代数几何

〔美〕R. 哈茨霍恩 著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助出版

代数几何

〔美〕R. 哈茨霍恩 著

冯克勤　刘木兰　胥鸣伟 译

胥鸣伟 校

科学出版社

1 9 9 4

（京）新登字092号

内 容 简 介

本书使用概型和上同调等现代的数学方法讲述代数几何学．第一章给出代数簇的基本概念和大量例子，第二、三章讨论概型和上同调方法，最后两章研究代数曲线和代数曲面．

本书可供数学工作者(特别是代数、拓扑、几何学工作者)、理论物理和系统理论工作者使用，也可供数学系研究生、高年级学生阅读．

Robin Hartshorne

Algebraic Geometry

Springer-Verlag, New York Inc. 1977

代 数 几 何

〔美〕 R. 哈茨霍恩 著

冯克勤 刘木兰 胥鸣伟 译

胥鸣伟 校

责任编辑 朴玉芬 刘嘉善

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994年2月第一版 开本：850×1168 1/32

1994年2月第一次印刷 印张：18 5/8

印数：1—1 000 字数：493 000

ISBN 7-03-002970-4/O·551

定价 19.50 元

前　　言

本书使用概型和上同调方法讲述抽象代数几何学，主要研究对象是代数闭域上仿射空间或射影空间中的代数簇．在第一章中给出一些基本概念和例子，然后在第二章和第三章中讨论概型和上同调方法．我们不打算过分地追求一般化，而是着重于方法的应用．本书最后两章(第四章与第五章)运用这些方法研究代数曲线和曲面的经典理论中的课题．

对于代数几何的这种讲法，所需要的预备知识是交换代数的结果与某些初等拓扑学的知识．关于交换代数我们只叙述那些需要用到的结果,而不需要复分析或微分几何的知识．全书共有400多个习题,它们不仅提供了许多特殊的例子,而且也介绍了正文中未涉及的一些更专门的课题．书后三个附录简要地介绍了当前的一些研究领域．

本书可作为代数几何基础课程的教材在研究生的抽象代数基础课之后讲授．我最近在伯克利用五个学期教过这些内容，基本上每学期讲一章．第一章也可作为一个短课单独地讲授．另一种值得考虑的教学方法是：讲完第一章之后立即讲第四章，只需要知道第二章和第三章的少数定义,并且承认关于曲线的 Riemann-Roch 定理即可．这使我们可很快学到有趣的材料，而且回过头来再认真学习第二章和第三章的时候，有了更多的直观背景．

读过本书所涉及的材料之后，就可以进一步去读更高深的著作,如 Grothendieck[EGA],[SGA],Hartshorne[5],Mumford[2,5]或 Shafarevich[1]．

在写这本书的过程中，我试图介绍对于代数几何基础课程来说是最本质的那些材料．我希望能使外行人容易理解数学的这一领域,它的结果至今还分散在各处,只是用未发表的“民间传说”将

这些材料连接起来. 我重新组织了这些材料并改写了证明，于是这本书大体成了我从我的老师、同事和学生那里学来的知识的综合体. 他们对我的帮助太多以至我无法一一列举. 我要特别感谢 Oscar Zariski, J. -P. Serre, David Mumford 和 Arthur Ogus 的支持和鼓励.

本书中的"经典"材料需要历史学家来追寻它们的起源. 除此之外的材料,我要特别感谢 A. Grothendieck. 他的巨著 [EGA] 是概型和上同调理论的权威性参考文献. 在整个第二章和第三章中,对于他的结果均没有作特别声明. 至于其他的结果,只要我知道，都设法注明所讲材料的来源.

在写本书的过程中,我曾将初稿寄给许多人,并从他们那里得到了有价值的评论意见.在这里我向他们表示谢意,特别要感谢 J. -P. Serre, H. Matsumura 和 Joe Lipman，他们仔细阅读书稿并提出了详细的建议.

我在哈佛和伯克利教过这些材料，我感谢参加听课并提出富有启发性问题的那些研究生.

我还要感谢 Richard Bassein,他将他那数学家和艺术家的才能融为一体,为本书绘制了插图.

几句话是不能表达出我对妻子 Edie Churchill Hartshorne 的谢意. 当我埋头写书的时候，她为我和我们的儿子 Jonathan 和 Benjamin 创造了温暖的家庭，她那永恒的支持和友谊使我的生活更富有人情味.

我感谢日本京都大学数学研究院、美国国家科学基金会和加州大学伯克利分校,在我准备本书期间,他们提供了经济资助.

R. 哈茨霍恩

1977 年 8 月 29 日

加里福尼亚州，伯克利

目　录

引　论

任何人若想写一本关于代数几何的引论性著作，都会面临一个艰难的任务：它既要提供几何的洞察力和例子，同时又要阐明这一学科的现代专用术语．这是因为在代数几何中，构成起点的直观思想和当前研究中采用的专门方法之间有一条鸿沟．

第一个问题是语言问题．代数几何过去的发展是波浪式的，每次发展都有它自己的语言和观点．从十九世纪末期的文献，我们可以看到 Riemann 的函数论方法、Brill 和 Noether 偏重于几何的方法、Kronecker, Dedekind, Weber 的纯代数方法和以 Castelnuovo, Enriques 和 Severi 为代表的意大利学派在代数曲面分类方面积累的大量材料．到了 20 世纪，以周炜良、Weil 和 Zariski 为代表的"美国学派"对意大利人的直观思想给予了坚实的代数基础．最近，Serre 和 Grothendieck 创立了法国学派，他们用概型和上同调语言重新叙述了代数几何基础，从而在以新的技术解决古老问题方面有着令人印象深刻的记录．这些学派中的每一个都引进了新的概念和方法．在写一本引论性书籍的时候，究竟是使用接近于几何直观的古老语言好，还是从一开始就采用当前研究中使用的术语好？

第二个问题是概念性问题．现代数学具有忽视历史的倾向，每个新学派都以自己的语言重写其数学分支的基础部分，这在逻辑上是一种改良，但是教起来则更为困难．如果一个人不知道代数数域的整数环、代数曲线和紧黎曼面均是"一维正则概型"的例子，那么既使知道概型的定义又有什么用呢？一本引论性书籍的作者怎样才能够既指明数论、交换代数和复分析对代数几何的推动作用，又向读者介绍主要研究对象——仿射空间或射影空间中的代数簇，同时还采用概型和上同调这些现代语言？选择什么课题才既

能表达出代数几何的意义又能作为进一步学习和研究的坚实基础呢？

我自己比较偏向于古典几何方面.我相信，代数几何的最重要问题都是从仿射空间或射影空间古老形式的代数簇产生出来的，它们提供了几何上的直觉性，由此推动了整体进一步的发展．在本书中我开始先用一章谈代数簇，给出许多例子，并抛开技术性的细节，以最简单的形式叙述一些基本思想．在这以后我才在第二章和第三章中系统地采用概型、凝聚层和上同调语言，这两章构成本书的技术核心．在这里我试图放进所有最重要的结果，但并不竭力追求其最一般化的叙述．例如，我们只对 Noether 概型的拟凝聚层讲述上同调理论，因为这较为简单，并且对多数应用来说这已经够了．又如，“正象层的凝聚性”定理只对射影态射加以证明，而不是对任意本征态射加以证明的．基于同样的理由，我没有讲述可表示函子、代数空间、平展上同调、sites 和 topoi 这些更为抽象的概念．

第四章和第五章讲述古典材料，即非异射影曲线和曲面，但是采用概型和上同调技巧，我希望这些应用会使人感到为了吸收前两章的全部专业内容而作出的努力是值得的．

我采用交换代数作为代数几何的基本语言和逻辑基础，它的益处是精确．此外，在数论中的应用总要迫使我们在任意特征的基域上处理问题，这使我们对复数基域 **C** 上的古典理论赋予新的观点．几年前，当 Zariski 开始准备写一卷代数几何的时候，他必须一边写一边发展他所需要的代数知识，这项任务不断增长，以至于他写出了专门讲交换代数的一本书．所幸的是，现在我们已有不少关于交换代数的优秀著作：Atiyah-Macdonald[1]，Bourbaki[1]，Matsumura[2]，Nagata[7] 和 Zariski-Samuel[1]．我所采取的办法是引述所需要的纯代数结果，关于这些结果的证明则指出参考文献，本书末尾列出所用到的全部代数结果的一览表．

我原来打算写一系列附录，对当前许多研究领域作简短的综述，从而在本书正文和研究文献之间起到桥梁性作用．可是由于时

间和篇幅所限，只保留下三个附录，对于没能包含其他附录我只能表示歉意，并建议读者参看 Arcata 文集（Hartshorne 编[1]），它收集了许多专家为外行人所写的关于各自领域的一系列文章。此外，关于代数几何的历史发展我向大家推荐 Dieudonné[1]。由于这里没有篇幅来探讨代数几何与我比较喜爱的那些相邻领域之间的联系，我建议参看 Cassels[1] 的综述文章（与数论的联系）和 Shafarevich [2，第 III 部分]（与复流形和拓扑的联系）。

我非常赞成积极的教学方式，所以本书包含了大量的习题。其中一些习题是正文中没能讲述的重要结果，而另一些习题则是用来说明一般现象的专门性的例子。我认为，研究一些特例与发展一般理论是不可分割的。用功的学生应当尽可能多地作这些习题，但也不应希望立刻就能解决这些习题。许多习题需要真正创造性的努力去理解它们，比较困难的习题均加上一个星号，而两个星号则表示这是一个未解决的问题。

第一章第 8 节对于代数几何与本书内容作了进一步的介绍。

术语

本书采用的术语绝大多数与常用术语一致，但也有少数例外，值得在这里注明。一个代数簇始终指的是不可约的，并且总是在代数闭域上的代数簇。在第一章中所有代数簇都是拟射影代数簇，而在第二章第 4 节中我们扩大了定义以包含抽象代数簇，这就是代数封闭域上的整的可分有限型概型。曲线、曲面、立体这些词分别用来表示 1，2，3 维代数簇。但是在第四章，曲线一词只表示非异射影曲线，而在第五章中曲线则是非异射影曲面上的一个有效除子。在第五章中曲面始终指的是非异射影曲面。

这里的概型在［EGA］第一版中叫作准概型（prescheme），但是在［EGA］新版（第一章）中改称概型。

本书中射影态射和极强可逆层的定义与［EGA］中的相应定义是不等价的，见第二章第 4 节和第 5 节。我们的定义在技术上较为简单，但缺点是对基概型不是局部的。

非异一词只用于代数簇，而对于更一般的概型则用正则和光滑这些词。

代数结果

我假定读者熟悉关于环、理想、模、Noether 环和整性相关方面的基本结果，并且假定读者愿意接受或者查阅交换代数或同调代数的其他结果，这些结果只要是需要的均加以叙述并给出参考文献。这些结果标以记号 A (例如：定理 3.9A)用来区别于正文中给出证明的那些结果。

下面是一些基本的约定：环均指的是含 1 的交换环，环的同态均将 1 映成1。在整环或域中，$1\neq 0$。素理想(或极大理想)指的是环 A 中理想 $\mathfrak{p}$，使得商环 $A/\mathfrak{p}$ 为整环(或域)。因此，环自身不看作是它的素理想或极大理想。

环 A 中的乘法集合是指 A 的一个对乘法封闭的子集并且包含 1。局部化 $S^{-1}A$ 定义为由分式 $a/s(a\in A,\ s\in S)$ 的等价类而形成的环，其中 a/s 和 a'/s' 等价是指存在 $s''\in S$ 使得 $s''(s'a-sa')=0$ (例如可参见 Atiyah-Macdonald [1,第三章])。下面是经常使用的两种特别情形。如果 $\mathfrak{p}$ 是环 A 的素理想，则 $S=A-\mathfrak{p}$ 为乘法集合，而相应的局部化表示成 $A_{\mathfrak{p}}$。如果 $f\in A$，则 $S=\{f^n|n\geqslant 1\}\cup\{1\}$ 是乘法集合，而相应的局部化表示成 A_f。(例如若 f 为幂零元素，则 A_f 是零环。)

引用记号

引用文献先写明文献作者，再用方括号中的数字指出是该作者的哪个著作，例如 Serre[3, p.75]。引用同一章中的定理，命题和引理则用圆括号中的数字，例如(3.5)。引用习题表成(习题 3.5)。引用其他章的结果，前面冠以第几章，例如(第二章，3.5)或者(第二章，习题 3.5)。

第一章 代 数 簇

本章的目的是使用尽可能少的工具对代数几何作一介绍. 我们将在一个固定的代数闭域 k 上进行叙述. 我们定义主要研究对象——仿射空间或射影空间中的代数簇,介绍一些最重要的概念,如维数、正则函数、有理映射、非异代数簇和射影代数簇的次数.最重要的是: 我们在每节末尾以习题形式给出许多专门的例子. 选择这些例子是为了说明正文未能提到的许多有趣和重要的现象. 如果你仔细地研究了这些例子, 你就不仅能很好地理解代数几何的基本概念, 而且还为领会现代代数几何某些更抽象的发展建立了基础和背景, 同时也具有了检验你直觉能力的一个来源. 在本书的其余部分,我们将不断地参考这些例子.

本章最后一节对本书作进一步的介绍, 其中讨论了"分类问题",这个问题大大推动了代数几何的发展. 这一节还讨论了代数几何的基础应该扩充到的广度, 正是这个提供了概型理论发展的动力.

1. 仿射代数簇

设 k 为固定的代数闭域,我们定义 k 上 n 维仿射空间 $\mathbf{A}_k^n$(或简记为 $\mathbf{A}^n$)为元素属于 k 的全部 n 元组构成的集合.元素 $P \in \mathbf{A}^n$ 叫作点,如果 $P=(a_1,\cdots,a_n)$,$a_i \in k$,则 a_i 叫作 P 的坐标.

设 $A=k[x_1,\cdots,x_n]$ 是 k 上 n 个变量的多项式环. 我们把 A 中元素看成是 n 维仿射空间到 k 的函数,定义为 $f(P)=f(a_1,\cdots,a_n)$,其中 $f \in A$,$P \in \mathbf{A}^n$. 因此若 $f \in A$ 是多项式,我们可以讨论 f 的零点集合,即 $Z(f)=\{P \in \mathbf{A}^n \mid f(P)=0\}$. 更一般地,如果 T 是 A 的任一子集合, 我们定义 T 的零点集合为 T 中所有元

素的公共零点的全体，即

$$Z(T)=\{P\in\mathbf{A}^n \mid f(P)=0,\text{对所有 } f\in T\}.$$

如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 中由 T 生成的理想，显然 $Z(T)=Z(\mathfrak{a})$. 进而，由于 A 是 Noether 环，每个理想 $\mathfrak{a}$ 均有有限的生成元集合 $f_1,\cdots,f_r$. 从而 $Z(T)$ 可表示成有限个多项式 $f_1,\cdots,f_r$ 的公共零点集合。

定义 $\mathbf{A}^n$ 的子集合 Y 称作代数集合，是指存在子集合 $T\subseteq A$，使得 $Y=Z(T)$.

命题 1.1 两个代数集合的并集是代数集合. 任意多个代数集合的交集是代数集合. 空集和整个空间 $\mathbf{A}^n$ 都是代数集合.

证明 如果 $Y_1=Z(T_1),Y_2=Z(T_2)$，则 $Y_1\cup Y_2=Z(T_1T_2)$，其中 T_1T_2 表示 T_1 中元与 T_2 中元所有乘积的集合. 事实上，如果 $P\in Y_1\cup Y_2$，则或者 $P\in Y_1$ 或者 $P\in Y_2$，则 p 是 T_1T_2 中每个多项式的零点；反之，如果 $P\in Z(T_1T_2)$ 而 $P\notin Y_1$，则存在 $f\in T_1$ 使得 $f(P)\neq 0$. 现在对每个 $g\in T_2$，$(fg)(P)=0$，从而 $g(P)=0$. 于是 $P\in Y_2$.

如果 $Y_\alpha=Z(T_\alpha)$是任意一族代数集合，则$\cap Y_\alpha=Z\left(\bigcup_\alpha T_\alpha\right)$，从而 $\cap Y_\alpha$ 是代数集合. 最后，$\phi=Z(1)$，而整个空间 $\mathbf{A}^n=Z(0)$.

定义 取所有代数集合的补集为 $\mathbf{A}^n$ 的开集. 这是 $\mathbf{A}^n$ 的一个拓扑，因为根据上述命题，两个开集的交是开集，任意多个开集的并是开集，最后，空集和整个空间均是开集. 我们称 $\mathbf{A}^n$ 的这个拓扑为 Zariski 拓扑.

例 1.1.1 考虑仿射直线 $\mathbf{A}^1$ 上的 Zariski 拓扑. 由于 $A=k[x]$ 中每个理想均是主理想，从而每个代数集合均是单个多项式的零点集合. 因为 k 为代数闭域，每个非零多项式均可写为 $f(x)=c(x-a_1)\cdots(x-a_n)$，其中 $c,a_1,\cdots,a_n\in k$. 于是 $Z(f)=\{a_1,\cdots,a_n\}$. 因此，$\mathbf{A}^1$ 中代数集合不过是全部有限子集合（包括空集）以及整个空间（对应于 $f=0$）. 而开集即是全体有限子集合

的补集以及空集合，特别值得注意的是，这个拓扑不是 Hausdorft 拓扑.

定义 拓扑空间X的非空子集Y叫作不可约的，是指它不能表示成 $Y=Y_1\cup Y_2$，其中 Y_1 和 Y_2 均是Y的真子集并且在Y中闭。空集不看作是不可约的.

例 1.1 2 $\mathbf{A}^1$ 是不可约的，因为由k的代数封闭性知 $\mathbf{A}^1=k$ 是无限集，而它的每个真闭子集都是有限集合.

例 1.1.3 不可约空间的每个非空开集都是不可约的稠子集.

例 1.1.4 如果Y是X的不可约子集，则它在X中的闭包 $\bar{Y}$ 也不可约.

定义 $\mathbf{A}^n$ 中每个不可约闭子集(加上其诱导拓扑)叫作仿射代数簇(或简称仿射簇). 仿射簇的开子集叫作拟仿射簇.

这些仿射簇和拟仿射簇是我们第一批研究对象. 但是在我们作进一步研究之前，甚至在我们给出有意义的例子之前，我们需要展示 $\mathbf{A}^n$ 的子集与A中理想之间更深刻的联系. 对每个子集 $Y\subseteq\mathbf{A}^n$，定义Y在A中的理想为

$$I(Y)=\{f\in A\mid f(P)=0,\ \text{对所有}\ P\in Y\},$$

于是我们有函数Z将A的子集映成代数集合，又有函数I将 $\mathbf{A}^n$ 的子集映成理想. 下面的命题综合了这两个函数的性质.

命题 1.2 (a) 如果 $T_1\subseteq T_2$ 是A的两个子集，则 $Z(T_1)\supseteq Z(T_2)$.

(b) 如果 $Y_1\subseteq Y_2$ 是 $\mathbf{A}^n$ 的两个子集，则 $I(Y_1)\supseteq I(Y_2)$.

(c) 对于 $\mathbf{A}^n$ 的任意两个子集 Y_1 和 Y_2，均有 $I(Y_1\cup Y_2)=I(Y_1)\cap I(Y_2)$.

(d) 对于每个理想 $\mathfrak{a}\subseteq A$，$I(Z(\mathfrak{a}))=\sqrt{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a}$ 的根).

(e) 对于每个子集 $Y\subseteq\mathbf{A}^n$，$Z(I(Y))=\bar{Y}$ (Y 的闭包).

证明 (a),(b) 和 (c) 是显然的. (d) 是下面叙述的 Hilbert零点定理的直接推论，因为 $\mathfrak{a}$ 的根定义为

$$\sqrt{\mathfrak{a}}=\{f\in A\mid \text{存在某个}\ r\geqslant 1,\text{使得}f^r\in\mathfrak{a}\}.$$

为了证明 (e)，我们注意 $Y\subseteq Z(I(Y))$，而右边为闭集，从而 $\bar{Y}\subseteq Z(I(Y))$. 另一方面，设W为任一包含Y的闭集，则 $W=Z(\mathfrak{a})$ (对某个理想 $\mathfrak{a}$). 于是 $Z(\mathfrak{a})\supseteq Y$，而由 (b) 则有 $IZ(\mathfrak{a})\subseteq I(Y)$. 但是显然 $\mathfrak{a}\subseteq IZ(\mathfrak{a})$，从而由 (a) 又知 $W=Z(\mathfrak{a})\supseteq ZI(Y)$. 因此 $ZI(Y)=\bar{Y}$.

定理 1.3A (Hilbert 零点定理) 设 k 是代数闭域，$\mathfrak{a}$ 为 $A=k[x_1,\cdots,x_n]$ 中的理想，$f\in A$ 为多项式，$Z(\mathfrak{a})$ 的所有点均是 f 的零点，则存在某个整数 $r>0$，使得 $f^r\in\mathfrak{a}$.

证明 Lang[2,p.256]，或者 Atiyah-Macdonald [1, p.85]，或者 Zariski-Samuel[1,第 2 卷，p.164].

系 1.4 在 $\mathbf{A}^n$ 的代数集合和A的根式理想(即满足 $\mathfrak{a}=\sqrt{\mathfrak{a}}$ 的理想 $\mathfrak{a}$) 之间存在如下的一一对应：$Y\longmapsto I(Y)$，$\mathfrak{a}\longmapsto Z(\mathfrak{a})$. 此外，代数集合是不可约的，当且仅当它的理想是素理想.

证明 只需证明最后部分.如果Y不可约，我们证明 $I(Y)$ 是素理想. 事实上，如果 $fg\in I(Y)$，则 $Y\subseteq Z(fg)=Z(f)\cup Z(g)$. 于是 $Y=(Y\cap Z(f))\cup(Y\cap Z(g))$，右边两项均是$Y$的闭子集. 因为$Y$是不可约的，从而 $Y=Y\cap Z(f)$，即 $Y\subseteq Z(f)$，或者 $Y\subseteq Z(g)$. 即 $f\in I(Y)$，或者 $g\in I(Y)$.

反之，设 $\mathfrak{p}$ 是素理想，如果 $Z(\mathfrak{p})=Y_1\cup Y_2$，则 $\mathfrak{p}=I(Y_1)\cap I(Y_2)$，从而 $\mathfrak{p}=I(Y_1)$ 或者 $\mathfrak{p}=I(Y_2)$. 因此 $Z(\mathfrak{p})=Y_1$ 或者 Y_2，即 $Z(\mathfrak{p})$ 是不可约的.

例 1.4.1 $\mathbf{A}^n$ 是不可约的，因为它对应于A中的零理想，而零理想是素理想.

例 1.4.2 设 f 是 $A=k[x,y]$ 中不可约多项式. 由于A是唯一因子分解整环，从而 f 生成A中的素理想，于是零点集合 $Y=Z(f)$ 是不可约的. 我们将Y叫作由方程 $f(x,y)=0$ 定义的仿射曲线. 如果 f 是 d 次多项式，则称Y为 d 次曲线.

例 1.4.3 更一般地，设 f 为 $A=k[x_1,\cdots,x_n]$ 中不可约多项式，则得到仿射簇 $Y=Z(f)$，当 $n=3$ 时叫做曲面，而 $n>3$ 时叫做超曲面.

例 1.4.4 $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ 的极大理想 m 对应于 $\mathbf{A}^n$ 中极小不可约闭子集，而后者必然是一点 $P = (a_1, \cdots, a_n)$. 这表明 A 中每个极大理想均有形式 $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$，其中 $a_1, \cdots, a_n \in k$.

例 1.4.5 如果 k 不是代数封闭的，这些结果不再成立. 例如取 $k = \mathbf{R}$，曲线 $x^2 + y^2 + 1 = 0$ 在 $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ 中没有点. 从而(1.2d)不再成立. 还参见习题 1.12.

定义 如果 $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ 是仿射代数集合，我们把 $A/I(Y)$ 叫做 Y 的仿射坐标环，表示成 $A(Y)$.

注 1.4.6 如果 Y 是仿射簇，则 $A(Y)$ 为整环. 此外，$A(Y)$ 是有限生成 k 代数. 反之，每个有限生成 k 代数 B 如果也是整环，则它必是某个仿射簇的仿射坐标环. 事实上，$B = A/\mathfrak{a}$，其中 $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ 是多项式环，而 $\mathfrak{a}$ 为 A 的某个理想，取 $Y = Z(\mathfrak{a})$ 即可.

接下来我们研究代数簇的拓扑. 为此需要引进一类重要的拓扑空间，它们包含所有代数簇.

定义 拓扑空间 X 称作是 Noether 的，是指它满足闭集降链条件：对每个闭集序列 $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$，存在整数 r，使得 $Y_r = Y_{r+1} = \cdots$.

例 1.4.7 $\mathbf{A}^n$ 是 Noether 拓扑空间. 因为若 $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$ 是闭集降链，则 $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \cdots$ 是 $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ 的理想升链. 由于 A 是 Noether 环，这个理想链是稳定的. 但是对每个 i，$Y_i = Z(I(Y_i))$，于是链 $\{Y_i\}$ 也是稳定的.

命题 1.5 在 Noether 拓扑空间 X 中，每个非空闭集 Y 均可表示成有限个不可约闭集的并：$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$，如果再要求 $Y_i \not\supseteq Y_j$（只要 $i \neq j$），则这些 $\{Y_i\}$ 是唯一决定的. 它们叫做 Y 的不可约分支.

证明 先证 Y 的这种表达式的存在性. 令 $\mathfrak{S}$ 为 X 中不能写成有限个不可约闭子集并的非空闭子集的集合. 如果 $\mathfrak{S}$ 非空，由于 X 是 Noether 的，从而 $\mathfrak{S}$ 必包含极小元 Y. 于是由 $\mathfrak{S}$ 的定