1-2 荷载的分类 .....	1	§ 5-5 各式桁架比较 .....	62
§ 1-3 结构的计算简图 .....	2	§ 5-6 组合结构的计算 .....	62
§ 1-4 支座和结点的类型 .....	2	* § 5-7 用零载法分析体系的几何构造 .....	63
§ 1-5 结构的分类 .....	5	复习思考题 .....	65
第二章 平面体系的机动分析 .....	7	习题 .....	65
§ 2-1 引言 .....	7	第六章 影响线及其应用 .....	69
§ 2-2 平面体系的计算自由度 .....	7	§ 6-1 影响线的概念 .....	69
§ 2-3 几何不变体系的简单组成规则 .....	9	§ 6-2 用静力法作单跨静定梁的影响线 .....	70
§ 2-4 瞬变体系 .....	12	§ 6-3 间接荷载作用下的影响线 .....	73
§ 2-5 机动分析示例 .....	13	§ 6-4 用机动法作单跨静定梁的影响线 .....	74
* § 2-6 三刚片体系中虚铰在无穷远处 的情况 .....	15	§ 6-5 多跨静定梁的影响线 .....	76
§ 2-7 几何构造与静定性的关系 .....	17	§ 6-6 桁架的影响线 .....	78
复习思考题 .....	17	§ 6-7 利用影响线求量值 .....	82
习题 .....	18	§ 6-8 铁路和公路的标准荷载制 .....	84
第三章 静定梁与静定刚架 .....	20	§ 6-9 最不利荷载位置 .....	85
§ 3-1 单跨静定梁 .....	20	§ 6-10 换算荷载 .....	91
§ 3-2 多跨静定梁 .....	24	§ 6-11 简支梁的绝对最大弯矩 .....	94
§ 3-3 静定平面刚架 .....	28	§ 6-12 简支梁的包络图 .....	96
§ 3-4 少求或不求反力绘制弯矩图 .....	32	复习思考题 .....	98
§ 3-5 静定结构的特性 .....	34	习题 .....	98
* § 3-6 静定空间刚架 .....	36	第七章 结构位移计算 .....	103
复习思考题 .....	37	§ 7-1 概述 .....	103
习题 .....	37	§ 7-2 变形体系的虚功原理 .....	104
第四章 静定拱 .....	42	§ 7-3 位移计算的一般公式 单位荷载法 .....	107
§ 4-1 概述 .....	42	§ 7-4 静定结构在荷载作用下的位移计算 .....	109
§ 4-2 三铰拱的数解法 .....	43	§ 7-5 图乘法 .....	114
§ 4-3 三铰拱的合理拱轴线 .....	47	§ 7-6 静定结构温度变化时的位移计算 .....	118
复习思考题 .....	50	§ 7-7 静定结构支座移动时的位移计算 .....	121
习题 .....	50	§ 7-8 线弹性结构的互等定理 .....	122
		* § 7-9 空间刚架的位移计算公式 .....	124
		复习思考题 .....	125

习题	125
<b>第八章 力法</b>	131
§ 8-1 超静定结构概述	131
§ 8-2 超静定次数的确定	132
§ 8-3 力法的基本概念	133
§ 8-4 力法的典型方程	135
§ 8-5 力法的计算步骤和示例	137
§ 8-6 对称性的利用	143
§ 8-7 超静定结构的位移计算	149
§ 8-8 最后内力图的校核	150
§ 8-9 温度变化时超静定结构的计算	151
§ 8-10 支座位移时超静定结构的计算	153
§ 8-11 超静定结构的特性	157
复习思考题	158
习题	159
<b>第九章 力法应用</b>	165
§ 9-1 连续梁的基本结构	165
§ 9-2 超静定结构影响线作法概述	166
§ 9-3 连续梁的均布活载最不利位置及包络图	169
* § 9-4 交叉梁系	171
* § 9-5 超静定空间刚架	174
* § 9-6 超静定桁架及桁梁组合结构	176
§ 9-7 用弹性中心法计算无铰拱	179
§ 9-8 温度变化及支座位移时无铰拱的计算	187
§ 9-9 两铰拱及系杆拱	190
复习思考题	194
习题	194
<b>第十章 位移法</b>	198
§ 10-1 概述	198
§ 10-2 等截面直杆的转角位移方程	198
§ 10-3 位移法的基本未知量和基本结构	203
§ 10-4 位移法的典型方程及计算步骤	205
§ 10-5 直接由平衡条件建立位移法基本方程	209
§ 10-6 对称性的利用	209
* § 10-7 有侧移的斜柱刚架	212
* § 10-8 温度变化时的计算	214
复习思考题	217

习题	217
<b>第十一章 渐近法</b>	220
§ 11-1 引言	220
§ 11-2 力矩分配法的基本原理	220
§ 11-3 用力矩分配法计算连续梁和无侧移刚架	223
* § 11-4 力矩分配法与位移法的联合应用	228
§ 11-5 无剪力分配法	230
复习思考题	235
习题	235
<b>第十二章 矩阵位移法</b>	239
§ 12-1 概述	239
§ 12-2 单元刚度矩阵	239
§ 12-3 单元刚度矩阵的坐标转换	242
§ 12-4 结构的原始刚度矩阵	246
§ 12-5 支承条件的引入	251
§ 12-6 非结点荷载的处理	252
§ 12-7 矩阵位移法的计算步骤及示例	254
§ 12-8 几点补充说明	263
复习思考题	267
习题	267
<b>* 第十三章 平面刚架静力分析程序</b>	270
* § 13-1 程序的功能和算法	270
* § 13-2 程序的结构	270
* § 13-3 变量及数组	272
* § 13-4 程序的使用步骤	274
* § 13-5 源程序 PF. FOR	276
* * § 13-6 数据传递	284
* * § 13-7 输入和输出	286
* * § 13-8 总刚的形成及一维变带宽存储	287
* * § 13-9 方程组的求解	290
* * § 13-10 其余子程序简述	293
* * § 13-11 平面刚架程序的扩大应用	294
复习思考题	297
习题	297
<b>附录 上册自测题</b>	298

# 第一章 绪 论

## § 1-1 结构力学的研究对象和任务

工程中的桥梁、隧道、房屋、塔架、挡土墙、水坝等用以担负预定任务、支承荷载的建筑物，都可称为结构。

为了使结构既能安全、正常地工作，又能符合经济的要求，就需对其进行强度、刚度和稳定性的计算。这一任务是由材料力学、结构力学、弹性力学等几门课程共同来承担的。在材料力学中主要研究单个杆件的计算；结构力学则在此基础上着重研究由杆件所组成的结构；弹性力学将对杆件作更精确的分析，并将研究板、壳、块体等非杆状结构。当然，这种分工不是绝对的，各课程间常存在互相渗透的情况。

如上所述，结构力学的研究对象主要是杆件结构，其具体任务是：

(1) 研究结构在荷载等因素作用下的内力和位移的计算。在求出内力和位移之后，即可利用材料力学的方法按强度条件和刚度条件来选择或验算各杆的截面尺寸，在结构力学中一般就不再叙述。

(2) 研究结构的稳定性计算，以及动力荷载作用下结构的反应。

(3) 研究结构的组成规则和合理形式等问题。

结构力学是一门技术基础课，它一方面要用到数学、理论力学和材料力学等课程的知识，另一方面又为学习建筑结构、桥梁、隧道等课程提供必要的基本理论和计算方法。

## § 1-2 荷载的分类

荷载是作用在结构上的主动力。

荷载按作用时间的久暂，可分为恒载和活载。恒载是长期作用在结构上的不变荷载，如结构的自重、土压力等。活载是暂时作用于结构上的可变荷载，如列车、人群、风、雪等。

按荷载的作用位置是否变化，可分为固定荷载和移动荷载。恒载及某些活载（如风、雪等）在结构上的作用位置可以认为是不变动的，称为固定荷载；而有些活载如列车、汽车、吊车等是可以在结构上移动的，称为移动荷载。

根据荷载对结构所产生的动力效应大小，可分为静力荷载和动力荷载。静力荷载是指其大小、方向和位置不随时间变化或变化很缓慢的荷载，它不致使结构产生显著的加速度，因而可以略去惯性力的影响。结构的自重及其他恒载即属于静力荷载。动力荷载是指随时间迅速变化的荷载，它将引起结构振动，使结构产生不容忽视的加速度，因而必须考虑惯性力的影响。打桩机产生的冲击荷载，动力机械产生的振动荷载，风及地震产生的随机荷载等，都属于动力荷载。

除荷载外，还有其他一些因素也可以使结构产生内力或位移，例如温度变化、支座沉陷、制造误差、材料收缩以及松弛、徐变等。



### § 1-3 结构的计算简图

实际结构总是比较复杂的,要完全按照结构的实际情况进行力学分析,将是很繁难的,也是不必要的。因此,在计算之前,往往对实际结构加以简化,表现其主要特点,略去次要因素,用一个简化图形来代替实际结构。这种图形就称为结构的计算简图。简化工作通常包括三个方面:(1)荷载的简化;(2)杆件的简化;(3)支座和结点的简化。

例如一根梁两端搁在墙上,上面放一重物(图 1-1a)。简化时,梁本身用其轴线来代表。重物近似看作集中荷载,梁的自重则视为均布荷载。至于两端的反力,其分布规律是难以知道的,现假定为均匀分布,并以其作用于墙宽中点的合力来代替。考虑到支承面有摩擦,梁不能左右移动,但受热膨胀时仍可伸长,故可将其一端视为固定铰支座而另一端视为活动铰支座。这样,便得到图 1-1b 所示的计算简图。

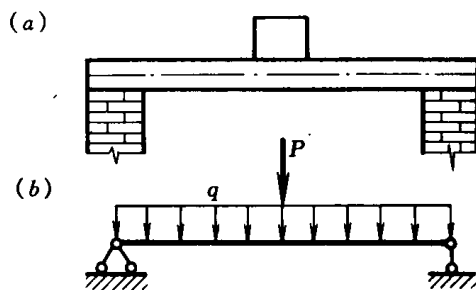


图 1-1

显然,只要梁的截面尺寸、墙宽及重物与梁的接触长度均比梁的长度小许多,则作上述简化在工程上一般是许可的。

又如图 1-2a 所示钢筋混凝土屋架,如果我们只反映桁架主要承受轴力这一特点,则计算时可采用图 1-2b 的计算简图,各杆之间的联结均假定为铰结。这虽然与实际情况不符,但可使计算大为简化,而计算结果的误差在工程上通常是容许的。如果将各杆联结处均视为刚结,则可得到较精确的计算简图(图 1-2c),但这样计算就复杂得多。有时,在初步设计中采用计算较简单但精确度不高的图形,而在最后设计中改用计算较繁但精确度较高的图形。电子计算机的应用为采用较精确的计算简图提供了更多的可能性。

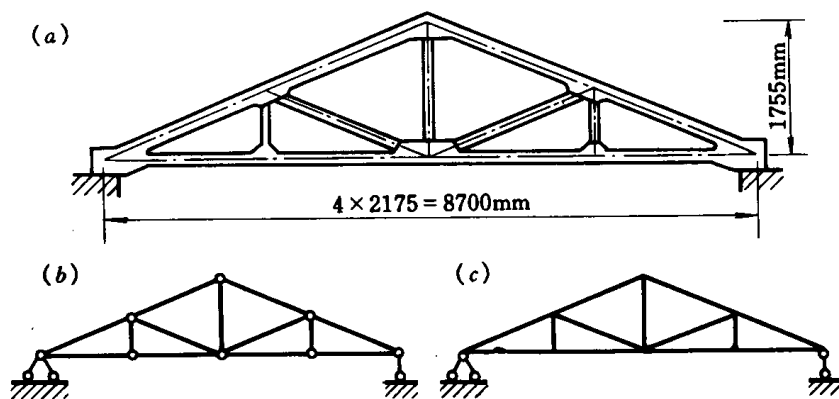


图 1-2

应该指出,确定一个结构的计算简图,特别是对于比较复杂的结构,不是一件容易的事情。它需要有一定的专业知识和实际经验,并对结构各部分的构造、相互作用和受力情况有正确的判断。有时还需借助于模型试验或现场实测才能确定合理的计算简图。

### § 1-4 支座和结点的类型

这里只讨论平面结构的支座和结点。

把结构与基础联系起来的装置称为支座。支座的构造形式很多，但在计算简图中，通常归纳为下列几种：

(1) 活动铰支座 桥梁中用的辊轴支座(图 1-3a、b)及摇轴支座(图 1-3c)即属于此种支座。它容许结构在支承处绕圆柱铰  $A$  转动和沿平行于支承平面  $m-n$  的方向移动，但  $A$  点不能沿垂直于支承面的方向移动。当不考虑摩擦力时，这种支座的反力  $R_A$  将通过铰  $A$  中心并与支承平面  $m-n$  垂直，即反力的作用点和方向都是确定的，只有它的大小是一个未知量。根据这种支座的位移和受力的特点，在计算简图中，可以用一根垂直于支承面的链杆  $AB$  来表示(图 1-3d)。此时结构可绕铰  $A$  转动；链杆又可绕铰  $B$  转动，当转动很微小时， $A$  点的移动方向可看成是平行于支承面的。

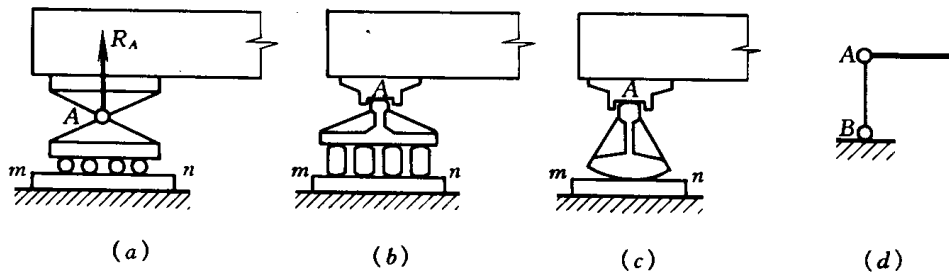


图 1-3

(2) 固定铰支座 这种支座的构造如图 1-4a、b 所示，它容许结构在支承处绕圆柱铰  $A$  转动，但  $A$  点不能作水平和竖向移动。支座反力  $R_A$  将通过铰  $A$  中心但大小和方向都是未知的，通常可用沿两个确定方向的分反力，如水平和竖向反力  $H_A$  和  $V_A$  来表示。这种支座的计算简图可用交于  $A$  点的两根支承链杆来表示，如图 1-4c 或 d。

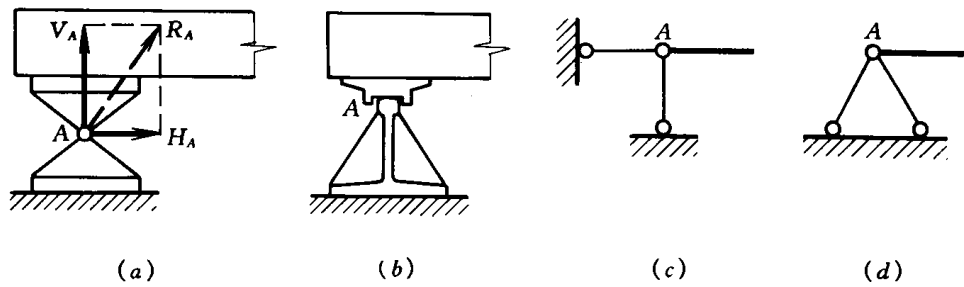


图 1-4

(3) 固定支座 这种支座不容许结构在支承处发生任何移动和转动(图 1-5a)，它的反力大小、方向和作用点位置都是未知的，通常用水平反力  $H_A$ 、竖向反力  $V_A$  和反力偶  $M_A$  来表示，计算简图如图 1-5b。

(4) 滑动支座 又称定向支座，结构在支承处不能转动，不能沿垂直于支承面的方向移动，但可沿支承面方向滑动，计算简图可用垂直于支承面的两根平行链杆表示，其反力为一个垂直于支承面(通过支承中心点)的力和一个力偶。图 1-6 为一水平滑动支座，图 1-7 为一竖向滑动支座(这种支座在实际结构中不常见，但在对称结构取一半的计算简图中，以及用机动法研究影响线等情况时会用到)。

结构中杆件相互联结处称为结点。在计算简图中，通常将结点归纳为铰结点和刚结点两种。铰结点的特征是各杆端可以绕结点中心自由转动。图 1-8a 为一木屋架的端结点构造。此

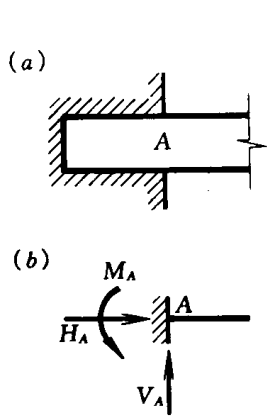


图 1-5

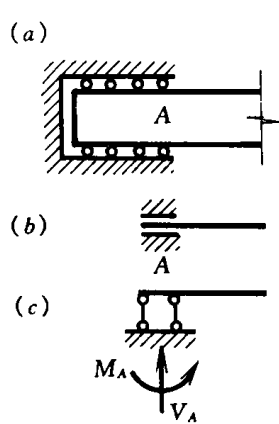


图 1-6

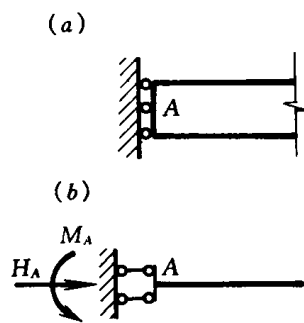


图 1-7

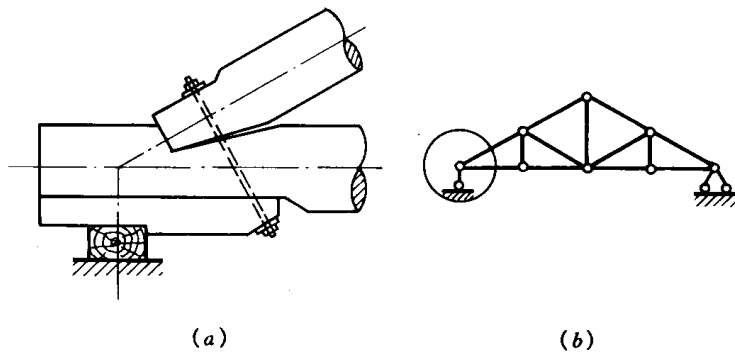


图 1-8

时各杆端虽不能绕结点任意转动，但由于联结不可能很严密牢固，因而杆件之间有微小相对转动的可能。事实上结构在荷载作用下杆件间所产生的转动也相当小，所以该结点应视为铰结点(图 1-8b)。图 1-9a 示一钢桁架的结点，该处虽然是把各杆件焊接在结点板上使各杆端不能相对转动，但在桁架中各杆主要是承受轴力，因此计算时仍常将这种结点简化为铰结点(图 1-9b)。由此所引起的误差在多数情况下是可以允许的。

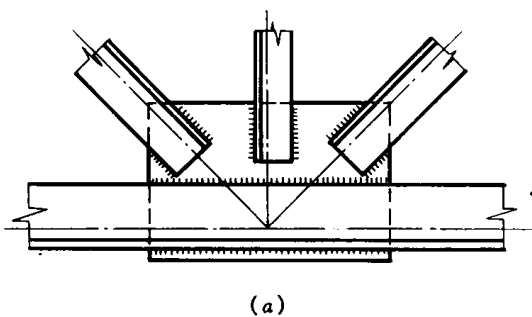


图 1-9

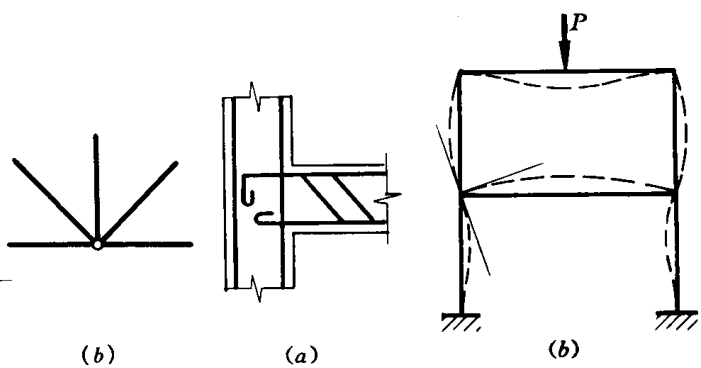


图 1-10

刚结点的特征是汇交于结点的各杆端之间不能发生任何相对转动。图 1-10a 示一钢筋混凝土刚架的结点。上、下柱和横梁在该处用混凝土浇成整体，钢筋的布置也使得各杆端能够抵抗弯矩。计算时这种结点则应视为刚结点。当结构发生变形时，汇交于刚结点各杆端的切线之间的夹角将保持不变(图 1-10b)。

## § 1-5 结构的分类

结构的类型很多,可以从不同的观点来分类。

按照几何特征,结构可分为杆件结构、薄壁结构和实体结构。杆件结构或杆系结构是由长度远大于其他两个尺度即截面的高度和宽度的杆件组成的结构。薄壁结构是指其厚度远小于其他两个尺度即长度和宽度的结构,如板(图 1-11)和壳(图 1-12)。实体结构则三个方向的尺度相近,例如水坝(图 1-13)、地基、钢球等。



图 1-11



图 1-12

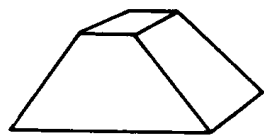


图 1-13

前已指出,结构力学研究的对象主要是杆件结构。杆件结构按其受力特性不同又可分为以下几种:

(1) 梁 梁是一种受弯杆件,其轴线通常为直线。梁有单跨的和多跨的(图 1-14)。

(2) 拱 拱的轴线为曲线且在竖向荷载作用下会产生水平反力(图 1-15),这使得拱内弯矩比跨度、荷载相同的梁的弯矩为小。

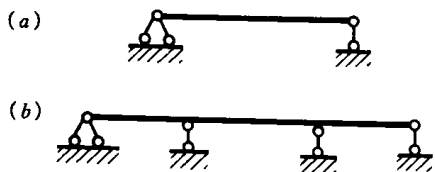


图 1-14

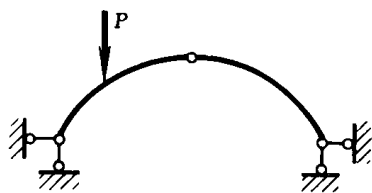


图 1-15

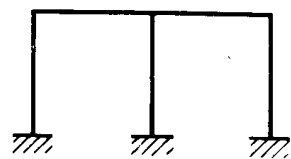


图 1-16

(3) 刚架 由直杆组成并具有刚结点(图 1-16)。

(4) 桁架 由直杆组成,但所有结点均为铰结点(图 1-17),当只受到作用于结点的集中荷载时,各杆只产生轴力。

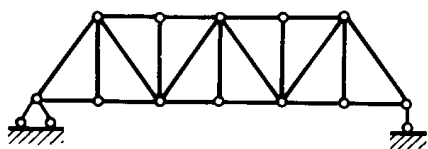


图 1-17

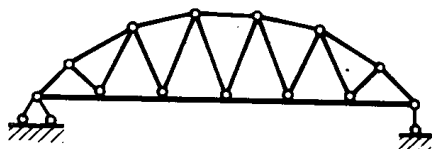


图 1-18

(5) 组合结构 这是由桁架和梁或桁架与刚架组合在一起的结构,其中有些杆件只承受轴力,另一些杆件则同时还承受弯矩和剪力(图 1-18)。

(6) 悬索结构 主要承重构件为悬挂于塔、柱上的缆索,索只受轴向拉力,可最充分地发挥钢材强度,且自重轻,可跨越很大的跨度,如悬索屋盖、悬索桥、斜拉桥(图 1-19)等。

按照杆轴线和外力的空间位置,结构可分为平面结构和空间结构。如果结构的各杆轴线

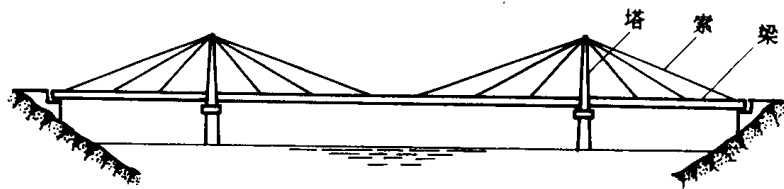


图 1-19

及外力(包括荷载和反力)均在同一平面内,则称为平面结构<sup>①</sup>,否则便是空间结构。实际上工程中的结构都是空间结构,不过在很多情况下可以简化为平面结构或近似分解为几个平面结构来计算。当然,不是所有情况都能这样处理,有些必须作为空间结构来计算,如图 1-20 所示塔架。

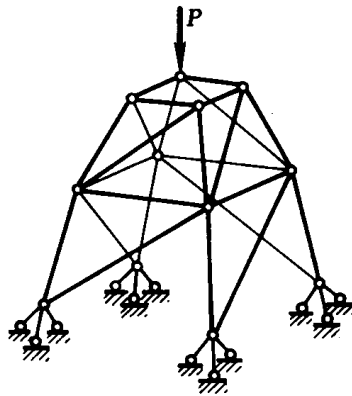


图 1-20

按照内力是否静定,结构可分为静定结构和超静定结构。这一分类在理论上具有重要意义。若在任意荷载作用下,结构的全部反力和内力都可以由静力平衡条件确定,这样的结构便称为静定结构(如图 1-14a);若只靠平衡条件还不能确定全部反力和内力,还必须考虑变形条件才能确定,这样的结构便称为超静定结构(如图 1-14b)。

<sup>①</sup> 关于平面结构的定义,更确切地说,在一般情况下(即结构同时承受轴力、弯矩和剪力作用时)应为:各杆均有一形心主惯性平面与外力在同一平面内,且各截面的弯曲中心亦在此平面内。否则将会出现扭转或斜弯曲等空间受力和变形状态。

## 第二章 平面体系的机动分析

### § 2-1 引言

杆件结构通常是由若干杆件相互联结而组成的体系，但并不是无论怎样组成都能作为工程结构使用的。例如图 2-1a 所示由两根杆件与地基组成的铰结三角形，受到任意荷载作用时，若不考虑材料的变形，则其几何形状与位置均能保持不变，这样的体系称为几何不变体系；而图 2-1b 所示铰结四边形，即使不考虑材料的变形，在很小的荷载作用下，也会发生机械运动而不能保持原有的几何形状和位置，这样的体系称为几何可变体系。一般工程结构都必须几何不变体系，而不能采用几何可变体系，否则将不能承受任意荷载而维持平衡。因此，在设计结构和选取其计算简图时，首先必须判别它是否几何不变，从而决定能否采用。这一工作就称为体系的机动分析或几何构造分析。

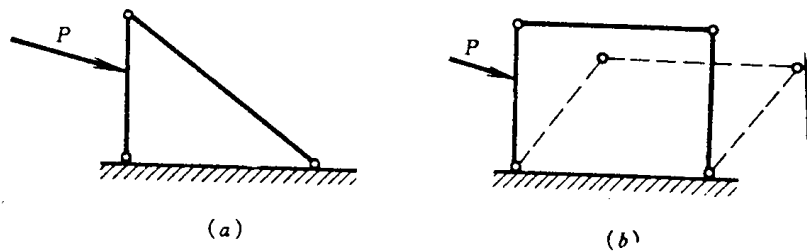


图 2-1

本章只讨论平面体系的机动分析

在机动分析中，由于不考虑材料的变形，因此可以把一根杆件或已知是几何不变的部分看作是一个刚体，在平面体系中又将刚体称为刚片。

### § 2-2 平面体系的计算自由度

判定一个体系是否几何不变，可先计算它的自由度是多少。

所谓自由度，是指物体运动时可以独立变化的几何参数的数目，也就是确定物体位置所需的独立坐标数目。例如一个点在平面内自由运动时，其位置要用两个坐标  $x$  和  $y$  来确定（图 2-2a），所以一个点的自由度等于 2。又如一个刚片在平面内自由运动时，其位置可由它上面任一点  $A$  的坐标  $x$ 、 $y$  和任一直线  $AB$  的倾角  $\varphi$  来确定（图 2-2b），因此一个刚片的自由度等于 3。

物体的自由度，将因加入限制运动的装置而减少。凡减少一个自由度的装置，称为一个联系（或约束）。常用的联系有链杆和铰。链杆本身为一刚片且只用两个端铰与其他物体相联。用一根链杆将一个刚片与地基相联（图 2-3a），因  $A$  点不能沿链杆方向移动，故刚片将只有两种运动方式： $A$  点绕  $C$  点转动；刚片绕  $A$  点转动。此时刚片的位置只需用两个参数如链杆的倾角  $\varphi_1$  及刚片上任一直线的倾角  $\varphi_2$  即可确定，其自由度由 3 减少为 2。由此可知，一根链杆

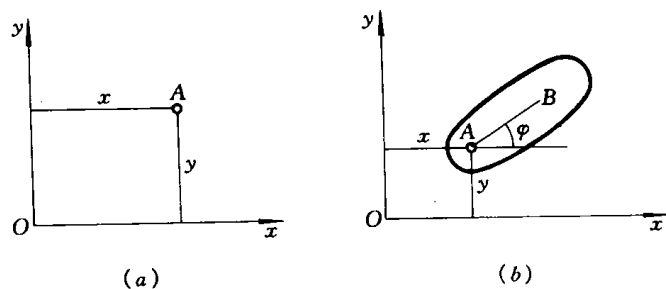


图 2-2

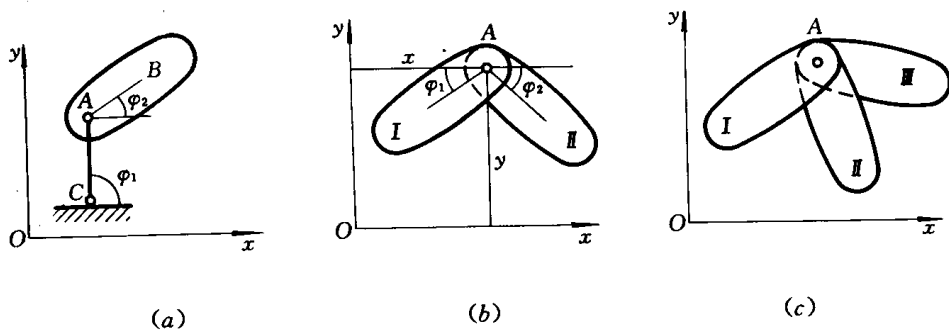


图 2-3

为一个联系。用一个圆柱铰  $A$  把两个刚片联结起来(图 2-3b), 这种联结两个刚片的铰称为单铰。在刚片  $I$  的位置由  $A$  点的坐标  $x$ 、 $y$  和倾角  $\varphi_1$  确定后, 刚片  $I$  只能绕  $A$  点转动, 其位置只需一个参数倾角  $\varphi_2$  即可确定。这样, 两个刚片总的自由度就由 6 减少为 4。可见一个单铰为两个联系, 也就是相当于两根链杆的作用。有时一个铰同时联结两个以上的刚片, 这种铰称为复铰。如图 2-3c 所示, 三个刚片共用一个铰  $A$  相联。若刚片  $I$  的位置已确定, 则刚片  $II$ 、 $III$  都只能绕  $A$  点转动, 从而各减少了两个自由度。因此, 联结三个刚片的复铰相当于两个单铰的作用。由此可推知, 联结  $n$  个刚片的复铰相当于  $(n-1)$  个单铰。

一个平面体系, 通常是由若干个刚片彼此用铰相联并用支座链杆与基础相联而组成的。设其刚片数为  $m$ , 单铰数为  $h$ , 支座链杆数为  $r$ , 则当各刚片都是自由时, 它们所具有的自由度总数为  $3m$ ; 而现在所加入的联系总数为  $(2h+r)$ , 设每个联系都使体系减少一个自由度, 则体系的自由度为

$$W = 3m - (2h + r) \quad (2-1)$$

实际上每个联系不一定都能使体系减少一个自由度, 因为这还与联系的具体布置情况有关。因此,  $W$  不一定能反映体系真实的自由度。虽然如此, 在分析体系是否几何不变时, 还是可以根据  $W$  首先判断联系的数目是否足够。为此, 把  $W$  称为体系的计算自由度。

下面举例说明  $W$  的计算。如图 2-4 所示体系, 可将除支座链杆外的各杆件均当作刚片, 其中  $CD$  与  $BD$  两杆在结点  $D$  处为刚结, 因而  $CDB$  为一连续整体, 故可作为一个刚片。这样总的刚片数  $m=8$ 。在计算单铰数  $h$  时, 应正确识别各复铰所联结的刚片数。例如在结点  $D$  处, 折算单铰数应为 2。其余各结点处的折算单铰数均在图中括号内标出。这样, 体系的单铰数共为  $h=10$ 。注意到固定支座  $A$  处有三个联系, 相当于有三根支座链杆, 故体系总的支座链杆数为  $r=4$ 。于是由式 (2-1) 可算出此体系的计算自由度为

$$W = 3m - (2h + r) = 3 \times 8 - (2 \times 10 + 4) = 0$$

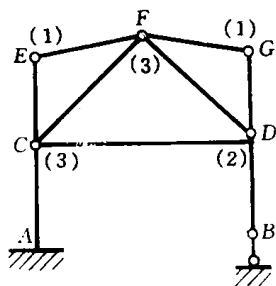


图 2-4

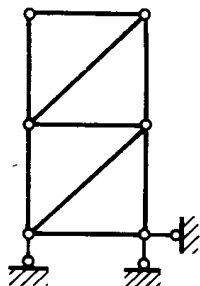


图 2-5

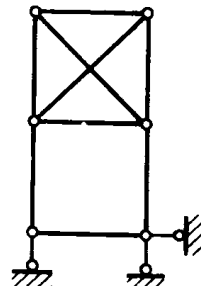


图 2-6

又如图 2-5 所示桁架，用式 (2-1) 求其计算自由度，有

$$W = 3 \times 9 - (2 \times 12 + 3) = 0$$

如图 2-5 这种完全由两端铰结的杆件所组成的体系，称为铰结链杆体系。这类体系的计算自由度，除可用式(2-1)计算外，还可用下面更简便的公式来计算。设  $j$  代表结点数， $b$  表示杆件数， $r$  为支座链杆数。若每个结点均为自由，则有  $2j$  个自由度，但联结结点的每根杆件都起一个联系的作用，故体系的计算自由度为

$$W = 2j - (b + r) \quad (2-2)$$

例如对于图 2-5 的桁架，按式(2-2)计算有

$$W = 2 \times 6 - (9 + 3) = 0$$

与上面结果相同。

任何平面体系的计算自由度，按式(2-1)或(2-2)计算的结果，将有以下三种情况：

- (1)  $W > 0$ ，表明体系缺少足够的联系，因此是几何可变的。
- (2)  $W = 0$ ，表明体系具有成为几何不变所必需的最少联系数目。
- (3)  $W < 0$ ，表明体系具有多余联系。

因此，一个几何不变体系必须满足  $W \leq 0$  的条件。

有时我们不考虑支座链杆，而只检查体系本身(或称体系内部)的几何不变性。这时，由于本身为几何不变的体系作为一个刚片在平面内尚有 3 个自由度，因此体系本身为几何不变时必须满足  $W \leq 3$  的条件。

必须指出，一个体系满足了  $W \leq 0$  (或只就体系本身  $W \leq 3$ ) 的条件，不一定就是几何不变的。因为尽管体系总的联系数目足够甚至还有多余，但若布置不当，则仍可能是几何可变的。如图 2-6 所示体系，虽然  $W = 0$ ，但其上部分有多余联系而下部分又缺少联系，因而仍然是几何可变的。因此，计算自由度  $W \leq 0$  (或只就体系本身  $W \leq 3$ )，只是几何不变的必要条件，还不是充分条件。为了判别体系是否几何不变，还须进一步研究其充分条件，即几何不变体系的合理组成规则。

### § 2-3 几何不变体系的简单组成规则

本节介绍几何不变的平面体系的几个简单组成规则。

#### 1. 三刚片规则

三个刚片用不在同一直线上的三个单铰两两铰联，组成的体系是几何不变的。



图 2-7 所示铰结三角形，每一根杆件均为一个刚片，每两个刚片间均用一个单铰相联，故称为“两两铰联”。假定刚片 I 不动（例如把 I 看成地基），则刚片 II 只能绕铰 A 转动，其上的 C 点只能在以 A 为圆心以 AC 为半径的圆弧上运动；刚片 III 只能绕铰 B 转动，其上的 C 点只能在以 B 为圆心以 BC 为半径的圆弧上运动。但是刚片 II、III 又用铰 C 相联，铰 C 不可能同时沿两个方向不同的圆弧运动，因而只能在两个圆弧的交点处固定不动。于是各刚片间不可能发生任何相对运动。因此，这样组成的体系是几何不变的。

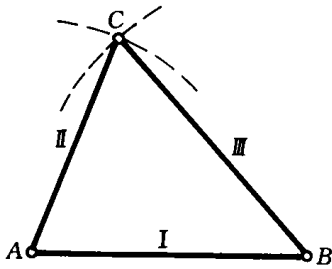


图 2-7

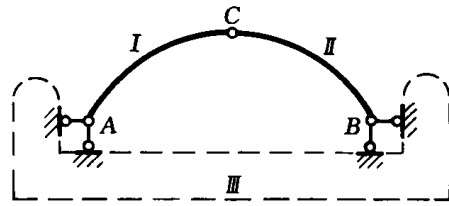


图 2-8

例如图 2-8 所示三铰拱，其左、右两半拱可作为刚片 I、II，整个地基可作为一个刚片 III，故此体系是由三个刚片用不在同一直线上的三个单铰 A、B、C 两两铰联组成的，为几何不变体系。

## 2. 二元体规则

在一个刚片上增加一个二元体，仍为几何不变体系。

图 2-9 所示体系，是按上述三刚片规则组成的。但如果把三个刚片中的一个作为刚片，而把另外两个看作是链杆，则此体系又可以认为是这样组成的：在一个刚片上增加两根链杆，此两杆不在一直线上，两杆的另一端又用铰相联。这种两根不在一直线上的链杆联结一个新结点的构造称为二元体。显然，在一个刚片上增添一个二元体仍为几何不变体系，因为这与上述三刚片规则实际上相同。只是在分析某些体系特别是桁架时，用二元体规则更为方便，所以把它单独列为一则。

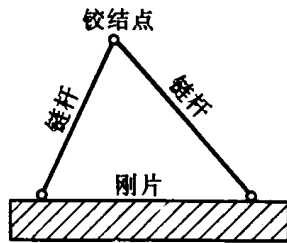


图 2-9

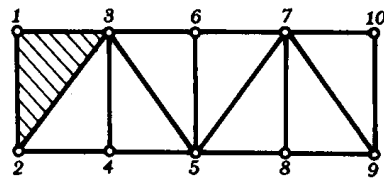


图 2-10

例如分析图 2-10 所示桁架时，可任选一铰结三角形例如 123 为基础，增加一个二元体得结点 4，从而得到几何不变体系 1234；再以其为基础，增加一个二元体得结点 5，…如此依次增添二元体而最后组成该桁架，故知它是一个几何不变体系。

此外，也可以反过来，用拆除二元体的方法来分析。因为从一个体系拆除一个二元体后，所剩下的部分若是几何不变的，则原来的体系必定也是几何不变的。现从结点 10 开始拆除一个二元体，然后依次拆除结点 9、8、7、…，最后剩下铰结三角形 123，它是几何不变的，故知原体系亦为几何不变的。