

学生课外读物



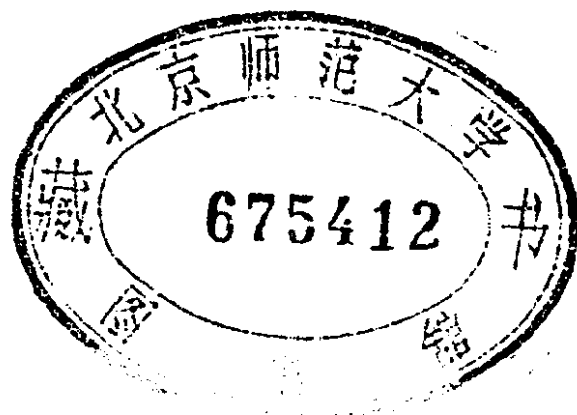
$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

极值巧解

极 值 巧 解

傅 钟 鹏

JY/172/17



辽宁人民出版社

一九八〇年·沈阳

数 巧 解

傅 作 鹏

辽宁人民出版社出版

(沈阳市南京街6段1里2号)

辽宁省新华书店发行

朝阳六六七厂印刷

开本: 787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张: 6 $\frac{1}{4}$

字数: 101,000 印数: 1—270,000

1980年3月第1版 1980年3月第1次印刷

统一书号: 7090·74 定价: 0.45元

541172/17

写在前面

至今，我还记得少年时代的一桩往事：

我开始进城上中学了。离家不远就有一条虽不太宽，但却能跑汽车的公路，直通城里。可是我从来也不走那条通衢大道，我的叔爷、伯伯们进城也都不走那条路。

每天清晨，我挎着书包轻快地走过长满青草的田埂时，脚脖子上下免不了被朝露沾得湿漉漉。是为了享受大自然的滋润吗？不是的，经验告诉我，走这条田间小路比走公路要近得多。

秋天——收获的季节，进城的路程更短了，因为稻田地里空荡荡，这时可以不走田埂，而直接穿过田地，从这角走向对角。

人们不知不觉地踩出一条最短的路线，我也就日复一日地重踏着别人的足迹行进。

久而久之，我的脑子里出现疑问：最短的路线是怎样形成的？

后来，我从课堂上学到了走怎么样的路线能使两

点之间的距离最短，才知道，原来这就是最初级的极值问题！在生活上，我还遇到许许多多更加复杂的极值问题，它们常常激起我的浓厚兴趣。

参加工作后，作为一名工程技术人员，我更与极值问题解不开缘分了，譬如说：怎样用最省的材料来设计一个效能最高的结构物？采取什么方案可运送最多的物资而运输费用最少等等。

极值问题几乎牵涉到所有初等数学的范畴，有时还可以应用物理学的方法解答，本书都尽量做出必要的介绍。同时，力图提供一些比较灵活的解题方法，例如应用定和求积原理、定积求和原理、某些不等式等，用这些方法有时要比用高等数学的方法简便得多。

当然，还有一些更加复杂的极值问题，用初等数学的方法难以解决。不过，那就超出本书所要讲的范围了。

极值问题是有趣和耐人寻味的，钻进去，其妙无穷。笔者愿与同学们一道，继续探索和发掘它的奥秘，运用它更好地为四个现代化服务。

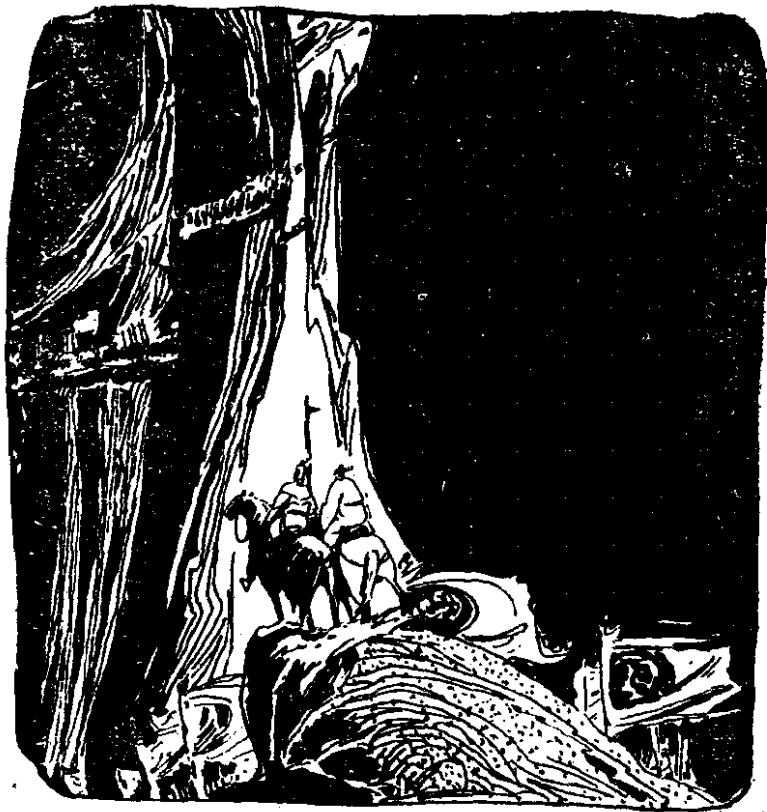
傅 钟 鹏

一九七九年四月于鞍钢

目 录

写在前面	
序 幕	1
走最近的路	4
鸿 雁	10
等角特征	13
奇妙的音乐厅	18
怎样定这条路线?	21
韩信点兵	25
几何解法	28
千里之行, 始于足下	38
工地的早晨	42
誓鸟的心愿	46
似曾相识	50
找不到这样的数	56
亥洛没有想到的问题	63

弦图——一枝数学名花	69
定积求和原理	74
这样下料合适吗?	82
一个重要的不等式	85
远离地球的地方	95
从一幅图画讲起	103
静静的小河	113
边 界	119
尺蠖的启示	122
两个亲密的伙伴	126
顶 峰	131
条件极值	133
平 衡	141
光行最速	149
殊途同归	154
萌 芽	160
尾 声	168



序 幕

宁静的山区被嘈杂的脚步声和马蹄声搅乱了。

一批人马过去了，接着又是一批，前头已经不见踪影，后尾还没有出现，茫茫的迷雾，滚滚的人流，何处才是尽头呢？

刘邦怀着忿恨不平的情绪带领队伍离开关中，向自己的封地汉中进发了。他木然地不动声色，让坐骑随意信步向前，不时回头看看这支象长蛇一样蠕动的队伍，并深深地叹了口气。

迎面展现一座万仞高山。要开始翻山越岭了，他传令安顿队伍，埋锅造饭，自己也找个石礅坐了下来。

无休止的烦恼在脑际纠缠着。黯淡的前景，贫瘠的巴蜀地区，项羽那副骄横自大、不可一世的面孔……，这一切，都是那么令人心灰意冷！

当初，当初怎么样呢？大家不是约定好，先入关中的为王吗？是自己首先进入关中，消灭了秦王朝最后的抵抗者，而蛮横的项羽却把这纸文约撕得粉碎。

“主公，前程似锦呢，干嘛总是唉声叹气的？”一直跟随在他身边的军师张良打破窒息的沉默，发了话。

叹息代替了回答。

“主公，我就送您到这儿。此去都城南郑还有三百多里路，全是栈道，我看，人马过去后就把它烧毁了吧！”

刘邦瞪了张良一眼，似乎在说：“这是出的什么‘好’主意啊！”

只见张良微笑着伸出两个手指头，不慌不忙地说出一席话来：

“烧毁栈道的作用有两点。第一，各路诸侯不能来进犯我们；第二，项羽知道我们没有东进的意图，也就不加戒备了。这样，我们则可以放心在巴蜀地区和汉中养精蓄锐，准备将来挥戈东上。”



刘邦激动地紧紧握住张良的双手，内心掀起无名的欣慰：他的忠心和智慧是多么可以信赖的啊！

不到一年的时间，项羽就得到消息：刘邦起用韩信为大将，已经着手抢修栈道了。然而，他认为，现阶段是可以高枕无忧的，因为栈道全程都被破坏，用最快速度架设，也需三年至五年时间，而这栈道算是连接关中与汉中的唯一纽带，离了它，鸟儿也难飞入关中。

不料，就有这么一天，项羽接到一份十万火急的战报：刘邦兵临城下！

原来韩信靠当地居民的指引，曾从关中的陈仓走一条小路去汉中。这次，他布设了疑局，使项羽相信他是在组织抢修栈道，实际上却率领兵马从这条小路进入陈仓，以迅雷不及掩耳之势直取关中。后人把这段经过叫做“明修栈道，暗渡陈仓”。

这是一种“出其不意，攻其无备”的战术，但也必须具备一个条件，即走小路比栈道更近一些，也可能是走了一条最短的路程，这样，队伍才能神速地出现在敌人面前。

然而，韩信却万万没有想到，他是在运用一种名为“极值”的科学方法。

走最近的路

清澈的河水奔流不息，滚滚向东。

人们可曾想到，这条河流已经在地球上存在了多少年？也许有几百年，几千年了；也许已经是上万年了！它总是以那雄伟的气魄，后浪推着前浪，将难以计量的波涛注入大海。

同学们不知道这条河流的源头在哪里，他们想，

日夜忙碌地倾泻的这条河流莫不是由无数细溪汇成的？说不上它就没有一个固定的源头；也许它是某一条大河的分支，由那条大河供应给它无穷无尽的洪流。但不管怎么说，对于河流的这一段，大家都是非常熟悉的，甚至可以说出它在某处的宽度、深度、曲折情况等指标，至于教室和宿舍离河道有多远，那更是心明如镜了。

刘老师经常领着同学们到河边漫步，给大家讲述许多有趣的舟楫、江河的故事和有关知识。只要陪伴在刘老师身边，王慧就感到身上充溢着暖流，对自己熟悉而亲爱的老师产生无限的敬意。

今天，笔直的河堤照样静静地横躺着，水面在微风吹动下泛起一道道涟漪，落霞映处粼粼发光。刘老师又一次带领同学们来到岸边。

“不久的将来，我们将在这儿修建一座水塔，同时向教室和宿舍供水，同学们能够定出具体塔位，使水管的用量为最省吗？”刘老师提出这样一个问题。

这是走最近的路！这个问题以前刘老师就曾经提起过，王慧清楚地记得，从教室到河岸，再从河岸到宿舍，走哪条路线最近的问题早已解决。此刻她想起，那时用的是光的反射定律——光所走的距离最短。因此，走最近的路，应该使入射角等于反射角

(如图1a的 $\angle 1 = \angle 2$)。

后来，王慧掌握了另一种解法——几何方法（图1b）：

过C点作MN的垂线CO并延长之，取 $OC' = CO$ ；联 AC' ， AC' 与MN的交点B即是从A到MN线，再到C，距离为最短时，MN上的那一点。

这可以很容易地得到证明：

$$AB + BC = AC'$$

而如果MN上有另一任意点 B' ，则 $AB' + B'C = AB' + B'C' > AC'$ （ AC' 是直线，为A至 C' 的最短线）。

可是，刘老师补充说，根据航务局的请求，希望

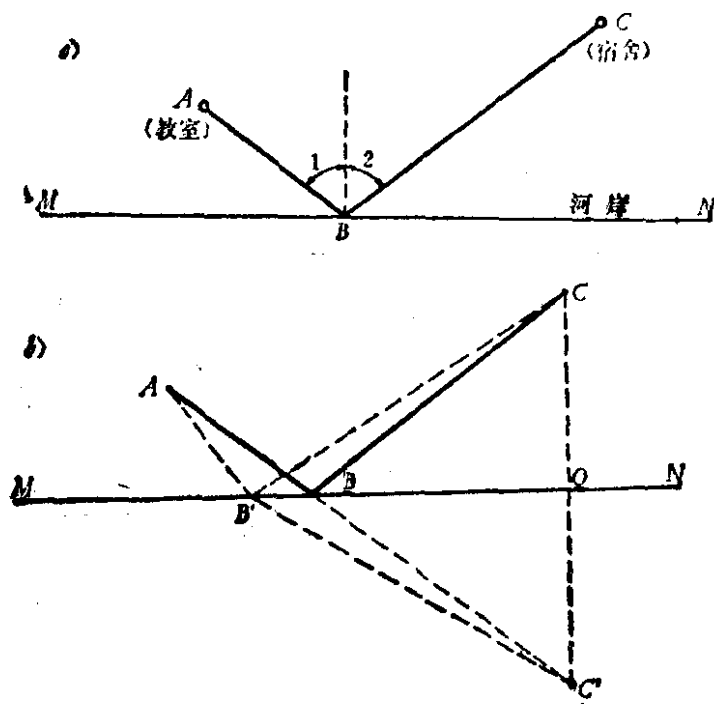


图 1

水塔的水也能供应给他们的堤岸设施，总共需用供水长度 l 。这就是说，必须在 MN 上找一点 B ，使 $AB + BD + DC$ 为最短（图2a），而 BD 是个定值，等于 l 。

当然，这也是一个求最小值的问题，怎么解呢？

归途中，皓月当空。王慧踏着洒遍大地的银光，脑海里思索着解题的方法。走着走着，噢，大概就是这样吧！

回到宿舍后，王慧便把答案写了出来：

见图 2b，过 A 点作 MN 的平行线，并在其上取 $AP = l$ ；取 C 点对 MN 线的对称点 C' ；联 PC' ，交 MN 于 D ；过 A 点作 PC' 的平行线交 MN 于 B ，则 $AB + BD + DC$ 为所求的最短值。

可以这样证明：

如果 MN 上有一任意点 B' ，则取 $B'D' = l$ ， $AB' + B'D' + D'C = PD' + B'D' + D'C$ ，因 $B'D' = AP = BD = l$ ，故可明显地看出， $AB + DC$ 若小于 $PD' + D'C$ ，也就可知 $AB + BD + DC < AB' + B'D' + D'C$ 了。

$AB + DC = PD + DC$ ，而从 P 点至 MN 上的一点，再到 C 点，自然是 $PD + DC$ 最小。于是，图2b中的 B 便是所求的点。

如果 l 值较大，超过 AC 对 MN 的投影长度，那

末，解题结果就应当如图 2c 所示。

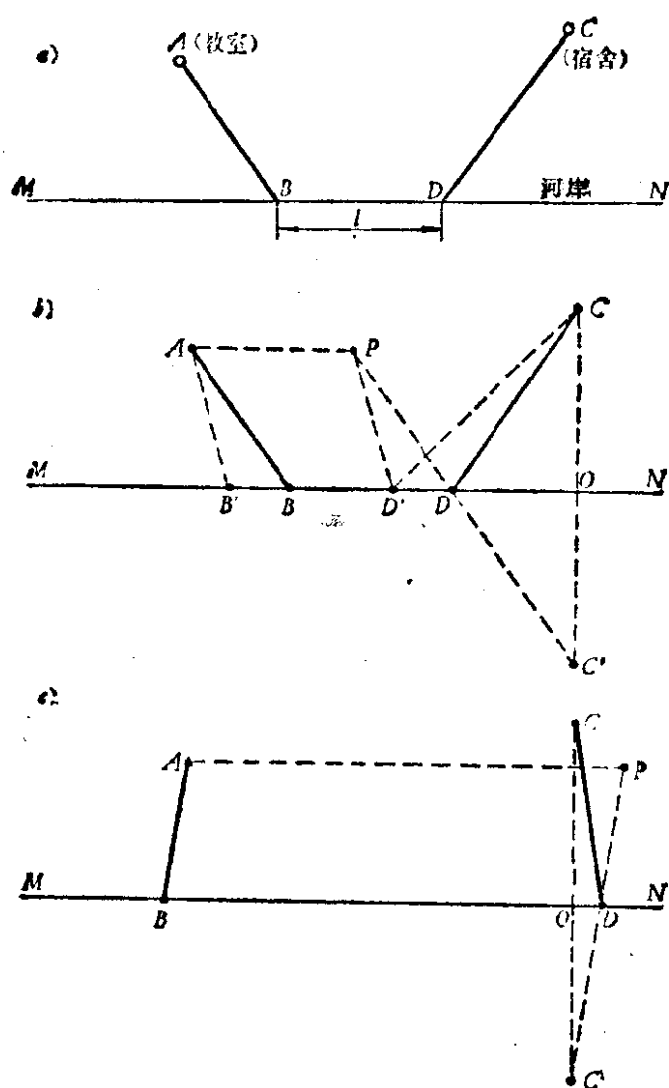


图 2

接着，刘老师提出另一个问题：

据图 3，A 与 B 两地之间有五条通路：1、2、3、4、5，问：选择哪条路走最近呢？

显然，同学们能够迅速地得出答案：走第“3”

条路最近。

这就是解答一道最简单的极小问题，我们可以从五条通路中得出一个极小值。

也许有同学要问：两点之间距离最短的应该是直

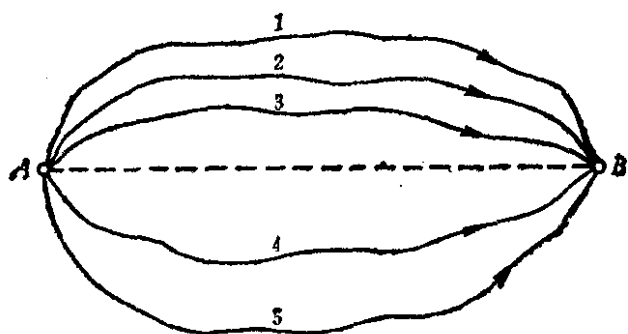


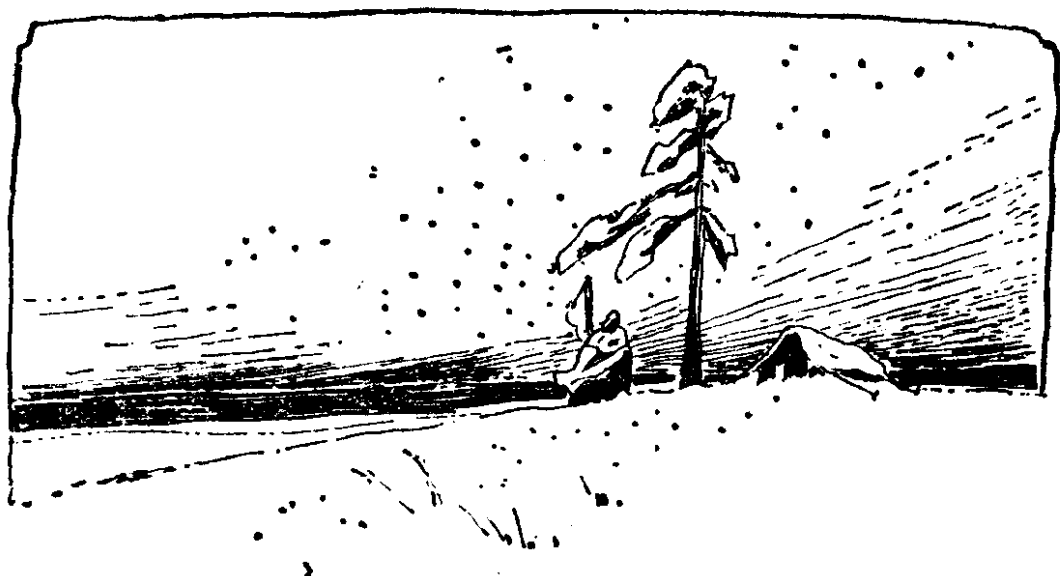
图 3

线（即图中的虚线），不是比“3”线更短吗？要这样看：在我们的题中，不存在这种可能

性。因为，虽然这条线最短，但实际上，在A与B之间并没有沿这条线修筑道路，所以不能认为它是我们这道题所要求的极小值。

刘老师最后补充说：

在日常生活和应用技术中，经常会遇到极小值的运算。还有极大值，也很重要（在理论上，严格说来，“极小、极大”与“最小、最大”是有区别的，在适当的时候会向同学们交代一下的；但是在一般情况下，有时用“极”，有时用“最”，含义都一样）。研究极小值和极大值的问题，统称为“极值”问题，它是很有趣的，在这段数学学习课程中，我们就要专门讨论这个问题了。



鸿 雁

鹅毛大雪铺天盖地。顷刻之间，丘陵、山川、河谷、森林全都披上一片白皑皑的外装。天低云暗，寒风凛冽地一阵紧似一阵，昏沉沉的大地在阴霾密布的天幕下显得凄凉而孤单。飞禽惊慌地闯回窝巢，走兽失措地钻进洞穴。只有汹涌澎湃的波涛拍岸声伴随着呼啸而过的海风，不时打破北海边区的寂静。

苏武将羊群赶回圈棚，困倦地傍着火炉坐下，顺手往炉内扔进一块块木炭。十九年来，他冷清而孤独地与那杆旃毛已经大部脱落的节杖共同生活，相依为命，看来，重新踏上汉室江山的希望是完全破灭了。