肖明耀 编著

实验误差估计与数据处理

科学出版社

实验误差估计与数据处理

肖明耀 编著

科学出版社
1980

内 容 简 介

本书叙述精密科学实验或测量中，有关误差估计的一些基本的和常用的方法，总共十一章．前两章介绍误差的概念、减弱措施和最常用的估计方法；第三章到第七章分别叙述误差的概率特征，各类误差的估计和合成，及最后结果的表示；第八章到第十章分别叙述粗差的统计剔除法、最小二乘法、随机过程的原理和应用；最后一章介绍数据处理时，如何利用电子计算机计算而需编制程序的问题．可供从事精密测量的科研工作者、工程技术人员以及理工科学生和教师们参考．

实验误差估计与数据处理

肖明耀 编著

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980 年 3 月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1980 年 3 月第一次印刷　印张：7 7/8

印数：0001－18,620　字数：176,000

统一书号：13031·1223

本社书号：1703·13—1

定价： 1.00 元

序　　言

误差理论与计量科学、精密测量和科学实验的关系十分密切。例如，在考核计量仪器的准确性和判断产品质量是否合格等等，都要用误差理论作出科学的、恰当的结论。随着科学水平的不断提高，误差理论也就愈来愈为从事实验科学的人们所关注。本书正是为了满足工程技术人员日益迫切的需要而编写的。

作者注意到，采用目前国内外合理的、流行的名词术语（例如，不确定度、随机误差等），介绍应用广泛的 t 分布估计，广义的非正态分布的误差合成，用矩阵运算严格推证最小二乘法的公式，简要叙述阿伦方差、随机过程、快速富氏变换以及电子计算机程序的编制，这正是现今测量朝着数字化、自动化、快速化和国际广泛交流的方向发展所需要的，这也是本书与经典误差理论的不同之处。程序编制是利用电子计算机进行数据处理所必不可少的，因而在第十一章中，为读者提供了一个编制程序的入门向导，对还不十分熟悉程序的读者说来，该章又起着复习、总结和查阅的作用。所有的内容都力求深入浅出，简明实用，同时兼顾不同专业读者的需要，给出了较多的算例。本书可供从事精密测量的科研工作者、工程技术人员以及理工科学生和教师们参考。

目前，国际计量局（BIPM）正致力于不确定度统一性方面的工作，我国也于 1977 年和 1978 年先后召开过两次全国误差理论学术讨论会。误差的理论与应用，在国际和国内已得到应有的重视。为了使误差理论更有利于祖国四个现代化的

发展，还需要不断地进行更加深入的理论研究和推广.

由于作者能力所限，书中难免有不妥和错误之处，敬请读者指正.

作　者

1979年2月于

中国计量科学研究院

目　　录

第一章　误差的概念与表示

§1.1　误差公理与研究意义

1. 误差公理

对自然界所发生的量变现象的研究，常常需要借助于各式各样的实验与测量来完成．由于被测量的数值形式常是不可通约的（不能以有限位数表示），又由于认识能力的不足和科学水平的限制，实验中测得的值和它的真实值并不一致，这种矛盾在数值上的表现即为**误差**．随着科学水平的提高和人们的经验、技巧、专门知识的丰富，误差可以被控制得愈来愈小，但是不能使误差降低为零．误差产生的必然性已为实践所证实，也为一切从事科学实验的人们所公认，由此，下列重要的误差公理成立，即

误差公理　实验结果都具有误差，误差自始至终存在于一切科学实验的过程之中．

2. 研究的意义

误差之所以上升到理论研究，这是因为：

1）人们所进行的实验与测量，目的在于研究自然界中所发生的量变现象，借以认识我们周围所发生的客观过程，从而能动地改造客观世界，而误差常常会歪曲这些客观现象．我们要正确认识不以人们意志为转移的客观过程的规律，有效地为人民服务，就必须分析实验测量时产生误差的原因和性质，正确处理数据，以消除、抵偿和减小误差．

2）在计量科学和实验工作中，必须保证量值的统一及正确传递．提供物理量单位的计量基准、标准的研究成果，技术革新中的仪器、仪表的性能和质量，科学实验中的数据等，它们的质量是否过硬，怎样正确使用，还决定于实验研究的理论和误差分析是否正确．

3）误差理论可以帮助我们正确地组织实验和测量，合理地设计仪器，选用仪器及选定测量方法，使我们能以最经济的方式获得最有效的结果．

误差理论的建立和发展同其它理论一样，都是遵循“实践—理论—实践”的发展规律的，“社会实践中的发生、发展和消灭的过程是无穷的，人的认识的发生、发展和消灭的过程，也是无穷的．”实验和测量工作是在不断发展的，是无止境的，误差理论的发展也是同样的情况，它有待于一切从事实验科学的工作者不断地变革和发展．

§1.2 误 差 定 义

1. 绝对误差

某量值的误差定义为该量的给出值（包括测量值、实验值、标称值、预置值、示值、计算近似值等要研究和给出的非真值）与其客观真值之差，即

$$误差 = 给出值 - 真值 \tag{1.2.1}$$

例如：真值为 102 毫米的量块，测得为 103 毫米，则测量值 103 毫米的误差为 1 毫米；真值为 6.42 微安的电流，在微安表的示值为 6.34 微安，则微安表的示值 6.34 微安的误差为 −0.08 微安；标称值为 100 千赫的晶体振荡器，其实际输出的真实频率值为 99.999 千赫，则标称值 100 千赫的误差为 1 赫；电阻箱预置的电阻值为 110 欧，其真值为 115 欧，则预置值

110 欧的误差为 −5 欧；π 的近似值取 3.14 时，其误差约为 −0.0016；等等.

公式（1.2.1）中的给出值包括了测量值、实验值、示值、标称值、预置值，计算近似值等，它是我们要研究的对象．某量值的误差是指该量给出值的误差，如果一个量没有给出值，也就无法谈及它的误差大小.

什么是真值？自然界中的一切物体都是处于永恒的运动中，而被测量的真值的确定，是假设在一定的时间内，实际上不变的被测量的真正大小．此外，还有一些人为的规定，例如，量块两平行端面的几何长度表征量块的长度，但在精密测量中发现，无论量块的端面研磨的如何精细，也不能保证端面没有起伏或两端面绝对平行，因此，量块两端面间的距离各处就不相等，这时，人们又规定量块两端面对角线中心的垂直连线（或其它规定）之长度表征量块的长度，在某一极短的时间间隔内，量块具有稳定的、实际的长度，就是该瞬间量块的真值，所以，真值具有时间和空间的含义．由此，可以定义如下：

真值　在某一时刻和某一位置或状态下，某量的效应体现出的客观值或实际值.

一般说来，真值是未知的，因此误差也就未知，有些情况真值是可以知道的，又有些情况从相对的意义上来说也是知道的.

真值可知的情况有如下几种：

1）理论真值：例如，平面三角形三角之和恒为 180°；同一量值自身之差为零而自身之比为 1，此外还有理论设计值和理论公式表达值等等.

2）计量学约定真值：国际计量大会决议[1]

（A）长度单位——米的长度等于氪 86 原子的 $2p_{10}$ 和 $5d_5$ 能级之间跃迁的辐射在真空中波长的 1 650 763.73 倍.

(B) 质量单位——千克等于铂铱合金的国际千克原器的质量.

(C) 时间单位——秒是铯 133 原子基态的二个超精细能级之间跃迁的辐射周期的 9 192 631 770 倍的持续时间.

(D) 电流强度单位——安培是一个恒定的电流强度，若保持在真空内相距 1 米的两无限长的圆截面极小的平行直导线内，这电流在这两导线之间每米长度上产生的力等于 2×10^{-7} 牛顿.

(E) 热力学温度单位——开尔文是水三相点热力学温度的 1/273.16.

(F) 发光强度单位——坎德拉是在 101 325 牛顿每平方米压力下，处于铂凝固温度的黑体的 1/600 000 平方米表面在垂直方向上的发光强度.

(G) 物质的量单位——摩尔是一物系的物质的量，该物系中所包含的结构粒子数与 0.012 千克碳 12 的原子数目相等.

凡满足以上条件复现出的量值都是真值.

3) 标准器相对真值：高一级标准器的误差与低一级标准器或普通仪器的误差相比，为其 1/5 (或 1/3—1/20) 时，则可以认为前者是后者的相对真值. 例如，一个高稳定度晶体振荡器输出的频率，相对于普通频率计的频率而言是真值. 铂电阻温度计复现的温度值相对于普通温度计指示的温度值而言是真值，等等.

例 1 测得某三角块的三角之和为 $180^\circ 00' 03''$，则该三角之和的误差为 $+3''$.

例 2 测得 A, B, C 三个标准灯的光强比分别为 $A/B=\alpha$, $B/C=\beta$, $C/A=\gamma$，三个测量值之积的真值为 1，故三个测量之积的误差为 $\alpha\beta\gamma-1$.

例 3 用二等标准活塞压力计测量某压力，得值 1000.2 千克力/厘米^2，该压力用更准确的方法测得为 1000.5 千克力/厘米^2，设后者可视为相对真值，则二等标准活塞压力计测量值的误差为 -0.3 千克力/厘米^2.

例 4 今用一普通压力计测量某压力，得值 999 千克力/厘米^2，该压力用更准确的方法测得为 1001 千克力/厘米^2，则普通压力计测量值的误差为-2 千克力/厘米^2.

从例 3 和例 4 粗粗看到，在 1000 千克力/厘米^{2}的邻近点进行测量时，二等活塞压力计的误差小于普通压力计的误差(指绝对值)，因此，我们说二等活塞压力计比普通塞力计准确. 所以，误差这个量值已成为评定测量过程或计算仪器仪表的准确性不可缺少的尺度.

公式 (1.2.1) 所表达的误差是和给出值同单位(量纲)的，它是反映给出值偏离真值大小的，故又称之为**绝对误差**. 这个绝对误差是给出值减真值而得，有时又特称之为(绝对)**真误差**.

如果引进一个新的定义：

$$修正值 = -误差 = 真值 - 给出值 \qquad (1.2.2)$$

则可得

$$真值 = 给出值 + 修正值$$

这说明含有误差的给出值加上修正值后就可以消除误差的影响. 在精密计量中通常都采用加修正值的办法来保证全国量值的准确一致.

例如，我们希望加工出一个准确值为 1 欧的标准电阻，由于种种原因，加工后电阻的实际值为 1.001 欧，而电阻的标称值是 1 欧. 如果按标称值 1 欧来用，那么它的误差是 -0.001 欧，如果按照 1.001 欧来用，那么，就和客观的情况完全相合了.

一个计量标准器送上级计量机构检定，其重要的目的之一，就是获得一个准确的修正值，确保量值传递的准确一致.

在检定中还存在一些**隐修正**问题. 例如，用一台标准电压测量装置 A 去检定一批电压表 B，由于直接检定的操作过程很频或其它原因，不宜直接检定，而选择一台电压表 C 作桥梁，由 A 检定 C，再由 C 去检定或比对一批 B. 如果检定 1 毫伏刻度，可将 A 指示 1 毫伏，设 C 此时指示为 1.005 毫伏，以后检 B 时，仍将 C 指示在 1.005 毫伏时再去看 B 指示何值. 将 C 调整到 1.005 毫伏，意味着将标准 A 的 1 毫伏复现出来了，这个过程并未加修正值，但却起到了对 C 的修正的作用。如果从 A 检 C，到 C 检 B，这段时间里，实验条件保持相同，C 又是稳定的，那么 C 检定 B 时，就不引入误差，通常这些条件不能满足，除了标准 A 的误差外，C 的不稳定性亦将引入误差.

值得注意：由于修正值的不准或"桥梁"仪器不稳，虽经修正后，仍然不是真值，而只是可能得到比直接给出值更准一些的给出值. 错误的修正（符号或数值弄错）反而会得到更坏的结果，因此，修正量值需要谨慎小心.

2. 相对误差

在引出定义之前先举例说明. 例如：用一个频率计测量准确值为 100 千赫频率源，得值为 101 千赫，则误差为 1 千赫. 又用波长表测量准确值为 1 兆赫的标准频率源，得值为 1.001 兆赫，则误差亦为 1 千赫. 从误差的绝对量来说它们都一样，但是它们却是在不同的频率点上作测量的，它们的准确程度是不一样的，前者测量 100 千赫时差了 1 千赫，后者是测量 1 兆赫时差了 1 千赫. 为了描述测量的准确程度而引出相对误差或误差率的定义如下：

$$\text{相对误差} = \text{误差} \div \text{真值} \qquad (1.2.3)$$

误差较小时

$$相对误差 \approx 误差 \div 给出值 \tag{1.2.4}$$

前述例子中频率计和波长表的测量相对误差分别是

$$1/100 = 1\% 和 1/1000 = 0.1\%.$$

3. 分贝误差

在无线电、声学等计量中常用分贝误差来表示相对误差，因此，分贝误差实质上是相对误差的另一种表示方式，因其重要，这里稍加详述。

设两个电压的比值为

$$\alpha = U_1/U_2 \tag{1.2.5}$$

它的另一表达方式为

$$A = 20\log\alpha(\mathrm{db}) \tag{1.2.6}$$

这就是分贝 (db) 的定义式. 如果比值 α 产生了一个误差 $\delta\alpha$，则对应 A 产生一个误差 δA，故有

$$A + \delta A = 20\log(\alpha + \delta\alpha)(\mathrm{db}) \tag{1.2.7}$$

(1.2.7) 与 (1.2.6) 之差即得

$$\delta A = 20\log(1 + \delta\alpha/\alpha)(\mathrm{db}) \tag{1.2.8}$$

这个式子给出了比值的相对误差 $\delta\alpha/\alpha$ 与分贝误差 δA (db) 之间的关系. 注意到

$$\log(1+\delta) = 0.4343\ln(1+\delta)$$

$$\ln(1+\delta) \approx \delta, \delta \ll 1 \text{ 时}$$

则由 (1.2.8) 有

$$\left.\begin{aligned} \delta A(\mathrm{db}) &\approx 8.69(\delta\alpha/\alpha) \\ (\delta\alpha/\alpha) &\approx 0.1151\delta A(\mathrm{db}) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.9}$$

例 5 某一电压表测出 125 伏，标准表测出为 127 伏，求分贝误差.

解

$$误差 = 125 - 127 = -2$$

$$相对误差 = -2/127 = -1.6\%$$

$$分贝误差 \approx 8.69 \times (-1.6\%) = -0.14\text{db}$$

例 6 已知某量误差为 0.34db，求相对误差.

解

$$相对误差 \approx 0.1151 \times 0.34 = 3.9\%$$

需注意：由于功率比的分贝定义为 $A = 10\log\alpha$，这里 $\alpha = P_1/P_2$，则相应(1. 2.8)和(1. 2.9)中的系数有所不同，这一点请读者注意.

4. 引用误差

引用误差是一种简化的和实用方便的相对误差，常常在多档和连续刻度的仪器仪表中应用，这类仪器仪表可测范围不是一个点而是一个量程，各刻度点的示值和其对应的真值都不一样，这时若按(1.2.3)或(1.2.4)计算相对误差时所用的分母也不一样，故而计算很烦，为了计算和划分准确度等级方便，一律取该仪器仪表量程中的最大刻度值(满刻度值)作分母，由此引出定义：

$$引用误差 = 示值误差 \div 满刻度值 \qquad (1.2.10)$$

例 7 测量上限(满刻度值)为 2000 千克力的工作测力计(拉力表)，在标定值(示值)为 1500 千克力时的实际作用力为 1508 千克力，则此测力计在这一点的引用误差为 -0.4%.

例 8 检定 2.5 级、上限为 100 伏的电压表，发现 50 伏刻度点的示值误差为 2 伏，并且较其它各刻度点的误差为大，所以该电压表的最大引用误差为 2%. 2.5 级的含义是给出合格仪器仪表最大引用误差的界限为 2.5%，可见，该电压表合格.

电工仪表的准确度等级分别为 0.1，0.2，0.5，1.0，1.5，2.5 和 5.0 七级，标明仪表的引用误差不能超过的界限．一般说来，如果仪表为 S 级，则仅说明合格仪表最大引用误差不会超过 $S\%$，而不能认为它在各刻度点上的示值误差都具有 $S\%$ 的准确度．设仪表的满刻度值为 x_n，测量点为 x，则该仪表在 x 点邻近处的示值误差应为：

$$
\begin{aligned}
&\text{绝对误差} \leqslant x_n \times S\% \\
&\text{相对误差} \leqslant x_n/x \times S\%
\end{aligned}
\tag{1.2.11}
$$

一般 $x \neq x_n$，故当 x 越近于 x_n 时，其测量准确度越高；x 越远离 x_n 时，其测量准确度越低，这就是为什么人们利用这类仪表测量时，尽可能在仪表满刻度值 2/3 以上量程内测量的原因所在．在分析此类仪表对测量值的实际影响时，需要按(1.2.11)式作换算，而不能直接采用对应于它的准确度等级的值．在选择仪表作测量时，要注意到这一情况．

例 9 某待测的电压约为 100 伏，现有 0.5 级 0—300 伏和 1.0 级 0—100 伏两个电压表，问用哪一个电压表测量较好？

解 用 0.5 级 0—300 伏测量 100 伏时的最大相对误差为

$$r_1 = x_n/x \times S\% = 300/100 \times 0.5\% = 1.5\%$$

而用 1.0 级 0—100 伏测量 100 伏时的最大相对误差为

$$r_2 = x_n/x \times S\% = 100/100 \times 1.0\% = 1.0\%$$

此例说明，如果量程选择恰当，用 1.0 级仪表进行测量也会比用 0.5 级仪表准确．因此，在选用仪表时，要纠正单纯追求准确度等级"越高越好"的倾向，而应根据被测量的大小，兼顾仪表的级别和测量上限合理地选择仪表．

§1.3 误 差 源

分析误差时应从何着手，亦即误差来源于何处，我们从计