复变函数论教程

莫 叶 编

山东大学出版社

复变函数论教程

莫 叶编

山东大学出版社

复变函数论教程

莫　叶　编

山东大学出版社出版

山东省新华书店发行　　山东大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32　印张 7.5　字数 200 千字

1985年2月第1版　　1985年2月第1次印刷

印数：1—10,0000

统一书号：13338·2　　定价：1.95元

内 容 提 要

本书叙述了复变函数的基本知识，内容包括 复数，初等 函数，保角变换，台劳级数及劳兰级数，留数计算，平面流 动等；可作为大学 理工科及师范院校复变函数课程的试用教材。

序

本书以哥西定理为核心，讨论解析函数的性质；为了贯彻理论联系实际的原则，着重讨论了解析函数理论在留数计算，保角变换及平面流动中的应用。

限于篇幅及教学时间，复变中有些较深的内容，如二重级数与无穷积的敛散判别法，调和函数的性质，解析函数的模与其零点的模的关系，在单位园内已标准化单叶函数的系数估计，幂级数在收敛圆周上的性质，以及整函数与特殊函数理论，均未列入；读者希望继续学习这方面的内容，可以参阅山东科技出版社出版的作者所编的复变函数论，该书叙述由浅入深，力求易懂，便于自学。

1984年7月在青岛曾邀请魏　远，唐焕章，蒋光平，仪洪勋，邵敏娟，陈　逸，蒋润荣，林瑞霖，羌树锋，王自鉴，张　歧，郑乃法等同志对初稿进行讨论，提出许多宝贵意见，在此，向他们表示谢意。

限于编者水平，错误之处，在所难免，尚希读者不吝指正。

莫　叶　于济南山东大学

1984年8月

目　　录

序

引言……………………………………………………… 1

第一章　复数………………………………………… 3

§1．代数运算……………………………………… 3

§2．共轭复数与绝对值…………………………… 4

§3．无穷远点……………………………………… 9

§4．平面点集……………………………………… 10

§5．复数序列……………………………………… 13

§6．实数序列的上限及下限……………………… 14

§7．复数无穷级数………………………………… 18

习题一……………………………………………… 22

第二章　复变数函数………………………………… 25

§1．连续函数……………………………………… 25

§2．哥西 — 黎曼微分方程………………………… 27

§3．解析函数及调和函数………………………… 34

习题二……………………………………………… 37

第三章　初等函数…………………………………… 40

§1．代数函数与超越函数………………………… 40

§2．指数函数……………………………………… 41

§3．对数函数……………………………………… 47

习题三……………………………………………… 53

第四章　保角变换…………………………………… 56

§1．导数的几何意义……………………………… 56

§2．线性变换……………………………………… 59

§3. 幂函数变换……………………………………………… 71
§4. 茹可夫斯基变换……………………………………… 76
§5. 指数函数变换………………………………………… 90
习题四………………………………………………………… 97
第五章　哥西定理……………………………………………102
§1. 复变积分……………………………………………… 102
§2. 哥西定理……………………………………………… 109
§3. 哥西积分公式………………………………………… 115
§4. 摩勒尔定理…………………………………………… 121
§5. 李乌威尔定理………………………………………… 126
§6. 波阿松积分公式……………………………………… 128
习题五………………………………………………………… 130
第六章　解析函数项级数…………………………………… 133
§1. 外氏二重级数定理…………………………………… 133
§2. 台劳级数……………………………………………… 137
§3. 劳兰级数……………………………………………… 150
§4. 孤立奇点……………………………………………… 163
§5. 解析延拓……………………………………………… 171
习题六………………………………………………………… 176
第七章　留数定理…………………………………………… 179
§1. 留数…………………………………………………… 179
§2. 求留数的方法………………………………………… 182
§3. 求定积分……………………………………………… 185
§4. 解析函数零点的个数………………………………… 190
§5. 保存开域原则………………………………………… 195
习题七………………………………………………………… 197
第八章　平面流动…………………………………………… 201
§1. 势函数………………………………………………… 201

§2. 绕柱体流动…………………………………………………………… 209
习题八……………………………………………………………………… 220
总复习题……………………………………………………………………220
人名译音……………………………………………………………………226
参考书目……………………………………………………………………226

复变数函数论

引　言

数之最基本者为正整数，如1，2，3，…．正整数相加，仍为正整数。如可用减法，则必加扩充，成为整数，包含1，2，3，…，－1，－2，－3，…及0．整数对加减乘三法而言，虽为封闭，即整数加减乘之后，仍为整数；但若加以除法运算，则仍感不够；再加扩充，成为有理数，如-2，$\frac{4}{3}$，$-\frac{1}{5}$，….

有理数对加减乘除四则运算虽然封闭，但仅有有理数，不能解一般代数之方程，即就

$$x^2 = 2$$

而言，在数学分析中已证明，其根不为有理数．所以有理数仍感不够，再加扩充，成为实数，如1，2，$-\sqrt{2}$，π，e，…．因任何实数的平方恒为正数，故

$$x^2 + 1 = 0$$

无实数根。所以对解一般代数方程而言，实数仍感不够，再加扩充，成为复数，其形式为：

$$a + bi,$$

此处a及b代表实数，而i则有

$$i^2 = -1$$

的性质。实数及复数各对四则运算为封闭；且有复数后，在理论上，任何代数方程均有解。

设x，y为两独立实变数，则$z = x + yi$称为复变数。在本书中，将研究复变数函数的性质。复变数函数的应用极广，在实用数学方面，如理论物理，流体动力学，弹性理论，天体力学，

电磁学，自动控制，…；在纯粹数学方面，如代数，解析数论，微分方程，积分方程，…，均需要复变数函数的知识。

复变数函数的理论，具有特殊功用。例如，在实数范围中，负数的对数，失去意义。但是在复数的范围中，我们就可以定义负数的对数。又如，就实变数而言，三角函数与指数函数，或者双曲线函数，没有任何联系；但是，在复变数的情形下，它们就有密切联系。

最后再举一例。设 x 为实变数，则展开式

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

仅当 $|x|<1$ 时成立。但函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 对 x 取任何实值，均有确定的值；$x=-1$，$x=1$ 并非此函数的特别值。当 $|x|\geqq 1$ 时，级数

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

不再收敛，这与函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 的性质究竟有何种关系，在实数范围中，殊不易发现。但掌握复变数函数理论后，此关系一望即知。

下列符号，将于本书中时常采用：

$\in$ ……………属于

$\exists$ ……………此处有

$\longrightarrow$ …………推出

$\longleftrightarrow$ …………推出及被推出

第一章 复 数

§1.代数运算

1.1. 设x，y为两实数，则$z=x+iy$表复数，此处$i^2=-1$；x称为z的实部，以$\mathrm{R}(z)$表之；y称为z的虚部，以$\mathrm{I}(z)$表之。两复数的实部及虚部各顺次相等，则称两复数相等。

1.2. 在高等代数中已建立复数的四则运算。设

$$z=x+iy,\qquad z'=x'+iy';$$

则

$$z+z'=(x+yi)+(x'+y'i)=(x+x')+(y+y')i,$$
$$z-z'=(x+yi)-(x'+y'i)=(x-x')+(y-y')i,$$
$$zz'=(x+yi)(x'+y'i)=xx'-yy'+(xy'+yx')i.$$

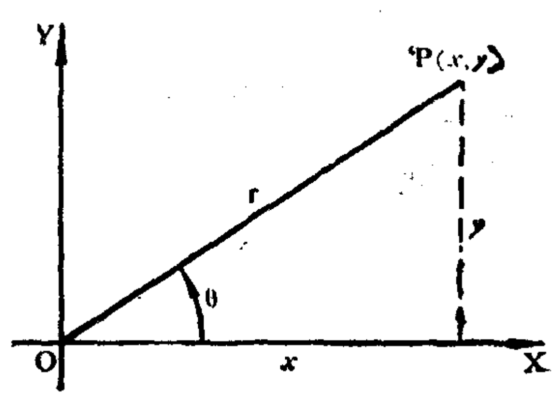
设$z'\neq 0$，则

$$\frac{z}{z'}=\frac{x+yi}{x'+y'i}=\frac{xx'+yy'+(x'y-xy')i}{x'^2+y'^2}.$$

所有实数四则运算规则，如交换律、结合律、分配律等，均可应用于复数；惟须特别注意$i^2=-1$而已。

按照实部及虚部的定义甚易得出

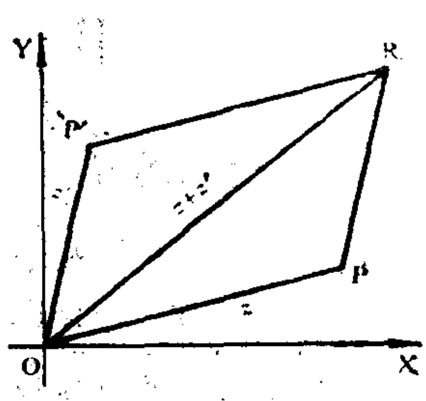
$$\mathrm{R}(z+z')=\mathrm{R}(z)+\mathrm{R}(z').$$
$$\mathrm{I}(z+z')=\mathrm{I}(z)+\mathrm{I}(z').$$



1.3. 复数$z=x+iy$可以直角坐标中的点$P(x,y)$

表之，亦可以向量OP表之。此处O为原点，XOY面称为z面，X轴称为实轴，Y轴称为虚轴。

将复数z，z'顺次用向量OP，OP'表之。按照平行四边形规则求向量OP及OP'的和，得OR；则显然向量OR及点R均表复数$z+z'$。



表复数$-z'$的点$(-x',-y')$与表复数z'的点(x',y')对原点对称。因此已知z'，即可作表$-z'$的点及向量；于是可按照平行四边形加法规则，作表$z+(-z')$的向量，即得表$z-z'$的向量。

§2. 共轭复数与绝对值

2.1. 极坐标与直角坐标的关系为$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，因此复数$z=x+iy$可写作$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，此处$r=(x^2+y^2)^{1/2}$称为$z$的绝对值，$\theta$称为$z$的辐角，顺次用$|z|=r$及$\mathrm{Arg}z=\theta$等符号表之。$|z|$的值确定，不小于0，$\mathrm{Arg}z$的值可有无限个。辐角通常用主值，记作$\arg z$，$\arg z$满足不等式$-\pi<\arg z\leqq\pi$。若$|z|=0$，则$x=y=0$，此时$\mathrm{Arg}z$的值不定。

按照实部、虚部及绝对值的定义，立即得下列二不等式：

1) $-|z|\leqq\mathbf{R}(z)\leqq|z|$.

2) $-|z|\leqq\mathbf{I}(z)\leqq|z|$.

2.2. $x-iy$称为$z=x+iy$的共轭复数，用$\bar{z}$表之。下列关系，均易获得。

1) $\bar{\bar{z}}=z$,

2) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$,

3) $\overline{zz'}=\bar{z}\bar{z}'$,

$$4)\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar z}{\bar z'},\quad z'\neq 0,$$

$$5)\ |z|^2=z\bar z,$$

$$6)\ 2\mathrm{R}(z)=z+\bar z,$$

$$7)\ 2i\mathrm{I}(z)=z-\bar z.$$

此处仅举3）的证明，以作示范。

设$z=x+iy$，　$z'=x'+iy'$，则

$$zz'=xx'-yy'+i(xy'+yx'),$$

于是

$$\overline{zz'}=xx'-yy'-i(xy'+yx'),$$

所以

$$\begin{aligned}\bar z\bar z'&=(x-iy)(x'-iy')\\&=xx'-yy'-i(xy'+yx')\\&=\overline{zz'}.\end{aligned}$$

应用上述关系，下述两定理有较简洁的证明。

定理1．两复数乘积的绝对值等于其绝对值的乘积。

〔证〕设此两复数为z及z'，则

$$|zz'|^2=(zz')(\overline{zz'})=(z\bar z)(z'\bar z')=|z|^2|z'|^2,$$

因绝对值不为负数，故$|zz'|=|z|\,|z'|$.

如用直接证明，则较复杂，如下所述：显然

$$|z|=(x^2+y^2)^{1/2},\quad |z'|=(x'^2+y'^2)^{1/2}.$$

又

$$zz'=xx'-yy'+i(xy'+yx').$$

所以

$$|zz'|=\{(xx'-yy')^2+(xy'+yx')^2\}^{1/2}.$$

将上式中平方和化简可得

$$|zz'|=\{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)\}^{1/2}=|z||z'|.$$

定理2　两复数和的绝对值不超过其绝对值的和。两复数差的

绝对值不小于其绝对值的差的绝对值。

〔证〕从共轭复数的性质以及实部与绝对值的不等式可得

$$
\begin{aligned}
|z+z'|^2 &= (z+z')\ (\overline{z+z'}) = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') \\
&= z\bar{z}+z'\bar{z}+z\bar{z}'+z'\bar{z}' \\
&= |z|^2+|z'|^2+z\bar{z}'+\overline{z\bar{z}'} \\
&= |z|^2+2\mathbf{R}(z\bar{z}')+|z'|^2 \\
&\leqq |z|^2+2|z\bar{z}'|+|z'|^2 \\
&= (|z|+|z'|)^2;
\end{aligned}
$$

所以

$$|z+z'|\leqq|z|+|z'|.$$

我们还可注意此结果可推至多个复数，如

$$|z+z'+z''|\leqq|z|+|z'|+|z''|.$$

同理

$$
\begin{aligned}
|z-z'|^2 &= (z-z')(\overline{z-z'}) \\
&= |z|^2-2\mathbf{R}(z\bar{z}')+|z'|^2 \\
&\geqq |z|^2-2|z\bar{z}'|+|z'|^2=(|z|-|z'|)^2;
\end{aligned}
$$

所以

$$|z-z'|\geqq||z|-|z'||.$$

此定理可用几何方法证明：知道三角形两边和大于第三边，差则小于第三边；于是 作两复 数和及差的 图形，即可得出此定理。

〔**例一**〕求证任意一圆的方程可写成

$$az\bar{z}+bz+\bar{b}z+c=0,$$

此处a，b，c为常数，且a，c为实数，$a\neq0$.

〔解〕任意一圆的方程可写成

$$a(x^2+y^2)+2fx+2gy+c=0,$$

此处a，f，g，c为实常数，且$a\neq0$. 因

$$x^2+y^2=z\bar{z},\quad x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z});$$

故圆的方程可改写成

$$az\bar{z}+f(z+\bar{z})+\frac{g}{i}(z-\bar{z})+c=0,$$

即

$$az\bar{z}+z(f-ig)+\bar{z}(f+ig)+c=0.$$

令 $b=f+ig$，则$\bar{b}=f-ig$；于是得圆的方程为

$$az\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c=0.$$

〔**例二**〕证明下列不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\leqq\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2, \qquad (1)$$

此处a_k，$b_k(k=1, 2, \cdots, n)$为复数。

〔解〕设 λ 为一复数，其值以后确定。从共轭复数的性质立得

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k-\lambda\bar{b}_k|^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k-\lambda\bar{b}_k)(\bar{a}_k-\bar{\lambda}b_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{|a_k|^2+|\lambda|^2|b_k|^2-\lambda\bar{b}_k\bar{a}_k-\bar{\lambda}a_kb_k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2+|\lambda|^2\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2-2\sum_{k=1}^{n}\mathbf{R}\{\bar{\lambda}a_kb_k\}.$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2+|\lambda|^2\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2-2\mathbf{R}\{\bar{\lambda}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\}. \qquad (2)$$

若$b_1=b_2=\cdots=b_n=0$，则（1）的两端均为零；因而（1）取等号自然成立。若$b_1,b_2,\cdots,b_n$中至少有一个不为零，则$\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2>0$；于是可选取

$$\lambda=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big/\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2. \qquad (3)$$

以此代入（ 2 ）并注意

$$\mathbf{R}\{\bar{\lambda}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\}=\mathbf{R}\{(\overline{\sum_{k=1}^{n}a_kb_k})\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big/\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\}$$

$$=\mathbf{R}\{\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\Big/\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\}$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\Big/\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2,$$

立得

$$\sum_{k=1}^{n}\left|a_k-\lambda\bar{b}_k\right|^2=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2+\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\Big/\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2$$

$$-2\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\Big/\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2-\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\Big/\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2. \qquad (4)$$

因 $\sum_{k=1}^{n}\left|a_k-\lambda\bar{b}_k\right|^2\geqq 0$，故从（ 4 ）得

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2-\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\Big/\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\geqq 0.$$

以正数 $\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2$ 乘这不等式两端然后移项即得（ 1）。

从（ 4 ）还可以看出：当且仅当

$$\frac{a_1}{\bar{b}_1}=\frac{a_2}{\bar{b}_2}=\cdots=\frac{a_n}{\bar{b}_n} \qquad (5)$$

时，（ 1 ）方能取得等号；这时用（ 3 ）所定义的 λ 恰为（ 5 ）中的公比。

§3. 无穷远点

3.1. 在普通平面几何中，根本不谈无穷远点；所以两平行线无交点。在射影几何中，假设一平面的无穷远点，成一直线，称为无穷远线；于是两平行线亦有交点。在复变数函数论中，我们引进一个无穷远点以 $z=\infty$ 表之。在变换

$$z'=\frac{1}{z}$$

下，z 面变成 z' 面。显然 z 的绝对值愈大，则 z' 的绝对值愈小。兹规定 $z=\infty$ 为一点相当于 z' 面的原点者。

以后我们用 z 面表所有有限点，z 面加上无穷远点称为全 z 面。

3.2. 将复数用黎曼球面的点表之；则无穷远点，可以明显表出。

设球面

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1 \quad (1)$$

的赤道平面为 z 面，以球面的北极 $N(0,0,1)$ 为投影顶点。设 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 为球面上任意一点，但不为 N，联 NQ 交 z 面于点 $P(x,y)$，即得点 Q 在 z 面的投影。我们定义球面北极 N 的投影为全 z 面的无穷远点。于是建立球面的点（包括北极）与全 z 面的点（包括无穷远点）连续一一对应。因此复数亦可以球面的点表之。此种球面其点表复数，称为复数球面或黎曼球