数学基础知识丛书

微积分初步

高国士

江苏人民出版社

微积分初步

高 国 士

江苏人民出版社

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高．《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要．为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示．

本书以现代的数学观点，系统讲述一元函数的微积分．共有八个部分，第一、二、三部分是基础理论（函数、极限、连续性）；第四、五、六部分是微分学；第七、八部分是积分学．书后附录一函数展开为幂级数和附录二网的极限，读者可根据需要选读．

微积分初步

高国士

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　江苏新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 10　字数 220,000

1980 年 7 月第 1 版　1980 年 7 月第 1 次印刷

印数 1— 42,500 册

书号：13100·058　定价：0.70 元

责任编辑　何震邦

绪　论

微积分学是十七世纪末英国物理学家兼数学家牛顿(Newton，1642—1727）和德国数学家莱布尼茨（Leibniz，1646—1716)所创立的．他们分别在1686年、1684年独立地发表了这方面的论文．

微积分学产生在十七世纪并不是偶然的．那时候，建筑工程的盛兴、河道堤坝的修建、造船事业的发展等提出了很多计算不同形状物体的面积、体积、重心、器壁上液体压力等静力学的与流体力学的问题．与航海有关的天文学，这时已建立了行星椭圆轨道的理论，需要研究更完善的计算方法．所以微积分学和其它学科一样，也是由于社会经济的发展、生产技术的进步所促使产生的．

整个十八世纪，通过实践的检验，微积分学随着广泛的应用，得到不断地充实．微积分学的迅速发展使人们来不及建立它的理论基础，甚至数学家有时也怀疑自己的运算根据，当然要遭到许多人的非难了．现在我们知道，微积分学的三大内容：微分、积分、级数都是某种形式的极限．可是在牛顿、莱布尼茨时代还没有极限概念．直到十九世纪初，法国数学家柯西(Cauchy，1789—1857)建立了极限理论，才给微积分学以比较严密的理论基础．

微积分学不同于初等数学，在于它的独特的运算方法——极限运算，及运算对象——变量与函数．初等数学的加、减、乘、除运算都是由两个数确定一个数(这两个数的和、

差、积、商)，极限运算并不这样．以较简单的序列极限来说，是由一串无限个数确定一个数．例如序列

$$0.9,0.99,0.999,0.9999,\cdots\cdots$$

确定一个数1(序列的极限)．这序列中的任何一个数与1是有差别的（例如取这序列的第三项0.999，则它与1的差是0.001)．但微积分学着眼在一串无限个数及这些数的发展趋势(越来越和1接近)．所以作为运算对象的序列是用一串无限个数体现的变量，它不是一个或几个固定的数．这是读者在学习中要特别注意的．从运算的方法和运算的对象看，微积分学是非常生动活泼的，体现了辩证法进入了数学，最能反应自然现象、社会现象的相依为变的关系，从而决定着它在四个现代化中的重要作用．

本书以《微积分初步》命名．从形式上看只叙述了一元函数的微积分学．按编者的意图，作为《初步》应对于读者起启蒙作用，应有一良好的开端．为此，特别是前三部分所谓分析引论部分，编者用较近代的观点叙述，以便于读者进一步学习当代国内外的数学分析、现代分析等著作．读者可以在通读本书一遍，熟悉了微分、积分等具体运算以后，回过头来再仔细学习前三部分及书末的附录，因为这些部分比较难理解．所用概念、术语、符号都是本世纪六十年代以来国外广泛使用的，但到目前为止，国内大专院校的通用教科书还没有作过这样的处理，读者难以找到适当的参考书．为此，编者在主观上尽量叙述得通俗易懂，供读者学习时参阅．

目　录

一、函　数

§1　变量与函数

一切事物都处于瞬息万变状态。所谓静止只是暂时的，相对的，而变动是绝对的。事物的本身是在不断变化，而事物与事物间又是密切联系着的。例如气温是不断变化的，而日光的直射或斜射，地面热量的蕴蓄或发散以及冷空气的侵袭等等都是促使气温变化的因素。在数学中，变量与函数是反映变化规律的简单工具。

在某一考察过程中，我们把变化着量称为**变量**，而把始终保持着数值不变的量称为**常量**。例如圆周长和它的直径的比π是一个常量，匀速运动中的速度也是常量，而自由落体的速度是变量。

在数学中，有时把在某一特定的运算过程中保持不变的量作为常量。在解二次方程$ax^2+bx+c=0$的过程中，a、b、c是常量。在得到解的公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

后，x的值随不同的a、b、c而变，在这意义下，a、b、c又是变量了。

圆面积S随半径r而变，有关系式

$$S=\pi r^2.$$

通常称 r 是自变量，S 是自变量 r 的函数. 一般说，可以给出如下定义.

定义　当变量 x 取某一值时，变量 y 按一定的规律有唯一的值和它对应，则称 x 是自变量，y 是自变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，x、y 间的对应规律也称为函数关系.

例 1　圆周长 C 给定了，圆面积 S 也确定了. 事实上，$C=2\pi r$，$S=\pi r^2$，这里 r 是圆的半径. 把前式两端平方得 $C^2=4\pi^2r^2$，以后式代入，得 $C^2=4\pi S$. 即

$$S=\frac{C^2}{4\pi}.$$

对 C 的每一个非负实数值，S 按上式所确定的规律有唯一的值和它对应. 所以可把圆周长 C 看作自变量，圆面积 S 看作圆周长 C 的函数.

例 2　考察矩形的周长 L 与矩形的面积 A 间的关系. 首先，周长 L 给定了，面积 A 是不确定的. 因为同样的周长可以构成许多不同面积的矩形. A 与 L 间不存在确定的对应规律，所以它们之间不是函数关系. 这是一方面. 另外，周长 L 相当小时，构成矩形的面积也不会怎么大. 例如周长 L 小于 4 厘米时，不可能构成具有面积大于或等于 1 平方厘米的矩形. 所以 A 与 L 间也存在着一种相依为变的关系，但是这种相依为变的关系不是函数关系.

上例说明客观事物间的相依为变的关系是错综复杂的，未必都可归结为函数关系.

在函数的定义中，涉及三部分：

Ⅰ. 自变量取值的范围，通常称为**定义域**，

Ⅱ. 函数值取值的范围，通常称为**值域**，

Ⅲ. **对应规律**（即函数关系）.

通常称为函数定义的三要素。

在例 1 中，自变量C取值的范围(即定义域)按实际意义是非负实数．函数值S取值的范围（即值域）也是非负实数。对应规律用$S=\frac{C^2}{4\pi}$表示．当$C=1$时，对应着$\frac{1^2}{4\pi}$，可以写作$1 \longmapsto \frac{1^2}{4\pi}$；$C=2$时，对应着$\frac{2^2}{4\pi}$，可以写作$2 \longmapsto \frac{2^2}{4\pi}$；……。一般说，这对应规律可以表示为$C \longmapsto \frac{C^2}{4\pi}$。如果再注明$C$的定义域,即表示为

$$C \longmapsto \frac{C^2}{4\pi},(C\text{是非负实数}),$$

那末例 1 的内容都表示清楚了，因为值域(是非负实数)可以由此推出。

所以有时候知道了定义域和函数关系后可以推出值域。此外，由于本书中的函数的定义域、值域都在实数范围内,对于函数$y=\sqrt{x}$，由于值域在实数范围内，可以推知定义域是非负实数，从而推知值域也是非负实数。

表示函数的方法,通常有三种：

Ⅰ．列表法　是把一系列的自变量的值和函数值对应地书写出来的方法．这种方法是常用的．例如火车站上车票的价格和相距公里数的对应关系的表格等。在数学上、工程上常用的三角函数表、对数表等都是。

Ⅱ、图象法　就是中学里学过的作$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$等函数的图象的方法。在本书第三部分还要进一步介绍许多初等函

数的图象．在生产实践中常备有记录变量间变化的仪器自动地画出图象，以此表示相应的函数关系．

Ⅱ．公式法 是以含有自变量的公式来表示函数的方法。例如 $y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$ 表示着对自变量 x 进行怎样的运算以得出相应的函数值 y 来．至于 $y=\sin x$，"sin"只是一种对应关系的符号，并没有表明对 x 进行怎样的运算以得到函数值 y．这种对应关系的存在可由单位圆上的三角函数线看到．在附录中，把 $\sin x$ 展开为幂级数后才知道对 x 应进行怎样的运算．$y=|x|$ 也是用符号"｜ ｜"表示对应关系．按实数的绝对值的定义是：正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零．从而可把 $y=|x|$ 写成

$$y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

这里把定义域分成两部分：非负实数（$x\geqslant 0$）部分及负实数（$x<0$）部分，分别表示对每一部分的自变量 x 所进行的相应的运算。所以这里是把两个公式分段地表示函数 $y=|x|$。一般说，可以用许多公式分段地表示一个函数．

在第二部分里，将对每一正数 ε，用 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 表示不超过 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的最大自然数。一般说对任何实数 x 可用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。例如：$[0]=0$，$\left[\frac{1}{3}\right]=0$，$[\pi]=3$，$[-\pi]=-4$．

根据函数的定义，$y=[x]$ 是一函数，但是我们不能用通常的运算表示这对应规律．"[ ]"纯粹是一符号．

下面简单地叙述偶函数、奇函数和周期函数。

函数 $y=f(x)$；

Ⅰ. 满足 $f(-x)=f(x)$，称为**偶函数**. 例如：$y=x^2$，$y=x^4$，$y=x^{2n}$（n 是整数）都是偶函数. 另外，由于 $\cos(-x)=\cos x$，所以 $y=\cos x$ 也是偶函数. 偶函数的图象关于 y 轴是轴对称的.

Ⅱ. 满足 $f(-x)=-f(x)$，称为**奇函数**. 例如：$y=x$，$y=x^3$，$y=x^{2n+1}$（n 是整数）都是奇函数. 另外，由于 $\sin(-x)=-\sin x$，所以 $y=\sin x$ 也是奇函数. 奇函数的图象关于原点是中心对称的.

Ⅲ. 如果存在正实数 l 使 $f(x+l)=f(x)$，称为**周期函数**. 而把满足上式的最小的 l 称为这周期函数的**周期**. 例如：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}x$ 等都是周期函数，它们的周期分别是 2π，2π，π 等. 周期函数的图象沿 X 轴平行移动整数倍的周期后与原图象重合.

§2 集 合

1. 集合概念

集合（或称**集**）的概念，在通常情况下，不加以定义，只是举例说明. 例如：教室里所有学生的集合，教科书上所有字的集合，所有自然数的集合，有理数的集合，平面上直线的集合，到某线段两个端点距离相等的点的集合等等. 集合概念不仅已渗透到数学各分支的基础理论中，而且广泛地被应用于当代应用科学和技术中去.

从上面看到，集合是由许多事物组成，是指适合一定条件的事物的全体. 组成集合的事物称为**元素**. 元素常用小写的拉丁字母 a、b，……表示，集合常用大写的拉丁字母 A、

B,……表示。如果 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$。如果 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，记作 $a\bar{\in} A$。所以集合概念是由集合、元素以及它们间的关系“$\in$”形成的。至于元素本身是什么，学生、字、数、点……在集合理论的论证过程中是不加考虑的。

有时候，集合的元素可以列举出来。例如设 A 是小于 10 的自然数所成集合，则可写成

$$A=\{1,2,3,\cdots\cdots,9\}.$$

这种由有限个元素形成的集合称为**有限集**。相反情况，称为**无限集**。例如：自然数集合、有理数集合都是无限集。

仅由一个元素 a 形成的集合，称为**单点集**，记作 $\{a\}$（这与元素 a 不同）。一个元素也没有的集合称为**空集**，记作 ϕ。例如 $x^2+1=0$ 的实根形成的集合是空集。

2.子集合

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，记作 $a\in A\Longrightarrow a\in B$（符号“$\Longrightarrow$”表示“蕴含”），则称集合 A 包含在集合 B 内，或集合 B 包含集合 A（图 1）。记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$。这时称 A 是 B 的**子集合**。**空集 ϕ 算作任何集合的子集合。**

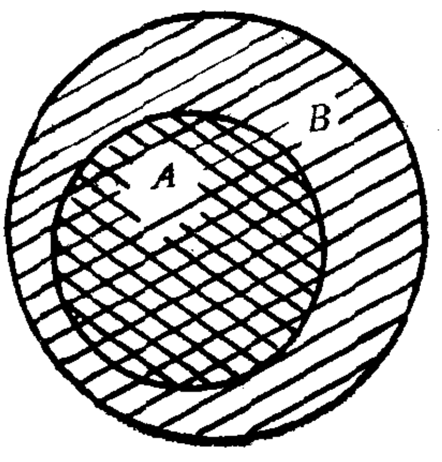

图 1

例 1 取 A 是自然数集合，B 是整数集合，则有 $A\subset B$。

3. 集合的相等 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，集合 B 的元素都是集合 A 的元素（也就是集合 A 与集合 B 的元素完全一样），则称集合 A 与集合 B 是**相等的**，记作 $A=B$。这时

$$a\in A \Longrightarrow a\in B \text{ 及 } a\in B \Longrightarrow a\in A$$

同时成立，可以记作 $a\in A \Longleftrightarrow a\in B$（符号“$\Longleftrightarrow$”表示“等价”）。也就是 $A\subset B$ 及 $B\subset A$ 同时成立。

4. 集合的运算 我们称集合 C 是集合 A 与集合 B 的**和集**，是指集合 C 是由集合 A 的所有元素及集合 B 的所有元素所组成的集合，即 $a\in C \Longleftrightarrow a\in A$ 或 $a\in B$，记作（图 2）

$$C=A\cup B.$$

称集合 C 是集合 A 与集合 B 的**交集**，是指集合 C 是由集合 A 与集合 B 所共有的所有元素所组成的集合，即 $a\in C \Longleftrightarrow a\in A$ 且 $a\in B$，记作（图 2）

$$C=A\cap B.$$

称集合 C 是集合 A 与集合 B 的**差集**，是指集合 C 是由属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素所组成的集合，即 $a\in C \Longleftrightarrow a\in A$ 且 $a\overline{\in} B$. 记作（图 2）

$$C=A\sim B.$$

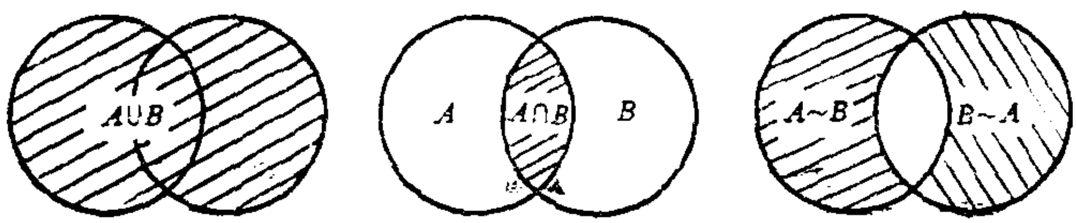

图 2

例 2 设 A 是能被 2 整除的自然数所成的集合，B 是能被 3 整除的自然数所成的集合，即

$$A=\{2,4,6,\cdots\cdots,2n,\cdots\cdots\},$$

$$B=\{3,6,9,\cdots\cdots,3n,\cdots\cdots\}.$$

则集合 A 与集合 B 的和集为

$$A\cup B=\{2,3,4,6,8,9,\cdots\cdots\},$$

即能被 2 整除或能被 3 整除的自然数所成的集合；集合 A 与集合 B 的交集为

$$A\cap B=\{6,12,18,\cdots\cdots,6n,\cdots\cdots\},$$

即既能被 2 整除又能被 3 整除的自然数所成的集合；集合 A 与集合 B 的差集为

$$A\sim B=\{2,4,8,10,14,\cdots\cdots\},$$

即能被 2 整除而不能被 3 整除的自然数所成的集合；集合 B 与集合 A 的差集为

$$B\sim A=\{3,9,15,21,27,\cdots\cdots\},$$

即能被 3 整除而不能被 2 整除的自然数所成的集合。

用算术里（自然数）的倍数来讲，集合 A 的元素都是 2 的倍数，集合 B 的元素都是 3 的倍数。交集 $A\cap B$ 的元素都是 2、3 的公倍数，其中最小的元素 6 就是 2、3 的最小公倍数。

可以验证（图 3），对于集合 A、B、C，…… 有如下性质：

交换律　$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

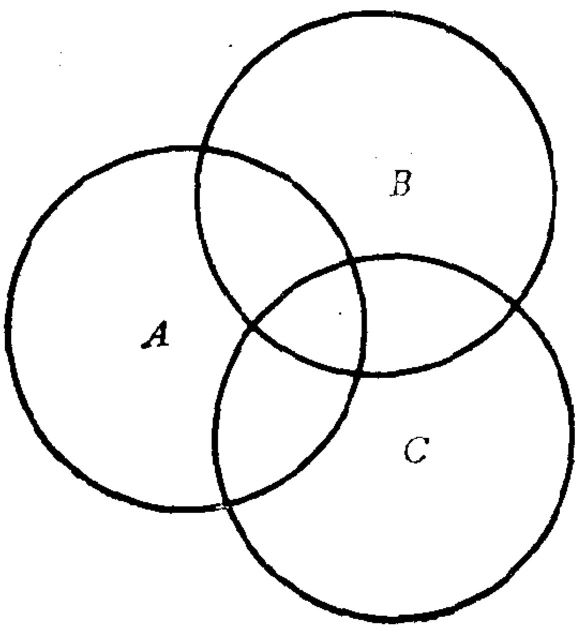

图 3

结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$,

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cap C)$;

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

吸收律　$(A\cup B)\cap A=A$，　$(A\cap B)\cup A=A$.

设集合 A, B 都是集合 X 的子集合，则有德摩根公式：

$$X\sim(A\cup B)=(X\sim A)\cap(X\sim B);$$

$$X\sim(A\cap B)=(X\sim A)\cup(X\sim B).$$

我们称集合 $X\sim A$ 为集合 A（关于 X）的**余集**. 上述公式常简述为：和集的余集等于余集的交集；交集的余集等于余集的和集. 读者可按图 4 验证.

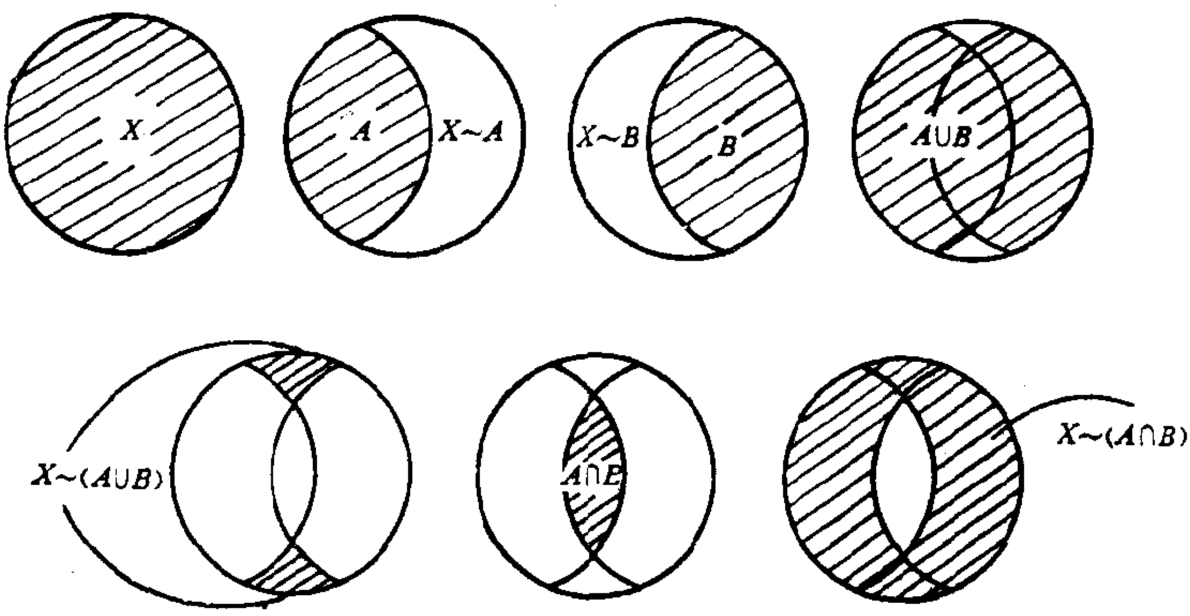

图 4

5．直积集合

设 A、B 是两集合，称

$$A\times B=\{(a,b);\ a\in A,\ b\in B\}$$

为集合 A, B 的**直积集合**.