数学物理方程

桂子鹏
康盛亮　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书主要介绍数学物理方程的建立和求解方程定解问题的方法。内容包括典型方程和定解条件、分离变量法、特殊函数及其在分离变量法中的应用、波动方程的达朗倍尔法、积分变换法、边值问题和格林函数法、二阶线性偏微分方程的分类与化简、数学物理方程的差分解法、变分法初步等。内容安排由浅入深，循序渐进，以利教学。每章都配备了适量的习题，并在附录中给出了全部习题的答案或解答，可作为高等工科院校教材。

责任编辑 李炳钊
封面设计 王肖生

数学物理方程
桂子鹏
康盛亮 编著
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
常熟偾滨印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张：11 字数：247千字
1987年9月第1版 1987年10月第1次印刷
印数：1—6600 科技新书目：152—297
统一书号：13335·037 定价：2.40元
ISBN 7-5608-0008-4/O·10

JYI/27/21

前　　言

数学物理方程是指自然科学和工程技术的各部门分支中出现的一些偏微分方程（也包括某些常微分方程、积分方程和微分积分方程等，有关这部分内容，本书不作论述）。这方面知识对于当代的工科大学生是很需要的。“工科数学物理方程”作为一门数学的基础课程已在很多高等工业院校里开设。学生通过对这门课的学习，可掌握数学物理方程中一些基本问题的解决方法，能为今后学习后继课程和进一步开拓知识面提供必要的基础。

本书是“工科数学物理方程”课程的一本教材，可供工科专业大学生必修或选修之用，也可以作为要想了解这方面知识的其他人员的一本自学用书。这本教材是我们以全国高等学校工科数学课程指导委员会在 1986 年制定的《“数学物理方程”教学基本要求》为指导，在原来使用多年的讲义的基础上，结合在教学中的经验进行修改和充实后编成的。本书包含了《基本要求》中所列的全部内容，且以此作为本书的主要部分而着重阐述。另外还包含一些可供不同要求的需要而选择使用的内容。

本书的核心内容是介绍数学物理方程的建立方法以及两种解数学物理方程定解问题的方法——分离变量法和达朗倍尔法，并且讨论了分离变量法必然涉及到的特殊函数——贝塞尔函数和勒让德多项式。我们把特殊函数和分离变量法紧密联系起来，从分离变量法引出特殊函数，在研究了特殊函数性质后又回到分离变量法中去应用。这些内容，即第一章到第四章，是最基本的内容。在教学中约可用 32～34 学时教完。另外，也编写其他的解法——积分变换法、格林函数法、差分方法和变分法初步，并且还有对二阶偏微分方程分类的内容。对于有较高要求的专业可以选学其中的一部分或全部。

我们在编写这本教材时，把基点放在学生仅学过工科的《高等数学》课程的基础上，尽力做到由浅入深、由易到难、由简到

繁、循序渐进，以便于读者自学。在超过所要求的基础的地方，我们尽量提供补充说明或列出参考资料。在本书中我们还配备了适量的题目供练习之用，并在附录中给出了练习题的答案或解答。

在编写本书过程中，黄烈德教授审阅了全稿，同济大学应用数学系的很多任课教师都为完善本书提出了不少宝贵的意见和建议，在此表示感谢。由于编者水平有限，书中一定还有缺点和不妥之处，恳切地期望读者批评指正。

编　者

1986.10　于同济大学

目　录

第四章　波动方程的达朗倍尔法（行波法）

第五章　积分变换法

第六章　边值问题和格林函数法

第一章 典型方程和定解条件

在研究物理、力学和工程技术问题时，常常能得到一些反映各物理量之间的相互制约关系的偏微分方程，这些方程通常称为数学物理方程。数学物理方程以物理、力学和工程技术问题作为研究的对象，它的任务在于要提供这些偏微分方程的解法。最好是获得解的表达公式，或者通过分析得到解的性质。

由于数学物理方程与具体问题有密切联系，因此，常可以从具体的物理现象中得到方程解法的启示。又因数学物理方程所研究的具体问题一般比较复杂，因而在解方程时要用到的数学工具也较多。这两个特点，在我们学习数学物理方程时是要注意的。

§ 1.1 典型方程的推导

在物理、力学、工程技术中，有一些问题所描述的物理现象可以用偏微分方程来进行数学描写。本节中，我们将通过几个不同的物理模型推导出三种典型的数学物理方程。这三种方程是本书的主要研究对象。

1.1.1 弦的横向微振动问题和弦振动方程

设有一根均匀柔软的弦，它在振动时弦上各点的位移方向与振动波的传播方向垂直，并且振动是微小的。假设，振动波的传播方向为 x 轴正向，位移 u 的方向就与 x 轴垂直。

记弦上点的坐标为 x。显然，位移 u 既与时间 t 有关又与点坐标 x 有关，它是关于变量 x 和变量 t 的二元函数，即 $u=u(x,t)$。要描述弦的横向微振动，只需求出位移函数 $u(x,t)$。现在，我们导出 $u(x,t)$ 应满足的数学关系式（见图 1-1-1）。

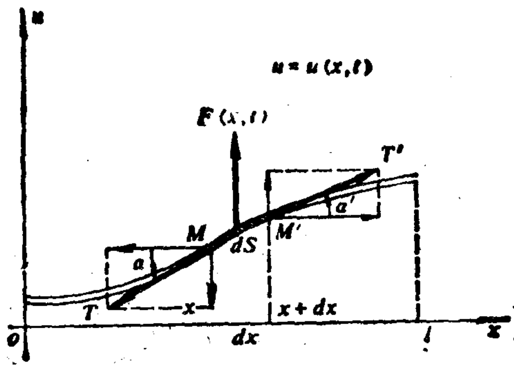

图 1—1—1

所谓弦柔软，是指弦在振动过程中，张力T很大且它的方向总是沿着弦的切线方向。从力学意义来说，柔软的弦是不抵抗弯曲的。所谓振动微小，是指弦在振动过程中，位移$u(x, t)$和它的偏导数u_x都很小，以至于u_x^2与1相比很小，在讨论中可以略去不计。

在上述假设下，长度为dx的微段弦（$x, x+dx$）在时刻t时的长度成为

$$ds=\sqrt{1+u_x^2}\,dx\approx dx,$$

即弦段的长度不变。因此，弦上各点仅在x轴的垂直方向上运动；而且，弦上x点处的张力T的大小与时间t无关（可用虎克定律推导）。

现取弦上任一微弧段$\overset{\frown}{MM'}$，其长为ds，M点和M'点的横坐标分别为x和$x+dx$，两端的张力分别记作T和T'。由牛顿定律，作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的加速度。所以，在x方向上有

$$T'\cos\alpha'-T\cos\alpha=0,$$

其中α和α'分别是弦段两端处的切线对x轴的倾角。由于是微振动，故

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1,$$

同样 $\cos\alpha' \approx 1$。于是

$$T' = T.$$

这表示张力T与点的坐标x也无关。因T既与t无关，又与x无关，故T为一常量。

再讨论在u方向上的情况。由于弦均匀，线密度是常量ρ，所以有

$$T\sin\alpha' - T\sin\alpha = \rho ds \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

注意到由 $\cos\alpha \approx 1$ 及 $\cos\alpha' \approx 1$ 推得 $\alpha' \approx 0, \alpha \approx 0$，且

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$\sin\alpha' \approx \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x},$$

$$ds \approx dx$$

故得

$$T\left[\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \rho dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

由于在方括号内的量是u关于x的一阶偏导数的由x的改变量dx引起的改变量，它可用微分来近似代替，即得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \\ &\approx \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]dx \\ &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx. \end{aligned}$$

于是

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx = \rho dx \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

即

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

由于 $\rho>0$，$T\geqslant 0$，故可令 $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$，所以

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

或写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.1.1}$$

这个方程称为**弦的自由振动方程**。

如果在振动过程中，作用在弦上还有一个密度为 $F(x,\ t)$ 且以 u 的正向为力的正向的外力，那么 u 方向上的力的平衡方程为

$$Fds+T\sin\alpha'-T\sin\alpha=\rho\cdot ds\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

同理亦可推得

$$F+T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

若记 $f(x,\ t)=\frac{1}{\rho}F(x,t)$，则得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t). \tag{1.1.2}$$

这个方程称为**弦的强迫振动方程**。

方程(1.1.1)和(1.1.2)都称为**一维波动方程**。在(1.1.2)中多了一项与 $u(x,\ t)$ 无关的项 $f(x,\ t)$，这个项称为**自由项**。包含非零自由项的一维波动方程称为**非齐次**一维波动方程，自由项恒为零的一维波动方程称为**齐次**一维波动方程。显然，弦的自由振动方程是齐次的一维波动方程，而弦的强迫振动方程是非齐次的一维波动方程。

1.1.2 热量的传导和热传导方程

在一物体中，若体内每一点的温度不全一样，则温度较高处的热量就要向温度较低处流动，这就是热量的传导。关于热量传导有两个基本定律，一个是热量守恒定律，另一个是傅里叶

(Fourier)导热定律。我们来讨论傅里叶导热定律。考虑一根均匀细杆，它在沿杆长方向 x 有温度差。设在 x 点处温度为 u，在 $x+dx$ 处温度为 $u+du$（见图1-1-2）。实验表明，在杆中有导热现象，热量由温度高处流向温度低处，在单位时间内通过单位面积的热量 q 与温度 u 的下降率成正比，即

$$q=k\cdot\frac{u-(u+du)}{dx}=-k\frac{du}{dx},\tag{1.1.3}$$

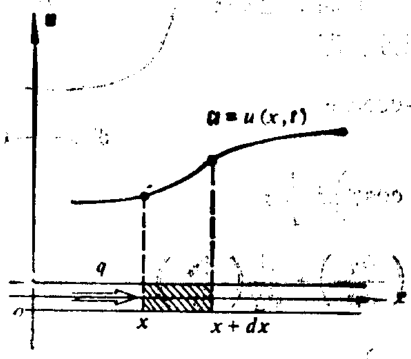

图 1—1—2

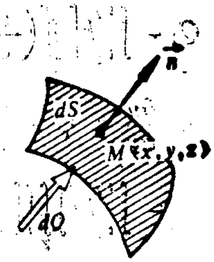

图 1—1—3

其中 q 称为**热流密度**，系数 k 称为**导热系数**。导热系数 k 与杆的质料有关，即与 x 有关，严格地说与温度也有关。若材料均质且温度改变不大，则 k 可看作常数。(1.1.3)是一维情况下的傅里叶导热定律。在三维情况下，傅里叶导热定律的表达如下：设物体在微小时间段 dt 内流过一个微小面积 dS 的热量是 dQ，则它与物体温度 $u(x,y,z,t)$ 沿曲面 dS 的外法线方向 $\vec{n}$ 的方向导数成正比，即

$$dQ=-k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dSdt,$$

其中 $k(x,y,z)$ 称为物体在点 (x,y,z) 处的**导热系数**，它应取正值。如果物体是均匀的，则 k 为常值（见图 1-1-3）。

下面来推导在热量传导过程中温度函数 $u(x,y,z,t)$ 应满足的关系。我们用积分方法来讨论。设物体中的某一点 $M(x,y,z)$

的温度为 $u(x,y,z,t)$。任取包含在物体 Ω 内部的一闭曲面 S，它所包围的区域 V 包含了点 M(见图1-1-4)。

由傅里叶导热定律，在时刻 t_1 到时刻 t_2 这段时间内，通过曲面 S 流入区域 V 的全部热量为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left[\oint\!\!\!\oint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\right]dt.$$

由高斯 (Gauss) 公式，把闭曲面 S 上的积分化成区域 V 上的三重积分，即

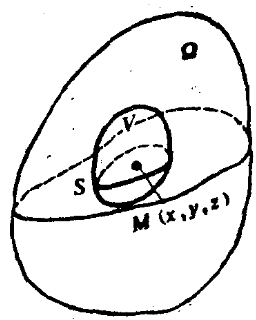

图 1—1—4

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}k\left[\oint\!\!\!\oint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS\right]dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}k\left\{\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dxdydz\right\}dt$$

$$=k\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dxdydzdt,$$

其中 α,β,γ 为 S 的外法向 $\vec{n}$ 的方向角。

另一方面，在时间 dt 内，区域 V 内各点温度从 $u(x,y,z,t)$ 变化到 $u(x,y,z,t+dt)$，于是在 dt 时间内由于升温所需的热量为

$$\iiint_V c\rho[u(x,y,z,t+dt)-u(x,y,z,t)]dV$$

$$\approx\iiint_V c\rho\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}dtdV,$$

其中 c 为物体的比热，ρ 为物体的密度。对于均匀物体来讲，c 和 ρ 都是常量。因此，从时刻 t_1 到时刻 t_2 这段时间内，由于升温所需的热量为

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV\right]dt.$$

由热量守恒定律，$Q_1=Q_2$，即有

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_V k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dxdydzdt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydzdt,$$

或 $$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_V\left[k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right]dxdydzdt=0.$$

由于时间段(t_1, t_2)和区域V是任意的，并且被积函数都是连续的，因此被积函数必然为零，即

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

因$c>0, \rho>0, k\geqslant 0$，故可记$a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$，得到方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (1.1.4)$$

这个方程称为**三维的齐次的热传导方程**。

如果在物体内部有热源，其强度为$F(x, y, z, t)$，那么，在时间(t_1, t_2)内在区域V上产生的热量为

$$Q_3=\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_V F(x,y,z,t)dxdydzdt.$$

此时，热量守恒定律是$Q_1+Q_3=Q_2$，可推得

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z,t).$$

若记$f(x, y, z, t)=\frac{F(x,y,z,t)}{c\rho}$，则得**三维的非齐次的热传导方程**：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t). \qquad (1.1.5)$$

与(1.1.5)相对应的齐次方程是(1.1.4)。

特别地，若物体为一细杆，或者温度 u 仅与 x 及 t 有关，则方程(1.1.4)及(1.1.5)就变成**一维的热传导方程**：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t).$$

若物体为一薄板，或者温度 u 仅与 x，y 及 t 有关，则方程(1.1.4)及(1.1.5)就变成**二维的热传导方程**：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t).$$

1.1.3 薄膜平衡问题和调和方程

设有一块薄膜，在垂直于膜面的方向有外力作用，由于薄膜无抵抗垂直于膜面的力的能力而产生位移，在达到一定的位移情况时，薄膜就处于平衡静止状态。不妨假设薄膜原处于与 xOy 平面平行的位置上，位移和外力均垂直于 xOy 平面，于是平衡时的位移函数为 $u=u(x,y)$。我们将要求出此函数，为此先导出 $u(x,y)$ 应满足的关系式。

设 Δ 是薄膜中的一小微块，它由空间曲线 λ 所围。这块薄膜在 xOy 平面上的投影为 Ω，它由平面曲线 Γ 所围。显然，曲线 Γ 是空间曲线 λ 在 xOy 平面上的投影。与弦振动问题的讨论相仿，在微块薄膜的四周都有张力 T 作用，它的大小是与位置无关的，而其方向是由下列办法来确定的（见图 1-1-5）。设 P 为微块边缘曲线 λ 上的一点，在这一点处薄膜曲面的外法

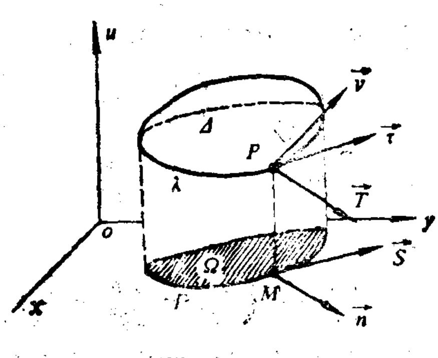

图 1—1—5

向记作 $\vec{\nu}$，空间曲线 λ 的切向记作 $\vec{\tau}$，则张力 T 的方向与 $\vec{\tau}\times\vec{\nu}$ 的方向一致。

因薄膜曲面方程为 $u=u(x,y)$，则外法向可取为 $\vec{\nu}=\{-u_x, -u_y, 1\}$。假定薄膜位移很微小，因此

$$|\vec{\nu}|=\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\approx 1$$

于是，$-u_x, -u_y, 1$ 就是法向量 $\vec{\nu}$ 的三个方向余弦。又曲线 Γ 的切向量

$$\vec{s}=\{\cos(x,s),\cos(y,s),0\},$$

故

$$\vec{\tau}=\left\{\cos(x,s),\ \cos(y,s),\ \frac{\partial u}{\partial s}\right\}.$$

由于

$$|\vec{\tau}|=\sqrt{\cos^2(x,s)+\cos^2(y,s)+u_s^2}\approx 1,$$

所以 $\cos(x,s)$，$\cos(y,s)$，$\dfrac{\partial u}{\partial s}$ 可作为切向量 $\vec{\tau}$ 的三个方向余弦。

张力 T 在 u 方向上的分量就是

$$\begin{aligned}|T_u|&=T\cdot(\vec{\tau}\times\vec{\nu})_u=T\left(u_x\cos(y,s)-u_y\cos(x,s)\right)\\&=T\left(u_x\cos(x,\vec{n})+u_y\cos(y,\vec{n})\right)\\&=T\cdot\frac{\partial u}{\partial n}.\end{aligned}$$

于是，沿着曲线 λ 的张力在 u 方向的合力为

$$\int_\Gamma T\,\frac{\partial u}{\partial n}ds.$$

假设外力密度是 $F(x,y)$，则薄膜微块 Δ 上承受的合力是

$$\iint_\Omega F(x,y)dxdy.$$

由力的平衡得到

$$\int_\Gamma T\,\frac{\partial u}{\partial n}ds+\iint_\Omega F(x,y)dxdy=0.$$

利用格林（Green）公式，把曲线积分化成二重积分，即得

$$\iint_\Omega\left[T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,y)\right]dxdy=0.$$

由于区域 Ω 的任意性及被积函数假定连续，就得到薄膜平衡方程

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,y)=0$$

若记$f(x,y)=\dfrac{F(x,y)}{T}$，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x,y).$$

当外力密度为零时，就有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

这个方程称为**调和方程**或**二维的拉普拉斯(Laplace)方程**；前面那个含有自由项的方程称为**泊松(Poisson)方程**。

另外，如果在热传导方程中，温度趋于平稳，即与时间t无关，那么$\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$，也可以得到**三维的拉普拉斯方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

和三维的泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x,y,z).$$

引进记号 $\triangle=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

或 $\triangle=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$,

称$\triangle$为三维或二维的**拉普拉斯(Laplace)算子**。则拉普拉斯方程和泊松方程可写为

$$\triangle u=0 \tag{1.1.6}$$

和

$$\triangle u=-f. \tag{1.1.7}$$

三维和二维的热传导方程可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\triangle u \text{ 及 } \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\triangle u+f.$$

如果注意到，在推导膜平衡方程中，还要考虑加速度引起的惯性力，那么，象推导弦振动方程那样，可以推导出薄膜振动方