数学若干辩证内容简析

刘凤璞 周春荔 解恩泽
周民强 姚人杰 张志才 编

人民教育出版社

自然辩证法讲义(初稿)
专题资料之五:
数学若干辩证内容简析
刘凤瑛 周春荔 解恩泽
周民强 姚人杰 张志才 编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
重庆新华印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张3.75 字数76,000
1980年5月第1版 1980年11月第1次印刷
印数 00,001—12,000

书号: 2012·020 定价: 0.28元

JYI/59114

说　　明

数学的辩证内容是极其丰富的。这里，只是根据我们的点滴体会，对其中某些问题作了粗略的分析，供大家参考。

本书是由刘凤璞、周春荔、解恩泽、周民强、姚人杰、张志才六同志集体讨论、分工执笔编写的。最后由刘凤璞，周春荔、解恩泽、周民强负责作了统一修改。

复旦大学、吉林大学、北京大学、吉林师范大学、华南师范学院、北京师范学院、中国科学院数学所和计算所、社会科学院哲学所、人民教育出版社等单位的一些同志，对本书提出了许多宝贵的修改意见，给予了许多具体的帮助，谨向这些同志表示衷心感谢。

由于我们水平所限，书中肯定会存在缺点和错误，敬希读者批评指正。

编　　者

一九八〇年二月

目　　录

引　言 …………………………………………………… 1

一、关于数学的客观基础 ………………………………… 5

（一）数学与现实世界 ………………………………… 5

（二）数学理论与实践 ………………………………… 14

（三）数学公理方法的客观性 …………………………… 21

二、数学概念的辩证性质 ………………………………… 30

（一）数学概念的发展 ………………………………… 30

（二）数学概念之间的联系 ……………………………… 38

三、数学运算的对立统一 ………………………………… 53

（一）正运算与逆运算 ………………………………… 53

（二）运算之间的相互转化 ……………………………… 56

（三）运算和运算对象 ………………………………… 58

四、数学中的几对重要矛盾 ……………………………… 65

（一）已知与未知 ……………………………………… 65

（二）常量与变量 ……………………………………… 71

（三）直与曲 …………………………………………… 81

（四）有限与无限 ……………………………………… 86

（五）连续与不连续 …………………………………… 94

五、十九世纪以来数学的某些进展及其特征 ……………102

（一）某些数学分支的重大变革…………………………102

（二）数学进展的几个显著特征…………………………107

参考文献 …………………………………………………114

引　言

数学是一门历史悠久的科学。从远古的时代起，人类就根据自己生活和生产的实际需要，不断发现和积累数学知识。但是，直到公元前六世纪，这种知识还没有形成具有逻辑关联的体系，因而只能作为数学的萌芽载入史册。

公元前五世纪，古希腊有人开始研究数学知识之间的联系。公元前三世纪出现的欧几里得的《几何原本》就是这种研究的结晶。此后，直到十六世纪，逐步完备起来的算术、初等几何、初等代数等，构成了通常称之为常量数学的主要内容。

十六世纪，“运动”成为自然科学研究的中心课题，这就迫使数学要建立相应的概念和理论。十七世纪上半叶，变量的概念应运而生，经笛卡儿之手，以力学的要求为背景，使几何内容的课题与代数形式的方法相结合，建立了解析几何学。十七世纪下半叶，牛顿和莱布尼茨各自独立地建立了微积分。此后，又有级数理论、微分方程、微分几何以及较晚一些的复变数函数论的诞生。这一时期，几何、数论、代数也都在继续发展着，画法几何学与射影几何学相继出现了。另外，还开辟了或然数学的新领域，建立了概率论。直到十八世纪末的大约二百年间，成为以微积分为基本思想的变量数学长足发展的时期。

十九世纪以来数学的发展，在几何、代数、分析等方面，

都有了深刻的变化，其研究对象急剧拓广，一切可能的和更为一般的量及其关系，都成为数学的研究对象。例如，试证欧氏第五公设过程中产生的非欧几何、研究五次以上代数方程解法的一般理论时产生的群论、研究分析基础精确化时产生的集合论，都十分鲜明地显现出这种特征。此外，还有拓扑学、实变函数论、泛函分析以及一些交叉学科：代数几何、分析拓扑，大范围分析等等的产生。由于对数学基础的研究，又有数理逻辑各个新分支的建立和发展。

近几十年来，由于现代生产和国防建设方面统筹规划的需要，形成了优选学、规划论、对策论、排队论等运筹类学科。研究各种自动控制系统的需要，发展了一门介于数学和工程之间的学科——控制论。电子计算机的问世，大大促进了计算数学的发展，并形成了计算机科学的数学理论。数学与其它学科的相互渗透又出现了物理数学、生物数学、经济数学等边缘学科。

最近十几年来，又出现了以不分明的量为基本研究对象的弗晰(模糊)数学这一新的数学研究领域。

从上面极其简要的历史回顾中，我们可以看到，尽管数学有那么悠久的历史，有那么繁多的分支，但是，它的研究对象却都是量(及其关系)：既包括来源于现实世界的空间形式和数量关系的量，又包括一切可能的和更为一般的量。或者说，正象恩格斯所指出的，数学研究的对象是表现为思想事物的纯粹的量。数学的这种研究对象，就决定着它必然要具有高度的抽象性、严谨的逻辑性和广泛的适用性等特点。

任何科学都具有抽象性，但是，数学的抽象与自然科学、

以及社会科学的抽象却有着重要的差异。因为数学的抽象是舍弃了任何特定的物质运动形态的质的规定性的抽象，因此它就必然要以“极度抽象的形式出现”①。

任何科学都要运用逻辑工具，但是，数学对逻辑性的要求，与其它学科也有所不同。这是因为，数学的对象是表现为思想事物的纯粹的量，是具有高度抽象性的量，所以，在阐述数学概念、确认数学理论、形成数学体系时，就不能借助于可重复的实验等等来实现，而是必须借助于严谨的逻辑结构来实现。从科学发展的历史中，我们可以看到，古代最早形成具有较为严谨的逻辑体系的学科，出现在数学中；现代最早形成以公理法为标志的具有严密逻辑结构的学科，也出现在数学中；卓有成效地推广应用这种思想，也以数学各个分支学科为最多；反过来，逻辑学为达到其自身体系的严谨性，又要借助于数学的表现形式。当然，我们说数学具有严谨的逻辑性，并不是说现代所有数学分支都已经做好严格的逻辑奠基工作，更不是说某些新数学分支在其开始建立还没有做好严格的逻辑奠基工作时，就没有价值，就不那么重要。事实上，逻辑奠基工作，总是在一个学科发展到一定阶段时才能完成的。

任何一门科学都有其重要的应用，但是，数学的适用范围更加广泛。这是因为，数学所研究的量及其关系，不只存在于某一特定的物质运动形态，而是普遍地存在于各种物质运动形态之中，因而它能够应用于各种物质运动形态的研

---

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版，第35页。

究。另一方面，对于某种特定物质运动形态的质的规定性进行研究时，也是只有通过对该事物的量的研究，才能更好地把握该事物质的变化及其规定性。马克思曾经指出，一门科学只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了。①科学发展的历史，不断地证明着马克思这一论断的正确性。

依据辩证唯物主义的观点来研究数学的对象和特点、数学发生和发展的规律、数学思想和哲学流派的关系、数学内容的现实原型和辩证性质等等问题，是很有意义的工作。马克思、恩格斯对这些问题，曾作过精辟的论述；许多数学家、哲学家对这些问题也进行了很多的研究。我们这本小册子不可能对范围这样广泛的问题逐一进行探讨，这里仅就数学的客观基础、数学概念的辩证性质、数学运算的对立统一、数学中的几对重要矛盾、十九世纪以来数学的某些进展及其特征等问题，进行一些初步的讨论。

---

① 转引自：《哲学研究》1979年第一期，胡世华《质与量的对立统一与数学》中的译文。

一、关于数学的客观基础

数学采用着各种抽象的符号筑起自己的“王国”。它在现实世界中的各方面有着广泛的应用，以致在现代科学技术中，如果不借助数学，不与数学发生关系，就不可能达到应有的精确度与可靠性。为什么数学能有如此广阔的用场？只有正确地认识数学的客观基础，才能对这个问题作出科学的回答。下面，我们仅从数学与现实世界、数学理论与实践的关系以及数学公理方法等三个方面对数学客观基础进行一些初步的探讨。

（一）数学与现实世界

数学与现实世界有没有关系，有怎样的关系？这是数学家、哲学家长期探索并存有争议的一个问题。对这个问题的种种看法可以归结为：纯数学产生于纯思维呢？〔注〕还是纯数学是某种起源于经验、是来自外部世界然后又脱离外部世

〔注〕认为纯数学产生于纯思维是唯心主义的观点。唯心主义认为，纯数学根本与现实世界无关，可以先验地、即不利用外部世界给我们提示的经验而从头脑中构思出来。如乔治·贝克莱（1684—1753）认为“数目是人心的产物”。伊曼努尔·康德（1724—1804）认为“严格的数学命题都永远是先天的判断，而非经验的判断，因为它们具有不能来自经验的必然性。如果有人对这还有异议，我愿意把我的论断限于纯数学，纯数学这个概念就暗示着它不包含有经验的知识，只包含纯先天的知识”。

界的东西呢？数学发展的历史事实告诉我们，现实世界的空间形式和数量关系是纯数学的研究对象，因而是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现，它是对现实世界的能动反映

整个数学大体上是围绕数与形这两个概念的提炼、演变与发展而发展着。然而数与形这两个概念的起源离不开现实世界为我们提示的经验与材料。数的概念起源于数(读shǔ)。要数就得有被数的现实物体为对象。原始人采用“结绳记数”，就是把猎获物等现实物体集合与绳子结的集合进行比较，比较的结果表明猎获物个数正如绳子的结那样多。不少原始部落中尚残留有用手指脚趾计数的遗迹，这种遗迹在一些民族的语言中还或多或少地保留着。世界各民族中多习惯地采用着十进制记数法，这与最初用十个手指计数有着密切的联系。正如恩格斯所分析的：“人们曾用来学习计数，从而用来作第一次算术运算的十个指头，可以是任何别的东西，但是总不是悟性的自由创造物。为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果。”① 形的概念的起源也是如此。早在人类出现之前，自然界的物体就以各种形状存在着。人类出现以后，正是在采集果实、打造石器、烧土制陶等活动中，对各种物体形状加以比较，区分直曲方圆，才逐渐形成了形的概念。例如，我国古代仰韶文化中彩陶上除了一些动物花纹外，还有一些定型的或由三角形和直线组成，或由圆和曲线组成的

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版，第35页。

图案。①

随着数学的发展，数学问题的来源表现为多种多样的途径和极其复杂的情况。它可以通过生产、生活从外部现象世界提出；也可以由数学自身纯粹逻辑地提出，比如著名的“哥德巴赫猜想”、“费尔玛猜想”〔注〕都是这样的例子。其中，大多数数学分支中那些最初、最老的问题，多是起源于经验，是由外部的现象世界所提出。整数运算法则、最初的几何问题（如二倍立方问题、化圆为方问题）都是以这种方式在人类文明的早期被发现的。微积分的产生有着明显的实际背景，最初求导数的“流数法”，就是人们“纯粹实验地发现的”。② 由于圆周摆的周期与运动的振幅不是严格无关的，于是就要求寻找一条曲线，使得摆锤沿这条曲线摆动的周期与振幅严格无关，这个问题激发起惠更斯等人对摆线研究的兴趣。数学家欧拉曾奠定“网络论”几何学的基础，而欧拉研究这一问题的始因，则是解决哥尼斯堡城的“七桥问题”。③ 概率论的研究最初是由于保险业的发展，但是鼓舞伟大数学家思索的专门问题却来自以骰子和纸牌赌博的贵族们的要求。④ 同样，象数值方程的解、曲线论、福里叶级数和位势理论中那些最初的问题也都是由外部世界提出来的。应用数学最初更是直接导源于解决现实世界中提出的各种实际课题。总之，数学是某种起源

---

① 李俨、杜石然：《中国古代数学简史》（上册），中华书局1963年，第5页。

② 马克思：《数学手稿》，人民出版社1975年版，第86页。

③ 邱关源：《网络图论简介》，人民教育出版社1978年版，第1页。

④ D.J.斯特洛伊克：《数学简史》，科学出版社1956年版，第88页。

〔注〕费尔玛猜想是指“方程$x^n+y^n=z^n$（n为大于2的整数）没有正整数解”。这个问题自提出至今300年来，还没找到一般的证明。

于经验的东西，是来自外部世界的。

然而，数学对现实世界的反映是能动的。现实世界的量的规定性并不是以孤立的形式出现的，是与质的规定性结合在一起的。物理、化学等自然科学的抽象，总要保留物质的某一种质的属性，而数学的抽象则要撇开现实世界事物的各种质的属性，从而得到完全脱离自己内容的纯粹量的关系。因此，数学较其它自然科学具有更为抽象的形式。由现实世界抽象得来的数学概念表现为一种“思想事物”的形式，这种“思想事物”就成了数学研究中所直接处理的对象。并且只有采用逻辑的方法才能对它进行研究。进一步研究这些纯粹量之间的变化、相互关系可以发展出一系列更为抽象的概念，诸如虚数、多元数、理想数、四维空间、……得到了一系列思维的创造物与想象物。现代数学中逻辑命题的关系、函数空间的距离与极限关系、各种变换之间符合于群的规则的乘法关系都被当作研究的对象。抽象思维可以把握人们直接感觉不到的各种数量关系，甚至可以精巧地构造出在实轴上处处连续处处不可微的函数① 以及在[0,1]上有理点间断无理点连续的函数②，等等。思维的能动作用使数学“王国”开满了绚丽的抽象思维的花朵。数学表现出极度抽象的形式，成为与现实相对立、脱离外部世界的东西。

思维能动的自由创造，是由来自经验的初始概念和原理的有意识的合乎逻辑的发展。数学通常可以不受来自外部的

---

①参见Г.M.菲赫金哥尔茨：《微积分学教程》(第二卷第二分册)，人民教育出版社1954年版，第431—432页。

②参见H.H.鲁金：《实变函数论》，高等教育出版社1954年版，第222页。

明显影响，凭借经验的摸索、巧妙的想法开发出数学“王国”中丰富的宝藏。数学中的量，严格说来都是想象的数量，有些量甚至是幻想的。正如列宁所说：“在数学上也是需要幻想的，甚至没有它就不可能发明微积分。”① 比如微分三角形就是一种幻想的量，由于处理差分三角形经验的启示，通过思维的加工制作，才创造出一种处于纯粹状态的微分三角形。模拟三维空间，人们创造性地提出 n 维空间、无限维空间甚至更为一般的抽象空间的概念。思维的能动创造力，使数学的广阔天地日新月异地发展变化着。

虚数产生的历史生动地表明数学与现实世界的辩证关系。在十六世纪三十年代，人们找到了求解一元三次方程的一般法则，最早记载于卡尔丹的著作《重要的艺术》(1545年)中②

对于三次方程 $x^3+mx=n$ （1）

引入 t 与 u 两个辅助量，且令

$$t-u=n \tag{2}$$

以及

$$(tu)=\left(\frac{m}{3}\right)^3 \tag{3}$$

利用（2）、（3）消元解法所得的二次方程，得出

$$t=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}+\frac{n}{2} \tag{4}$$

$$u=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}-\frac{n}{2} \tag{5}$$

---

① 《列宁全集》，人民出版社1959年版，第33卷，第282页。

② M.克莱因：《古今数学思想》(第一册)，上海科学技术出版社1979年版，第13章。

可以验证 $$x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u} \tag{6}$$
即为方程(1)的一个根。

在解(1)型的三次方程时，卡尔丹遇到了所谓"不可约情形"：当(4)、(5)不能在实数范围求出t、u的情况下，三次方程(1)却有正实根。例如方程$x^3-15x=4$，容易检验有实根$x=4$，可是由于$\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-15}{3}\right)^3}=\sqrt{-121}$为实数范围内不能允许的运算，因此当时的人们无法利用公式(4)、(5)求出t与u的值，所以也就无法利用公式(6)来计算方程的根。但若从$(\sqrt{-1})^2=-1$出发，将$\sqrt{-1}$依实数运算法则进行运算时，却推算出了$x=4$这一正确的结果。[注]正是解一元三次方程所得到的经验提示人们把$\sqrt{-1}$设想成一个"数"——虚数。可见，$\sqrt{-1}$虽不是直接从现实世界中得来，然而它并不是"先验"的产物。1572年意大利数学家邦别利确立了复数(形如$a+bi$的数，其中a，b为实数，i为虚数单位，邦别利当时用R表根号，m表减号，他把$3i$记成R〔0m9〕即$\sqrt{0-9}$)的运算。此后，人们类比实变数函数建立了复变数的函数。后来复数找到了几何解释并在流体力学中得到了成功的应用，证实了$\sqrt{-1}$确实是现实世界数量之间的一种合理的相互关系。这一事例说明：数学以最纯粹的形式体现了人的认识的主观能动性。

〔注〕：由公式(4)、(5)求得$t=2+11\sqrt{-1}$，$u=-2+11\sqrt{-1}$。

$\because\ 2+11\sqrt{-1}=(2+\sqrt{-1})^3$，$-2+11\sqrt{-1}=(-2+\sqrt{-1})^3$

$\therefore \sqrt[3]{t}=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}$，

$\sqrt[3]{u}=\sqrt[3]{-2+11\sqrt{-1}}=-2+\sqrt{-1}$。

由 $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$得出

$x=(2+\sqrt{-1})-(-2+\sqrt{-1})=4$

外部世界的量的关系，经过思维加工，最后得到极其抽象的思维的创造物和想象物。数学的抽象只是形式上与现实相对立，在内容上仍与现实世界有着密切的联系。不少抽象的数学内容在现实世界中可以找到它们的原型，平面几何中图形的全等，就是反映了把两个现实对象互相贴附在一起的实际操作过程。数学上微分与积分是抽象的概念，在自然界中恰恰存在着与其相似的原型。①纤维丛是很抽象的数学理论，表面看来与物理世界的结构无关。实际上，规范场（电磁场是它的最简单的例子）的概念是和纤维丛理论里一些数学概念完全类同的。由于数学家发展丛的理论完全没有涉及对物理世界的认识问题，杨振宁曾和陈省身谈及自己的感想，他说："这既令人惊奇又令人困惑，因为你们数学家能无中生有地幻想出这些概念。"陈省身立刻解释道："非也，非也，这些概念并不是幻想出来的。它们是自然的，而又是真实的。"〔注〕这件事对我们认识数学与现实世界的辩证关系是很

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年版，第243—249页。

〔注〕

规范场术语	丛的术语
规　　范（或球面规范）	主坐标丛
规范型	主纤维丛
……	……
电磁现象	U_1上的联络
……	……
电磁理论（不带有单极子）	平凡的U_1丛的联络
电磁理论（带有单极子）	非平凡的U_1丛的联络

全表及引文见杨振宁：《磁单极、纤维丛和规范场》，载《自然杂志》第2卷第1期（1979.1）。

富教益的。

数学的极度抽象更深刻地反映着现实。数学的抽象使人们逐步达到了事物量的关系的本质联系，反映着各种不同类型的具体对象中量的共同的规律，因此数学才可以广泛应用到各种不同的具体对象中去。比如，二次函数$y=\frac{1}{2}ax^2$，它可以描述自由落体的运动（$S=\frac{1}{2}gt^2$），也可以描述运动物体的动能（$E=\frac{1}{2}mv^2$），在几何中它又可以表示半圆的面积（$A=\frac{1}{2}\pi r^2$）。同样，导函数

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

这一抽象的形式可以刻划物体运动瞬时速度，也可以刻划切线的斜率、物质的比热、电流的强度。再如，双曲型偏微分方程，在弹性力学中描写振动，在流体力学中描写流体动态，在声学中表现为声压方程，在电学中表现为电报方程。双曲型偏微分方程，反映着这些不同对象在数量上的共同属性。正如列宁所说："自然界的统一性显示在关于各种现象领域的微分方程式的'惊人的类似'中。"① 数学的高度抽象性反映着物质多样性中的统一性，这形成了数学在现实世界中有着广泛适用性的特点。正由于数学的高度抽象性与其广泛适用性的辩证统一，使数学成为打开一切科学大门的钥匙。不仅所谓精确科学，如物理学、化学等已越来越需要较多较

① 列宁，《唯物主义与经验批判主义》，人民出版社1960年版，第289页。

深的数学，甚至过去认为以描述为主、与数学关系不大的生物学、经济学等，也处于日益'数学化'的过程之中。数学抽象思维的每一项认真的、能够揭示某种规律性的贡献，不论它是否出自明显的应用目的，迟早是会得到重要应用的。公元前200年希腊几何学家阿波洛尼乌斯的"圆锥曲线论"，是经过1800年才找到了在光学抛物镜研究和天体运动理论中的具体应用。一些数学抽象理论一时找不到应用，往往是生产技术与科学实践还未达到它可应用的水平。

数学发展中，纯粹思维的能动作用与不断汲取现实世界的真实关系反复相互作用、相互交错地进行着。诚如有的数学家所说："当纯思维的创造力进行工作时，外部世界又重新开始起作用，通过实际现象向我们提出新的问题，开辟新的数学分支。而当我们试图征服这些新的、属于纯思维王国的知识领域时，常常会发现未曾解决的问题的答案，这同时就极有成效地推进着老的理论"。①思维与现实的相互作用是辩证的。人的认识不是沿直线前进，而是无限地近似于一串圆圈、近似于螺旋的曲线。夸大认识的某一局部，就会产生片面性。把数学的高度抽象性片面夸大以致走向极端，往往导致否定数学的客观基础；同样，看不到思维对现实反映的能动性，就会对数学陷入机械唯物论的认识。这两种片面性在理论与实践上对数学的发展都是有害的。只有在思维与现实世界的辩证统一中才能把握住数学的本质与特点。

---

① 〔美〕C. 瑞德：《希尔伯特传》，见《科学与哲学（研究资料）》1979年第1期，第143页。