概率论教程

〔美〕钟开莱 著 刘 文 吴让泉 译

上海科学技术出版社

概率论教程

〔美〕钟开莱 著

刘文 吴让泉 译

李志阐 校

上海科学技术出版社

内 容 简 介

本书是用测度论的观点论述概率论的专著．内容包括：分布函数，测度理论，随机变量、期望值、独立性，收敛概念，大数定律、随机级数，特征函数，中心极限定理及其分歧，随机徘徊，条件、马尔科夫性、鞅．本书不仅论述严谨、条理清楚、便于自学，而且在取材上充分考虑了进一步学习随机过程等方面的需要．每节后均附有习题以加深对书中内容的理解．凡学过概率论基础课程的读者均能阅读本书．

读者对象是大学数学系和应用数学系的高年级学生、研究生、教师及科技工作者．

责任编辑 唐仲华

概 率 论 教 程

〔美〕钟开莱 著

刘 文 吴让泉 译

李志阐 校

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　　上海东方印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 12.25　字数 323,000

1989年6月第1版　1989年6月第1次印刷

印数：1—5,000

ISBN 7-5323-0648-8/O·69

定价：7.95 元

前 言

这次再版对原版全书作了大量的补充及实质性的修改与非实质性的变动.熟悉原版的读者将因点缀了新的内容而高兴(或为此而烦恼).第四章和第九章的若干节已重写,以便这些材料更加适合于在随机过程中应用. 在此重申,本书是被设计成为各种有关的专门化学习之前的基本课程. 假如认真地对待其内容、包括练习,那么它有足够的材料来满足一学年的课程讲授. 另一方面,为适应各人的兴趣,标题的顺序允许有所变动. 例如,处理极限分布的第六、七章可以提到论述几乎处处收敛的第五章之前. 特别值得推荐的是在第五章甚至第四章的绝大部分之前,先学习第九章,在那里条件期望才迟迟露面. 这将更加符合尽早脱离独立性概念的近代潮流,而且可以随即转入到马尔可夫过程的范畴.

感谢许多读者告诉我有关原版的错误、含糊不清和废话之处.据不完全记载(对被遗忘的人表示歉意),他们是:Geoff Eagleson, Z. Govindarajulu, David Heath, Bruce Henry, Donald Lglehart, Anatole Joffe, Joseph Marker, P. Masani, Warwick Millar, Richard Olshen, S. M. Samuels, David Siegmund, T. Thedeen, A. Gonzalez Villalobos, Michel Weil 和 Ward Whitt. 修改稿大部分由 Ditlev Monrad 核对. 印刷校样由 David Kreps 和我独立地进行,有趣的是我们比较了勘误之处,看谁漏掉了什么. 但由于并不是原文的全部都受到同样的细阅,所以恳请新版的读者继续挑毛病. Martha Kirtley 和 Joan Shepard 打印了若干新材料. Gail Lemmond 负责最后一页一页地修补,并且通过她的热心照料,修订工作得以按时完成.

在这第三次印刷中,若干印错和错的地方(多半是次要的),已被更正.对此我要感谢下列诸位:Roger Alexander, Steven Carchedi, Timothy Green, Joseph Horowitz, Edward Korn, Pierre van Moerbeke, David Siegmund.

第一版的前言

一本数学教程既不是原材料的储存，也不是短文的随机选取．它应当对所考察的领域提供一个可供游览的园地和一条入门的途径．这样的教程理应带点主观性和尝试性．它既不在时间上静止不变，也不在空间上各处相似．处于作者的地位，教程应体现出他为综合如何学好和教好这一课程的哲理、信念和经验所做的努力．概率这个领域已是如此之广阔和多样，以致即使在这本入门书的水平上，也能有许多关于方向和发展的不同见解，它影响这本书的内容的选择与安排．由于要作必需的规定是困难的而且是不可靠的，因此人们往往借口"嗜好"来回避这个问题．但正如在音乐、文学或烹饪中一样，在数学中也有好的嗜好和不好的嗜好，因而涉猎数学的人必须准备接受批评．

也许在处理概率的书中强调"概率"这个词似乎是多余的．然而，一方面，过去常听到象"概率只是测度论的一章"这类似是而非的说法；另一方面，许多人仍然把概率作为某些分析，比如组合分析、傅立叶分析、泛函分析等等的一个前面部分．诚然，目前编写一本适当的概率教程，确实应当充分地应用这些学科并进行综合训练，而且也没有必要在概率与它们之间划一条严格的分界线．但是，不仅在所达到的最终结果上，而且在进行方法上，概率仍然与其工具和应用有所不同．这也许在进一步学习随机过程中看得最清楚，象本书这样的一般入门书中已经充分地明确这一点．

虽然概率论的许多概念是从应用科学中的具体模型产生的．不妨回想非常熟悉的事情如硬币和骰子，基因和粒子等，但基础数学教科书（本书假设是这样的教本）不能再沉迷于种种的应用，正如现代实变函数的课程不必探究弦的振动或热的传导一样．附带指出，仅仅从别的科学分枝中借用行话而不探讨它的真正问题，对概念的理解和技巧的掌握没有什么帮助．

最后声明,本书不是别种课程的前奏,并不沿着一条窄而直的道路通向任何单一的基本目标. 好在跟数学的某些其他领域不同,在概率论中没有任何东西值得如此专门对待. 恰恰相反,一本概率论基本教程应当呈现出这一领域的广阔前景,并为学生能进一步进行各种学习和研究作好准备. 为此,他必须吃透概念,练习方法,并持之以恒地深入钻研,获取收益.

现在对全书九章作一个简单的说明,同时对阅读和讲授提出一些建议. 第一、二章是作预备的. 在第二章给出了必需的"测度和积分"纲要,以及对概率论来说是必不可少的补充. 第一章实际上是初等实变函数的复习,虽然这要花点时间,但具有适当基础的读者将可以迅速而自信地读完它,并有所收益. 对于课堂讲授可从第二章开始,并在适当的时候插入第一章的内容. 第三章纯粹是介绍概率论的语言和结构,但我把它的内容限制在必不可少且可行的范围内,而将某些重要扩张,如推移和条件期望,放到第八、九章. 这是为了避免因写进那些不经常应用而显得没有意义的定义和一般性质使本章过长. 第四章可以认为是适用于概率的实函数论之概念和技巧的综合. 第五章才是读者首次遇到真正的概率的定理的地方. 那里显示的一些著名里程碑也还为引进该学科的一些独特方法服务. 为了对付新老问题的挑战, 第六章发展了一些主要分析武器,即傅立叶和拉普拉斯变换. 它提供了迅速试验这些武器的场地,而主要战场要放到第七、八两章. 第七章着手介绍古典概率论的所谓"中心问题". 虽然时代在前进,这个舞台的中心已有所转移,但这个主题无疑地保留着至高无上的成就. 第八、九章以某种深度陈述了(离散参数)随机过程的两个不同方面. 第八章的随机徘徊说明了概率论转化其他数学分枝的一个途径. 它通过引进过程的轨道而把静态转化成动态结构. 由于引入马尔科夫过程理论,在位势理论中目前正在发生一场相同的革命. 在第九章我们又回到基本原理,同时在较广泛的新方向上锤炼. 虽然只能用有限的篇幅来介绍马尔科夫过程,但鞅已成为认真研究现代工作所不可缺少的工具,我们在此作了充分讨论. 这些论题

宁可放在书末而不放在书首(它们完全可以放到书的开头)，这个事实表明我相信学数学的学生在学习新东西之前学习一些老的东西是更有益的.

由第二、三、四章，第五、六章的部分以及第九章的前1或2节，可以构成一个较短的课程. 作为一本内容丰富的书，最后三章的实质部分应当丝毫不漏地给出来. 具有扎实基础的班级，第一、二和四章无须细讲. 相反，第二章可以补充那些在正式的教科书中容易找到的证明. 作为对真正概率论优美而不贫乏的介绍，我希望此书对成熟的数学家也能有所裨益.（他们常常就停留在快要产生兴趣之前!）这样的读者可从第三章开始，第四章只要匆匆一阅便可立即跳到第五章，浏览第六章，然后认真学习以后几章，以获得该学科的真实感受.

关于内容取舍的若干情况值得特别地说明. 我仅构造了一个独立随机变量列(第三章第三节)，而未构造更一般的随机变量列，因为我相信后者能更好地被吸收到随机过程的教程中. 我采取把条件期望直接放到最后，以便紧接着讨论各种有益的应用. 如果需要，通过小小的更动，就可适当地将第9.1节放在第三章之后. 我未采纳无穷可分律的更完全的论述，这有两个原因：它的素材包含在两三篇论文中，发展它的最好办法是把它放到可加过程中讨论，正如它的创造者 Panl Levy 最初所设想的一样. 我尽力去讲清楚特征函数对数的边缘性论述，以便与大批现存书籍中在这方面所犯的错误作斗争. 最后，为了回答一下 Doob 的询问，仅在此提一下我之所以用Kolmogorov 给出的原形介绍很难的定理5.3.2，是因为我希望让学生经受一下数学中的艰难困苦.

在本书中也许有某些新东西，但由于心里想到初学者而不是行家的兴趣，通常我没有力求表现独创性或仅仅表明与众不同. 在同样的心绪下，作为写作的准则(委婉地称为“文风”)，我赞成清晰高于优雅. 以我之见，尤其在写教科书中，略为过份的简要式样已经是不自然的了. 关于过份简练的文风，我听到仅有的一个正当的论点是：它促使读者去自我思考. 这种效果对于希望自我思考的

人来说，只要在完整的文本中，用简单地每隔一句删去一句的做法，就可完全达到.

本书约含有500个练习题，它们主要由特殊情况和例子、进一步的想法和与正文中不同的证明、自然推广以及一些新颖的起点所组成. 除了少数例外，它们既不深也不浅；并且有许多题还给出了提示和注解. 如果说它们有点先天性的倾向，那么至少它们与课文有关且有助于课文的消化. 作为一种大胆的尝试，我对一小部分练习打上*号以示"必须做"，尽管并没有什么严格的选择标准，其中一部分是本书需要的，但在任何情况下，读者在至少作完这些问题之后，对正文的学习将更完善.

在近二十年的一段时间里，我多次教过接近本书水平的课程. 手稿的倒数第二次草稿曾于1966年在斯坦福大学一个班级上试讲过. 对于这次课程，由于错误地估计只需用两季度的时间（仿佛概率在加利福尼亚的气候条件下也会更快开花似的），我不得不略去第八、九章的后一半，其余的几乎完全按目前这个课本讲（第九章的后一半将包含在称为"随机过程"的后续课程中）. 适量的练习留作家庭作业，此外大部分练习自愿完成. 在这个班级中以这方式与我合作发现错误并提出改进的人有：Jack E. Clark, B. Curtis Eaves, Susan D. Horn, Alan T. Huckleberry, Thomas M. Liggett, Roy E. Welsch, 对他们我表示诚挚的感谢. J. L. Doob 和 Benton Jamison 也阅读了原稿，他们俩对最后的版本有大量的贡献. 他们还在其班级上用了一部分原稿. 除了向这些人致谢之外，本书应归功于原来的文章、论文及教科书的许多作者. 我已把参考文献限制到主要的原始资料上而同时在练习中附加更多的名字. 有些疏忽也许是难免的；然而，除了两三处例外，无关紧要的或不相干的"名字失落"是仔细考虑过的.

我衷心地感谢 Rosemarie Stamptel 和 Gail Lemmond，他们把原稿的打字工作完成得极好.

目　录

第一章　分布函数

1.1　单调函数

按照引进概率测度的一种传统方法，我们从讨论分布函数着手.它可作为初等分析到概率论的一个方便的桥梁，初学者可以通过它复习一下数学基础，并检验自己思考问题时的灵活性．本章的某些方法和结果在随机过程论中也有用.

在本书中，对于“正”、“负”、“增”、“减”等词我们将按照流行的用法按广义来理解．例如，“x 为正”意思是指“$x\geqslant 0$”；当意思是指“$x>0$”时，则加上修饰词“严格”．在本章中，除非另有声明，“函数”这个词是指有限实值函数而言.

于是，设 f 是定义在实直线$(-\infty,\ +\infty)$上的增函数，则对于任何两个实数 x_1 与 x_2，

(1) $$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2).$$

我们从复习这种函数的某些性质着手．记号“$t\uparrow x$”表示“$t<x,\ t\to x$”；“$t\downarrow x$”表示“$t>x,\ t\to x$”.

（i）对于每个 x，两个单侧极限

(2) $$\lim_{t\uparrow x}f(t)=f(x-)\text{ 与 }\lim_{t\downarrow x}f(t)=f(x+)$$

存在且有限.而且在无穷处的极限

$$\lim_{t\downarrow -\infty}f(t)=f(-\infty)\text{ 与 }\lim_{t\uparrow +\infty}f(t)=f(+\infty)$$

存在；前者可能为 $-\infty$，后者可能为 $+\infty$.

这由单调性可得，实际上

$$f(x-)=\sup_{-\infty<t<x}f(t),\ f(x+)=\inf_{x<t<+\infty}f(t).$$

（ii）对于每个 x，当且仅当

$$f(x-)=f(x)=f(x+)$$

时，f 在 x 处连续.

为证明这一点，注意单调函数 f 在 x 处的连续性等价于

$$\lim_{t\uparrow x} f(t) = f(x) = \lim_{t\downarrow x} f(t).$$

由(i)，上面的极限作为 $f(x-)$ 和 $f(x+)$ 而存在，且

(3) $$f(x-) \leqslant f(x) \leqslant f(x+),$$

由此即得(ii).

一般地说，当且仅当(2)中的两个极限都存在但不相等时，我们说函数 f 在 x 处有一个*跳跃*. f 在 x 处的值 $f(x)$ 本身可以是任意的，但对于增函数 f，关系(3)必须成立. 作为(i)与(ii)的一个推论，我们有以下的结果.

(iii) 一个增函数只可能有跳跃类型的不连续性. [读者应当自问：对于一般的函数，还有哪些类型的不连续性.]

如果在 x 处有一个跳跃，我们称 x 是 f 的一个*跳跃点*，并称数 $f(x+)-f(x-)$ 为*在 x 处跳跃的大小*或简称为在 x 处的"跳跃".

值得注意的是，诸跳跃点可以有一个有限的聚点，而这个聚点本身不一定是跳跃点. 于是，跳跃点的集合未必是闭集.

例 1 设 x_0 是一个任意的实数，定义函数 f 如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \text{当 } x \leqslant x_0 - 1; \\ &= 1 - \frac{1}{n}, \text{当 } x_0 - \frac{1}{n} \leqslant x < x_0 - \frac{1}{n+1}, \ n = 1, 2, \cdots; \\ &= 1, \text{当 } x \geqslant x_0. \end{aligned}$$

点 x_0 是跳跃点 $\left\{x_0 - \frac{1}{n},\ n \geqslant 1\right\}$ 的一个聚点，但 f 在 x_0 处连续.

在讨论下一个例子之前，我们先引入一个在全书中都有用处的一个记号. 对于任何实数 t，我们令

(4) $$\delta_t(x) = \begin{cases} 0, \text{当 } x < t; \\ 1, \text{当 } x \geqslant t. \end{cases}$$

我们称函数 δ_t 为在 t 处的点质量.

例 2 设 $\{a_n,\ n \geqslant 1\}$ 是所有有理数集的一个任意给定的排列，并设 $\{b_n,\ n \geqslant 1\}$ 是正($\geqslant 0$)数的一个集合，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. 例

如，我们可以取 $b_n=2^{-n}$. 现在考虑

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\delta_{a_n}(x). \tag{5}$$

因为对每个 n 与 x, $0\leqslant\delta_{a_n}(x)\leqslant 1$, 故(5)中的级数绝对一致收敛. 因为每个 δ_{a_n} 是增函数，故如果 $x_1<x_2$, 则

$$f(x_2)-f(x_1)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n[\delta_{a_n}(x_2)-\delta_{a_n}(x_1)]\geqslant 0,$$

所以 f 是增函数. 由于一致收敛(为什么?)，我们可以推出对每个 x 有

$$f(x+)-f(x-)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n[\delta_{a_n}(x+)-\delta_{a_n}(x-)]. \tag{6}$$

但上面方括号中的数按 $x\neq a_n$ 或 $x=a_n$ 而分别等于 0 或 1. 故如果 x 不同于所有的 a_n, 则(6)式右边的每一项都为零；另一方面，如果 $x=a_k$, 则恰有对应于 $n=k$ 的一项不为零，于是给出整个级数的值为 b_k. 这就证明函数 f 在所有的有理数点有跳跃，而在其它的点处则没有.

这个例子表明，一个增函数的跳跃点的集合可以是到处稠密的；事实上，上述例子中的有理数集可以用任意的可数集来代替而证明无需改变. 现在我们来证明可数性条件是必不可少的. 所谓"可数"，我们总是指"有限(可能为空)或可数无限".

(iv) f 的不连续点的集合是可数的.

我们用适用于一般情况的拓扑方法来证明. 在本节后的练习题3中将指出基于同样有用的计数方法的另一种证明. 对每个跳跃点 x 考虑开区间 $I_x=(f(x-),f(x+))$. 如果 x' 是另一个跳跃点，比如说 $x<x'$, 则存在一个点 $\tilde{x}$ 使得 $x<\tilde{x}<x'$. 于是由单调性有

$$f(x+)\leqslant f(\tilde{x})\leqslant f(x'-).$$

因此两个区间 I_x 与 $I_{x'}$ 互不相交，虽然当 $f(x+)=f(x'-)$ 时它们可能相邻接. 于是我们可使 f 的定义域中的跳跃点的集合与 f 的值域中某个两两不相交的开区间类相联系. 因为每个区间包含一个有理数，故上述区间类与有理数的某个子集一一对应，而后者是可数的. 因此前者也是可数的. 因为不连续点的集合和与之相

联系的区间类一一对应，故它是可数的.

(v) 设 f_1 与 f_2 是两个增函数，D 是在 $(-\infty,\ +\infty)$ 中(到处)稠密的一个集合. 设

$$\forall^{\dagger)} x \in D: f_1(x) = f_2(x),$$

则 f_1 与 f_2 具有相同大小的同样的跳跃点，且除了在某些跳跃点可能例外，f_1 与 f_2 相等.

为证明这一论断，设 x 是一任意点并令 $t_n \in D,\ t'_n \in D,\ t_n \uparrow x,\ t'_n \downarrow x$. 因为 D 稠密，故这样的序列存在. 由(i)有

$$\begin{aligned} f_1(x-) &= \lim_n f_1(t_n) = \lim_n f_2(t_n) = f_2(x-), \\ f_1(x+) &= \lim_n f_1(t'_n) = \lim_n f_2(t'_n) = f_2(x+). \end{aligned} \tag{7}$$

特别有 $\quad \forall x: f_1(x+) - f_1(x-) = f_2(x+) - f_2(x-).$

(v)中的第一个论断由此方程及(ii)推得. 而且如果 f_1 在 x 处连续，于是根据刚才所证，f_2 也在 x 处连续，且我们有

$$f_1(x) = f_1(x-) = f_2(x-) = f_2(x),$$

这就证明了第二论断.

究竟 f_1 与 f_2 能以怎样的方式不同？这种情况仅在 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 取区间 $(f_1(x-),\ f_1(x+)) = (f_2(x-),\ f_2(x+))$ 中的不同值时才可能出现. 在第二章中(特别见2.2节中练习题 21)将证明 f 在一个跳跃点处的精确值对我们的讨论是无关紧要的，因而在满足(3)的条件下可将它修改使其适合我们的需要. 更精确地说，给定函数 f，我们可以用几种不同的方式定义一个新函数 $\tilde{f}$，例如

$$\tilde{f}(x) = f(x-),\ \tilde{f}(x) = f(x+),$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2},$$

并用其中一个来代替原来的函数. 第三种修改在傅立叶分析中是合适的，但在概率论中前两个修改中的任一个都更加适合. 我们可在这两者之间自由选择，我们将选择第二个，即右连续性.

(vi) 如果我们令

$$\forall x: \tilde{f}(x) = f(x+),$$

---

†) 符号 $\forall x$ 表示"对于所有的 x"——译者注.

则 $\tilde{f}$ 是增函数且处处右连续.

让我们回忆,设 g 是一个任意函数,当且仅当 $\lim\limits_{t\downarrow x} g(t)$ 存在且此极限(记为 $g(x+)$)等于 $g(x)$ 时,g 称为在 x 处右连续. 为了证明论断(vi),我们必须证明

$$\forall x: \lim_{t\downarrow x} f(t+) = f(x+).$$

实际上,上式对使得 $f(t+)$ 对每个 t 存在的任何 f 都是成立的. 因为:任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$ 使得

$$\forall s\in(x,\ x+\delta): |f(s)-f(x+)|\leqslant\varepsilon.$$

设 $t\in(x,\ x+\delta)$,并在上式中令 $s\downarrow t$,则得

$$|f(t+)-f(x+)|\leqslant\varepsilon,$$

这就证明了 $\tilde{f}$ 是右连续的. 易证如果 f 是增函数则 $\tilde{f}$ 也是增函数.

设 D 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 中稠密,并设 f 是以 D 为定义域的一个函数. 我们可以在 f 的定义域中讨论其单调性、连续性、一致连续性等概念,只要在通常定义中限制考虑 D 中的点即可. 即使 f 定义在较大的区域中,我们仍然可以通过考虑"限制在 D 上的 f"来讨论在"D"上的这些性质.

(vii) 设 f 是 D 上的增函数,在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上定义 $\tilde{f}$ 如下:

$$\forall x: \tilde{f}(x)=\inf_{x<t\in D} f(t),$$

则 $\tilde{f}$ 是增函数且处处右连续.

这是(vi)的一个推广. $\tilde{f}$ 显然是增函数. 为了证明右连续性,设任意的 x_0 及 $\varepsilon>0$ 被给定. 存在 $t_0\in D$, $t_0>x_0$,使得

$$f(t_0)-\varepsilon\leqslant\tilde{f}(x_0)\leqslant f(t_0).$$

所以如果 $t\in D$, $x_0<t<t_0$,我们有

$$0\leqslant f(t)-\tilde{f}(x_0)\leqslant f(t_0)-\tilde{f}(x_0)\leqslant\varepsilon.$$

根据 $\tilde{f}$ 的定义,可以推出对 $x_0<x<t_0$ 有

$$0\leqslant\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x_0)\leqslant\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的,故由此可推出 $\tilde{f}$ 在 x_0 右连续,如所要证明的.

练　习

1. 证明对于例 2 中的 f 有

$$f(-\infty)=0,\ f(+\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

2. 构造$(-\infty,\ +\infty)$上的一个增函数，使它在每个整数处具有大小为 1 的跳跃，且在两个跳跃之间为常数．这样的函数不能表成为$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\delta_n(x)$，其中对每个 n，$b_n=1$，但稍加修改即可给出这样的表示．试予以详细说明．

***3**.[†] 设 f 是增函数且存在实数 A 与 B 使得 $\forall x\colon A\leqslant f(x)\leqslant B$．证明对每个 $\varepsilon>0$，大小超过 ε 的跳跃数最多为$(B-A)/\varepsilon$．因而证明(iv)，首先就 f 有界的情况来证明，然后考虑一般情况．

4. 设 f 是$(-\infty,\ +\infty)$上的一个任意函数，f 在 x 处右连续但不左连续，L 是所有这种 x 的集合．证明 L 是一可数集．[提示：考虑 $L\cap M_n$，其中 $M_n=\{x|O(f;x)>1/n\}$，$O(f;x)$为 f 在 x 处的振幅．]

***5**. 设 f 与 $\tilde{f}$ 如(vii)中所述．证明 f 在 D 上的连续性并不蕴涵 $\tilde{f}$ 在$(-\infty,\ +\infty)$上的连续性，但一致连续性一定蕴涵一致连续性．

6. 任给$(-\infty,\ +\infty)$上的广义值函数 f，存在可数集 D 具有如下性质．对于每个 t，存在 $t_n\in D$，$t_n\to t$，使得 $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)$．如果“$t_n\to t$”用“$t_n\downarrow t$”或“$t_n\uparrow t$”来代替，上述论断仍成立．[这是随机过程“可分性”的关键．考虑图形$(t,\ f(t))$，并引入度量．]

1.2 分布函数

现在设 f 是有界增函数且不等于常数．于是我们有

$$\forall x\colon -\infty<f(-\infty)\leqslant f(x)\leqslant f(+\infty)<+\infty.$$

考虑“规范化”函数：

$$\tilde{f}(x)=\frac{f(x)-f(-\infty)}{f(+\infty)-f(-\infty)},\tag{1}$$

它是一个有界增函数，且

$$\tilde{f}(-\infty)=0,\ \tilde{f}(+\infty)=1.\tag{2}$$

---

†) 表示特别选出的练习题(如前言中所提到的)。