怎样证明三角恒等式

克　西著

知　识　出　版　社

怎样证明三角恒等式

朱尧辰 著

知识出版社

内 容 提 要

三角恒等变形是中学数学的难点之一。本书全面系统地总结了中学课程中三角恒等变形的内容，对三角恒等式的证法和技巧作了分类指导。着重解题思路的分析。内容包括同角函数关系、加法定理、反三角函数、三角形的边角关系、三角恒等变形的各种应用以及代数对三角恒等变形的应用等。全书精选例题、习题188则。习题还附有解法提示。可供中学师生、中学程度自学青年作为学习三角恒等式的辅助读物。

怎样证明三角恒等式

朱尧辰 著

知 识 出 版 社 出 版

（北京安定门外外馆东街甲1号）

新华书店北京发行所发行　二二〇七工厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 4　字数 86,000

1981年11月第1版　1981年11月第1次印刷

印数 1—178,000

书号：7214·11　　定价：0.32元

目　录

一、引　言

§1. 什么是三角恒等式及三角变形

假定给定两个三角函数解析表达式，我们把它们记成

$$f_1(x)=U_1(\sin x,\cos x,\operatorname{tg} x,\operatorname{ctg} x) \tag{1}$$

$$f_2(x)=U_2(\sin x,\cos x,\operatorname{tg} x,\operatorname{ctg} x) \tag{2}$$

对于（1）式，自变量的取值范围是A_1，对于（2）式，自变量的取值范围是A_2。现在同时研究这两个式子，于是考虑A_1和A_2的公共部分$A_1\cap A_2$。为了使问题的讨论有意义，我们始终假设$A_1\cap A_2$是非空的。

定义　如果对于$A_1\cap A_2$中的任何x值，（1）和（2）都有相等的数值，那么称（1）与（2）是恒等的，并且记作

$$\begin{aligned}&U_1(\sin x,\cos x,\operatorname{tg} x,\operatorname{ctg} x)\\&\quad=U_2(\sin x,\cos x,\operatorname{tg} x,\operatorname{ctg} x)\end{aligned} \tag{3}$$

（3）式称为三角恒等式。

例　1）恒等式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

对一切实数x成立。

2）恒等式

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

对一切实数$x\neq k\pi$（$k=0$，±1，……）成立。

3） 函数$\sqrt{\sin^2 x}$ 与 $\sin x$ 并不恒等，这是因为

$$\sqrt{\sin^2 x}=\begin{cases}+\sin x & [2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi]\\ -\sin x & [(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi]\end{cases}$$

但函数$\sqrt{\sin^2 x}$ $[2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi]$ 与 $\sin x$ 是恒等的，亦即对于 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 有恒等式

$$\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$$

两个恒等的表达式(1)(2)在 $A_1\cap A_2$ 上确定同一个函数。两个恒等的表达式有时可能是同一个函数仅在外表上不同的表示法。例如

$$1+2\sin x+\sin^2 x \quad 与 \quad (1+\sin x)^2$$

对一个三角函数表达式用另一个与它恒等的三角函数表达式去代换时，这种代换就称做三角恒等变形，简称三角变形。解析式的三角恒等变形可能会引起函数定义域的改变。例如在 $1+\sin 2x$ 中，若用$\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$代换 $\sin 2x$，将引起定义域的缩小；在 $1+\operatorname{tg} x\cos x$ 中用 $\sin x$ 代换 $\operatorname{tg} x\cos x$ 时，引起定义域的扩大。这种现象常常是引起三角方程增根或减根的原因。

上面都是对单变量情形说的，对于多个变量的情形，也是类似的。例如，当 $x+y\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$x,y\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$时，

$$\operatorname{tg}(x+y) \quad 与 \quad \frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$$

是恒等的，因而恒等式

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$$

在所说的 (x,y) 范围中成立。

§2. 证明三角恒等式的三种方式

证明三角恒等式通常有三种方式：

(1) 通过一系列恒等变形，从左边(右边)式子出发推导出右边(左边)式子。

(2) 证明两边式子都与同一个式子恒等。

(3) 证明一个与要证的恒等式等价的恒等式。(两个恒等式称为等价，如果其中任何一个成立时另一个也成立。)

现在举例说明。

例 证明恒等式：

1) $$\sin^2\theta\,\mathrm{tg}\,\theta+\cos^2\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta+2\sin\theta\cos\theta=\mathrm{tg}\,\theta+\mathrm{ctg}\,\theta$$

2) $$\frac{1-\mathrm{cosec}\,\theta+\mathrm{ctg}\,\theta}{1+\mathrm{cosec}\,\theta-\mathrm{ctg}\,\theta}=\frac{\mathrm{cosec}\,\theta+\mathrm{ctg}\,\theta-1}{\mathrm{cosec}\,\theta+\mathrm{ctg}\,\theta+1} \tag{1}$$

〔证明〕

1) 因为左边比较复杂，所以从左边着手（按第一种方式）。

$$左边=\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}+2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\mathrm{tg}\,\theta+\mathrm{ctg}\,\theta$$

$$=右边$$

2） 只用证明下列恒等式(第三种方式)：

$$(1-\operatorname{cosec}\theta+\operatorname{ctg}\theta)(\operatorname{cosec}\theta+\operatorname{ctg}\theta+1)$$
$$=(\operatorname{cosec}\theta+\operatorname{ctg}\theta-1)(1+\operatorname{cosec}\theta-\operatorname{ctg}\theta) \qquad (2)$$

因为(2)式的两边都很复杂，所以用第二种方式来证明它。

(2)的左边 $=(1+\operatorname{ctg}\theta)^2-\operatorname{cosec}^2\theta$
$$=1+2\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}^2\theta-\operatorname{cosec}^2\theta$$
$$=1+2\operatorname{ctg}\theta-(\operatorname{cosec}^2\theta-\operatorname{ctg}^2\theta)$$
$$=1+2\operatorname{ctg}\theta-1=2\operatorname{ctg}\theta$$

(2)的右边 $=\operatorname{cosec}^2\theta-(1-\operatorname{ctg}\theta)^2$
$$=\operatorname{cosec}^2\theta-1+2\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{ctg}^2\theta$$
$$=(\operatorname{cosec}^2\theta-\operatorname{ctg}^2\theta)-1+2\operatorname{ctg}\theta$$
$$=1-1+2\operatorname{ctg}\theta=2\operatorname{ctg}\theta$$

于是(2)式成立，从而(1)式得证。

【练习题】

1． 下列等式是否是恒等式？如果不是，说明理由；如果是，说明恒等式中自变量取值范围：

(1) $\sqrt{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}=1-\sin\theta$

(2) $\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\sin\theta-\cos\theta$

(3) $2\lg\sin\alpha=\lg(1-\cos^2\alpha)$

2． 用适宜的方式证明下列恒等式：

(1) $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$

(2) $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta-\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}$

(3) $2(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)=(1+\sin\theta+\cos\theta)^2$

(4) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\operatorname{tg}\theta$, $\quad(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$

二、以同角函数关系为基础的恒等式

§1. 简易恒等式

所谓同角三角函数关系是指下列三类恒等关系式：

（1）平方和关系

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\operatorname{tg}^2\theta+1=\sec^2\theta,\quad \operatorname{ctg}^2\theta+1=\operatorname{cosec}^2\theta$$

（2）倒数关系

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\theta},\quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

或

$$\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{ctg}\theta=1,\quad \sec\theta\cdot\cos\theta=1,\quad \operatorname{cosec}\theta\cdot\sin\theta=1$$

（3）相除关系

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \operatorname{ctg}\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

这些关系式经常应用于三角恒等变形，是证明三角恒等式的基础。在第一章的§2中我们已经给出了几个简易恒等式的例子，这里再补充几个。

例1 求证

$$(1-\operatorname{tg}^2A)^2=(\sec^2A-2\operatorname{tg}A)(\sec^2A+2\operatorname{tg}A)$$

〔证 1〕

$$\text{左边} = 1 - 2\,\mathrm{tg}^2 A + \mathrm{tg}^4 A$$
$$= 1 + 2\,\mathrm{tg}^2 A + \mathrm{tg}^4 A - 4\,\mathrm{tg}^2 A$$
$$= (1 + \mathrm{tg}^2 A)^2 - 4\,\mathrm{tg}^2 A$$
$$= \sec^4 A - 4\,\mathrm{tg}^2 A$$
$$= (\sec^2 A - 2\,\mathrm{tg}\,A)(\sec^2 A + 2\,\mathrm{tg}\,A) = \text{右边}$$

〔证 2〕

$$\text{右边} = (1 + \mathrm{tg}^2 A - 2\,\mathrm{tg}\,A)(1 + \mathrm{tg}^2 A + 2\,\mathrm{tg}\,A)$$
$$= (1 + \mathrm{tg}\,A)^2(1 - \mathrm{tg}\,A)^2 = [(1 + \mathrm{tg}\,A)(1 - \mathrm{tg}\,A)]^2$$
$$= (1 - \mathrm{tg}^2 A)^2 = \text{左边}$$

〔证 3〕

$$\text{左边} = \left(1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)^2 = \frac{(\cos^2 A - \sin^2 A)^2}{\cos^4 A}$$

$$= \frac{\cos^4 A + \sin^4 A - 2\sin^2 A\cos^2 A}{\cos^4 A}$$

$$= \frac{(\cos^2 A + \sin^2 A)^2 - 4\sin^2 A\cos^2 A}{\cos^4 A}$$

$$= \frac{1 - 4\sin^2 A\cos^2 A}{\cos^4 A}$$

$$\text{右边} = \sec^4 A - 4\,\mathrm{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^4 A} - \frac{4\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1 - 4\sin^2 A\cos^2 A}{\cos^4 A}$$

∴ 左边 = 右边

〔证 4〕

因为 $1+\mathrm{tg}^2 A=\sec^2 A$，所以

$$(1+\mathrm{tg}^2 A)^2=\sec^4 A$$

$$1+2\,\mathrm{tg}^2 A+\mathrm{tg}^4 A=\sec^4 A$$

两边同减去 $4\,\mathrm{tg}^2 A$，得

$$1-2\,\mathrm{tg}^2 A+\mathrm{tg}^4 A=\sec^4 A-4\,\mathrm{tg}^2 A$$

于是 $$(1-\mathrm{tg}^2 A)^2=(\sec^2 A-2\,\mathrm{tg}\,A)(\sec^2 A+2\,\mathrm{tg}\,A)$$

〔注〕上述四种证法各有特色。证 1 和证 2 综合使用因式分解和乘法公式。证 3 是将表达式全部用 $\sin A$，$\cos A$ 表出。证 4 主要依据等式的基本性质，不过这种方法一般难以掌握。

例 2　求证

$$\frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}$$

〔证明〕

$$\text{左边}=\frac{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}=\text{右边}$$

〔注〕这里使用了两个常用技巧：①用 $\sin^2 x+\cos^2 x$ 代替“1”，②分子分母同除以 $\cos x$。

从上面的例子我们可以总结出下列几点：

（1）应当根据问题的特点选择最简单的证明方法。

（2）因式分解、乘法公式、分式性质等代数技巧常起重要作用。

（3）“1”的代用法，即

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = 1$$

（特别是 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$），是一种常用技巧。

【练习题】

3. 证明恒等式：

（1）$(2-\cos^2\theta)(1+2\operatorname{ctg}^2\theta) = (2-\sin^2\theta)(2+\operatorname{ctg}^2\theta)$

（2）$\dfrac{2(\cos\theta-\sin\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

（3）$\dfrac{1}{\cos\theta+\operatorname{tg}^2\theta\sin\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta+\operatorname{ctg}^2\theta\cos\theta} = \dfrac{\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta}{\sec\theta\operatorname{cosec}\theta-1}$

（4）$\dfrac{(1+\operatorname{cosec}\theta)(\cos\theta-\operatorname{ctg}\theta)}{(1+\sec\theta)(\sin\theta-\operatorname{tg}\theta)} = \operatorname{ctg}^5\theta$

§2. 附条件的恒等式

因为这类问题常涉及两个或多个变量，所以解法比较灵活。

例1　设 $\sin^2\alpha\operatorname{cosec}^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\gamma=1$，则

$$\sin^2\gamma=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta$$

〔分析〕因为 $\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma$，而由已知条件求 $\cos^2\gamma$ 是比较容易的。

〔证明〕由已知条件求出

$$\cos^2\gamma=\frac{1-\sin^2\alpha\operatorname{cosec}^2\beta}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{(1-\sin^2\alpha\operatorname{cosec}^2\beta)\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\beta}$$

于是

$$\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma=\frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)}{\cos^2\alpha\sin^2\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)^2=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta$$

例2　已知

$$\frac{\cos^4A}{\cos^2B}+\frac{\sin^4A}{\sin^2B}=1$$

求证

$$\frac{\cos^4B}{\cos^2A}+\frac{\sin^4B}{\sin^2A}=1$$

〔分析〕已知的条件是以分式形式出现的，为明显地看出 A，B 的正弦（或余弦）间的关系，应先将已知条件变形。

〔证明〕由已知条件得

$$\cos^4 A\sin^2 B+\sin^4 A\cos^2 B=\sin^2 B\cos^2 B$$

或

$$(1-\sin^2 A)^2\sin^2 B+\sin^4 A(1-\sin^2 B)-\\-\sin^2 B(1-\sin^2 B)=0 \qquad (1)$$

将此式加以整理得

$$(\sin^2 A-\sin^2 B)^2=0$$

于是 $\sin^2 A=\sin^2 B$，从而 $1-\sin^2 A=1-\sin^2 B$，或

$$\cos^2 A=\cos^2 B$$

所以得到

$$\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=\frac{\cos^4 A}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 A}{\sin^2 A}$$

$$=\cos^2 A+\sin^2 A=1$$

〔注〕(1) 式中统一于正弦函数，如改为统一于余弦函数，结果是一样的。

例3　设 $a\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}\beta$，$a^2x^2=a^2-b^2$，则

$$(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)=1-x^2$$

〔分析〕为使 $(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)$ 化简，应设法通过 β 的三角函数表示 $\cos^2\alpha$

〔证明〕将 $a\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}\beta$ 两边平方，得

$$a^2\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=b^2\cdot\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$$

由此解得　$$\cos^2\alpha=\frac{a^2\cos^2\beta}{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\beta}$$

于是

$$(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)$$

$$=\left\{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}(1-\cos^2\beta)\right\}\times$$

$$\times\left\{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2\cos^2\beta}{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\beta}\right\}$$

$$=\frac{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\beta}{a^2}\cdot\frac{b^2}{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\beta}$$

$$=\frac{b^2}{a^2}=1-x^2$$

【练习题】

4．设 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$，则 $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$

5．设 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$，　则

$$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$$

6．如果$\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\theta}-\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\theta}\right)^2=\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta$，

那么
$$\cos\theta=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$$

7．如果$\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=1$，

那么
$$\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0$$

8．设 $\operatorname{tg}x+\sin x=m$，$\operatorname{tg}x-\sin x=n$，则

$$\cos x=\frac{m-n}{m+n},\quad 16mn=(m^2-n^2)^2$$

9. 设 $\cos\theta\neq 0$，$\cos^2\alpha\neq\cos^2\varphi$，且

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\sin\theta\sin\alpha}{\cos\theta-\cos\alpha}$$

则

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi\pm\cos\alpha}$$