

1978年

全国函数论会议论文综述部分

# 函数论专辑

HANSHULUN  
ZHUANJI

科学技术文献出版社重庆分社

## 前 言

1978年5月,在上海举行了函数论学术交流会,到会代表有80人,宣读论文52篇,综合报告17篇,专题报告1篇,这本会议集由于篇幅限制,只摘要辑录了其中的一部分。

这次会议是在粉碎“四人帮”以来,经中国科学院数学所的同志从1977年4月开始,从调查研究到组织筹备后,在全国各分支学科中首先进行的一次全国性的学术会议。在调查筹备的过程中,更深切更具体地了解到“四人帮”对基础理论的严重破坏。好端端的一个在我国比较有基础,有老一辈数学家带领,有相当数量队伍,有接近国际前沿工作的函数论学科,从四有几乎变成四无。在调查研究过程中,一提到怎样恢复函数论的理论研究工作,“痛定思痛”与“心有余悸”的情緒,很自然地在函数论工作者中间流露出来。与此同时,无不愤怒声讨四人帮的罪恶,并为数学理论工作受到应有的重视而高兴。

华国锋同志为首的党中央对我国科学事业的关心,大大地鼓舞了全国函数论工作者。从会议的筹备到会议的召开,情况就有了很大的进展。“科学的春天”已经使函数论这块小小的园地呈现了活跃的新气象。百花齐放的前景,可以从这本小册子看到一些徵象了。为了加快实现我国的四个现代化,我们期待着硕果累累的收获季节,在这块园地上能更快地到来。

这次会议限于当时的条件,还没有能真正反映出全国函数论方面研究工作的全貌,还有很重要的工作没有涉及。这本小册子又是会议的部分报告的辑录,当然更有它的局限性,由于“四人帮”的破坏,当时数学教学与科研方面还处在百废待举的时刻,数学界的主要力量,还不得不放在数学教学,数学教材,教学竞赛等方面的重要工作上。数学学会组织的学术活动当时还来不及展开,会议集的篇幅也有所限制,这些都是这次会议与会议集的主要不足之处。

这次会议是在上海召开的,得到了上海市科协,复旦大学,上海师大等单位的大力支持。会议集的出版得到了中国科技情报研究所重庆分所和有关工作同志的辛勤协作,在此一并表示感谢。

1978年全国函数论会议秘书组

## 函数论专辑

---

中国科学技术情报研究所重庆分所 编辑  
科学技术文献出版社重庆分社 出版  
重庆市市中区胜利路91号

四川省新华书店重庆发行所 发行  
科学技术文献出版社重庆分社印刷厂 印刷

---

开本：787×1092毫米1/16 印张：6.75 字数：16万  
1979年9月第一版 1979年9月第一次印刷

印数：21400

---

书号：13176·49

定价：0.70元

# 目 录

## 前言

### 〔一〕多复变函数论

- 关于 Schwarz 引理·····陆启铿(1)
- 关于双曲流形与全纯映射·····陈志华(5)
- $C^n$  中域的分类理论·····许以超(11)
- 多复变函数的积分表示理论·····钟同德(19)

### 〔二〕调和分析与函数逼近论

- 多元调和分析的近代发展·····程民德、邓东皋(29)
- 实变函数逼近论的一些进展·····谢庭藩、王斯雷、施咸亮(36)
- 实变函数逼近论的几个问题·····孙永生(50)

### 〔三〕抽象调和分析

- 拟不变测度及有关的调和分析·····夏道行(57)
- 关于抽象调和分析的发展概况·····龙瑞麟(61)

### 〔四〕单复变函数论

- 关于指数级数和随机指数级数的一些问题·····余家荣(69)
- 有关 Cauchy 型积分及其应用的某些情况介绍·····路见可(75)
- 关于 Bieberbach 猜想近年来进展简介·····龚升(80)
- 近十年来复变函数几何理论的某些新进展  
·····任福尧、何成奇、范莉莉(84)
- 复变函数逼近论近代研究简介·····沈燮昌(88)
- 一阶非线性椭圆型方程组的复变函数论·····闻国椿、方爱农(98)
- 关于代数体函数的几个问题·····何育赞(105)

# 关于 Schwarz 引理

陆启铿 (中国科学院数学研究所)

Schwarz 引理的研究一直是多复变函数论中一个活跃的领域, 习知单复变函数的 Schwarz 引理是考虑在单位圆  $B$  内解析的函数  $f(z)$ , 当  $|f(z)| \leq 1$ , 且  $f(0) = 0$  时, 则有  $|f(z)| \leq |z|$ . 原来 Schwarz 的证明 (Gesammelte Abhandlungen, 1890, Vol I, p. 109) 仅仅对  $f(z)$  是单叶的情形, 而现在所熟知的形式和证明实际上是来源于 C. Carathéodory (Math. Ann., 1912, 52 (1), 107—144). 而 Pick (Math. Ann., 1915, 77, 1—6; 7—23) 则给出了 Schwarz 引理的几何含义, 即若  $f: B \rightarrow B$  是解析映照, 则对  $B$  中任两点  $z_1, z_2$  有

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|, \quad (1)$$

这等价于对任一点  $z \in B$ , 有

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}. \quad (2)$$

等式在一点成立当且仅当  $f$  是把  $B$  一一地映为  $B$ .

上面第一个不等式的几何含义是在解析映照下非欧距离缩小, 第二个不等式是非欧体积缩小.

此后, 在单复变函数中 Schwarz 引理量重要的是 Ahlfors 的推广 (Trans. Amer. Math. Soc., 1938, 43, 359—364); 在单位圆  $B$  中命

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}, \quad (3)$$

(称谓 Poincaré 度量), 设  $W$  是 Riemann 曲面,  $f: B \rightarrow W$  是解析的, 若  $W$  中有度量  $d\rho^2 = \rho^2(w) |dw|^2$ , 它的曲率  $k = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \log \rho^2}{\partial w \partial \bar{w}}$ .

小于单位圆中 Poincaré 度量的曲率 ( $= -4$ ), 则恒有  $f^* d\rho^2 \leq ds^2$ , 这里  $f^* d\rho^2$  表示以  $w = f(z)$  代入  $d\rho^2$  中. 这个结果第一次指出了曲率与距离缩小的关系.

由于 Schwarz 引理在单复变函数论中应用是很多的 (例如见上面所引用的 Carathéodory 与 Ahlfors 的文章), 因此有不少人努力把它推广到多复变函数. 有的人研究距离缩小, 有的人研究体积缩小, 这两者在多复变函数中通常是不等价的.

Carathéodory (Math. Ann, 1926, 97, 76—98) 在  $C^n$  的有界域  $D$  中引进度量

$$M_D(a, b) = \sup_{\varphi \in \mathcal{E}(D)} E(\varphi(a), \varphi(b)), \quad (4)$$

其中

$$E(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \left| \frac{t_2 - t_1}{1 - \overline{t_1}t_2} \right| \right) /$$

$\left( 1 - \left| \frac{t_2 - t_1}{1 - \overline{t_1}t_2} \right| \right)$  表示单位圆  $B$  中两点  $t_1, t_2$

的非欧距离,  $e(D)$  表示在  $D$  中解析的函数适合  $|\varphi| < 1$  的集合,  $a, b$  为  $D$  中任意两点, 这度量现称为 Carathéodory 度量, 它是距离缩小的, 即若  $f: D \rightarrow D$  是解析映照, 则对任两点  $a, b \in D$  有  $M_D(f(a), f(b)) \leq M_D(a, b)$ . 在一般情形仅知道  $M_D(a, b)$  是  $a$  与  $b$  的连续函数, 而不是  $a$  与  $b$  的可微分函数 (例如双圆柱的情形就是如此), 因此不能由此导出一微分度量, 故不能由此直接得出体积缩小的结论. H. Cartan (Bull. Soc. Math. de France, 1930, 58, 199—219) 证明: 若  $D$  是  $C^n$  中包含原点的一有界域,  $f: D \rightarrow D$  是解析映照适合  $f(0) = 0$ , 则  $\left| \det \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} \leq 1$ , 等号成立的充要条

件为 \$f\$ 把 \$D\$ 一一地映为自己, 这里 \$\frac{\partial f}{\partial z}\$ 表示映照 \$f\$ 的函数矩阵, 这个结果是在原点体积是缩小的。如果 \$D\$ 是可逆的, 不难证明, 在 \$D\$ 的任一点也是体积缩小的。但是与单复变量的情形不一样, 体积缩小不能导出距离缩小。

单复变量的 Schwarz 引理最初仅限于单位圆讨论, 因此自然地考虑把 \$D\$ 限制为单位超球 \$B^n = \{ z = (z\_1, \dots, z\_n) \in \mathbb{C}^n; z \bar{z}' < 1 \}\$ 时的 Schwarz 引理, 这里把 \$z\$ 看作 \$1 \times n\$ 矩阵, \$z'\$ 表示 \$z\$ 的转置, \$\bar{z}\$ 表示 \$z\$ 的复共轭。Bochner-Martin ("Several complex variables, 1948), Bureau (J. Math. Pure Appl., 1952, 3, 160—190) 证明: 若 \$f: B^n \to B^n\$ 是解析映照, 且 \$f(0) = 0\$, 则 \$f(z)\bar{f}(z)' \leqq z\bar{z}'\$。由于知道超球 \$B^n\$ 中任两点 \$z\_1, z\_2\$ 的非欧距离为 \$\frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{\chi(z\_2, z\_1)}) / (1 - \sqrt{\chi(z\_2, z\_1)})\$ 其中 \$\chi(z\_2, z\_1) = (z\_2 - z\_1)(1 - \bar{z}\_1' z\_2)^{-1} (\bar{z}\_1 - z\_1)' / (1 - z\_1 \bar{z}\_1')\$ (陆启铿, 多复变函数与西几几何, 数学进展, 1956, 2, 567—661), 上面的 Schwarz 引理即 \$\chi(f(z\_2), f(z\_1)) \leqq \chi(z\_2, z\_1)\$, 此即距离缩小。由于 \$\chi(z\_2, z\_1)\$ 对 \$z\_2, z\_1\$ 是可微分的, 取 \$z\_1 = z, z\_2 = z + dz\$, 用 Taylor 展式, 有 \$\chi(z + dz, z) = ds^2 + \dots\$, 其中 \$ds^2 = dz(1 - \bar{z}'z)^{-1} d\bar{z}' / (1 - z\bar{z}') = \sum\_{\alpha, \beta=1}^n h\_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) dz^\alpha d\bar{z}^\beta\$。略去不等式 \$\chi(f(z + dz), f(z)) \leqq \chi(z + dz, z)\$ 中 \$dz\$ 高于二阶的项, 有 \$f^\* ds^2 \leqq ds^2\$。这是微分度量的距离缩小, 由此显然得出 \$\det(h\_{\alpha\beta}(f, \bar{f})) \left| \det \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 \leqq \det(h\_{\alpha\beta}(z, \bar{z}))\$, 此即体积缩小。

然而超球不过是典型域的非常特殊的一种(见华罗庚, 多复变函数论中典型域的调和与分析, 科学出版社, 1956), 自然地会考虑到典型域的 Schwarz 引理的形式。Ozaki—Kashivagi—Tsubi (Sci. Rep. Tokyo. Kyoiku. Daigaku, Section A, 1954, 4, 109—116,

317—318) 在典型域 \$R\_1 = \{ 1 - Z Z' > 0, Z\$ 为 \$m \times n\$ 复矩阵 \$\}\$ 中定义度量 \$\|Z\| = 1, u, b\$

\$\left\{ \frac{u' Z Z' u}{u \bar{u}'} \right\}^{\frac{1}{2}}\$, 而证明 \$f: R\_1 \to R\_1\$ 是解析的, 且 \$f(0) = 0\$ 时有 \$|f(Z)| \leqq \|Z\|\$。王大明(毕业论文, 1962)证明这样定义的度量 \$\|Z\|\$ 就是 \$R\_1\$ 域的由原点到 \$Z\$ 点的 Carathéodory 度量, 因此上面结果是包含于 Carathéodory 的 Schwarz 引理之中。

如果我们把 Schwarz 引理看作是单位圆 \$B\$ 内解析的有界函数的一阶导数的估值, 即若 \$f(z)\$ 在 \$B\$ 内解析, 且 \$|f(z)| \leqq M\$, 则有

$$\left| \frac{df(z)}{dz} \right| \leqq M \frac{1}{1-|z|^2}, \quad (5)$$

其中 \$\frac{1}{1-|z|^2}\$ 是 Poincaré 度量 \$ds\$ 中 \$|dz|\$ 的系数。

在 \$C^n\$ 的有界域 \$D\$ 中存在 Bergman 核函数

$$\begin{aligned} K(z, \bar{z}) &, \text{由此可以定义 Bergman 度量} \\ ds^2 &= dz T(z, \bar{z}) d\bar{z}', T(z, \bar{z}) \\ &= \left( \frac{\partial^2 \log K(z, \bar{z})}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \right)^{1 < \alpha, \beta < n}. \end{aligned}$$

这个度量有很好的性质, 它是内蕴的, 并且是实解析的。对于这个度量, 形式 (5) 的 Schwarz 引理可以推广为: 若 \$f = (f\_1(z), \dots, f\_n(z))\$ 是在 \$C^n\$ 的有界域 \$D\$ 内解析, 且 \$|f(z)\bar{f}(z)'| \leqq M^2\$, 则必有

$$\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \leqq M^2 T(z, \bar{z}) \quad (6)$$

(陆启铿, 数学学报, 1957, 7, 370—420), 这里 \$A \leqq B\$ 表示方阵 \$B - A\$ 是正定的。由此可以推出: 若 \$D\$ 是 \$C^n\$ 中有界域并且可逆, 则存在一仅与 \$D\$ 有关的正数 \$K\_0(D) (\geqq 1)\$ 使得当 \$f: D \to D\$ 是解析, 有

$$f^* ds^2 \leqq k_0(D) ds^2. \quad (7)$$

\$k\_0(D)\$ 是一解析不变量。在典型域的情形, \$k\_0(D)\$ 的值皆可计算出来, 并且 \$k\_0(D) = 1\$ 的充要条件为 \$D\$ 是超球。由此可见一般地 Bergman 度量不是距离缩小的。1966年 A. Korányi 证明在典型域的情形, \$k\_0(D)\$ 等于对称空间的秩。1967年小林 (S. Kobayashi, J. Math. Soc. Japan) 证明: 如 \$R\$ 是典型域, 其全纯曲

率  $\geq -A$ , 而  $F$  是一-Kaehler 流形, 其全纯曲率  $\leq -B$  ( $A, B$  为正数), 则对任一解析映照  $f: R \rightarrow F$  有  $\int ds^2_F \leq \frac{A}{B} ds^2_R$ . 这是把曲率与 Schwarz 引理联系起来, 证明的方法也是推广 Ahlfors 所证明的 Schwarz 引理方法. 最初想把 Ahlfors 结果推广到多复变数的是 Dinglas (Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass, 1966, 477—494) 及陈省身 (Proc. Symposia in Pure Math., 1968, Vol 11, 157—170). 他们证明: 若  $B^n$  是单位超球,  $F$  是 Hermite-Einstein 流形, 其标量曲率  $\leq -2n(n+1)$ , 则对任一解析映照  $f: B^n \rightarrow F$  是体积缩小的. 丘成桐 (1975, Summer Institute, Shing-Tung Yau) 证明更一般的情形: 设  $F$  是完备的 Kaehler 流形, 其 Ricci 曲率大于一个负常数,  $A$  是一-Hermite 流形, 其全纯双截面曲率小于一个负常数, 则对任意解析映照  $f: F \rightarrow N$  恒有  $\int f^* ds^2_N \leq k ds^2_F$ , 其中  $k$  是只与  $F$  及  $N$  的曲率有关的常数.

小林 (J. Math. Soc. Japan, 1967, 19, 460—480) 在一复流形  $F$  上如下地引进一伪度量: 设  $a, b \in F$ , 任一  $F$  的点串  $p_0 = a, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k = b$  称为由  $a$  到  $b$  的链, 如果有一串映单位圆  $B$  入  $F$  的映照  $f_1, \dots, f_k$  及  $B$  的两点串  $a, \dots, a_k$  与  $b_1, \dots, b_k$ , 使得  $f_1(a_1) = p_{1-1}, f_1(b_1) = p_1, i = 1, \dots, k$ . 命

$$K_F(a, b) = \inf \{ E(a_1, b_1) + \dots + E(a_k, b_k) \},$$

$\inf$  是对所有可能的链. 这是一伪度量, 即满足所有度量的性质, 除了  $K_F(a, b) = 0$  未必有  $a = b$ . 设  $F$  与  $N$  皆是复流形,  $f: F \rightarrow N$  是解析, 则  $K_N(f(a), f(b)) \leq K_F(a, b)$ . 即小林伪度量是距离缩小的. 如果  $F$  上的小林伪度量是真正的度量, 即  $K_F(a, b) = 0$  充要条件为  $a = b$ , 则称为双曲流形. 关于双曲流形已经有许多结果 (陈志华同志另有报告, 亦可参阅 S. Kobayashi, Bull. Amer. Math. Soc., 1976, 82, 357—416) 这里从略.

还有其它的人寻求距离缩小的度量. 如 Chern—Levine—Nirenberg (Global Analy-

sis, 1969, 119—139) 定义了新的距离缩小度量, 但应用较少.

如 Carathéodory 度量一样, 小林度量一般不是可微分的, 故不能用两点无穷接近的方法直接定义微分度量 (如果能够, 自然有体积缩小). 于是 Reiffen (Math. Ann. 1965, 161) 另外定义 Carathéodory 微分度量:

$$C_D(z, \dot{z}) = \sup_{f \in \mathcal{E}(D)} \left| \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_\alpha} \dot{z}_\alpha \right| \quad (7')$$

其中  $\dot{z}$  属于  $D$  的  $z$  点的切空间  $T_z(D)$ . Royden (Several Complex Variables I, Lecture notes in Math, 185, 125—137) 定义小林的微分度量为

$$F_F(z, \dot{z}) = \inf 1/R, \quad (8)$$

其中  $R$  取所有实数, 使得存在解析映照  $\varphi(u)$  把半径  $R$  的圆  $|u| < R$  映入  $F$  适合  $\varphi(0) = z, \dot{z} = \frac{d\varphi(0)}{du}$ . 对于这些微分度量在解析映照下的距离是缩小的, 然而一般地这些微分度量不

能称为微分几何的微分度量  $\sum_{\alpha, \beta=1}^n h_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta$

的形式, 故仍不能直接由此得出体积缩小的结论.

如设法定义一些距离缩小的度量一样, 有人设法定义一些体积缩小的测度. D. A. Pelles (Amer. J. Math., 1975, 97, 1—15) 在复流形  $F$  上如下定义测度: 命  $\lambda_n(E)$  为单位超球  $B^n$  上的点集  $E$  的非欧氏体积, 即  $\lambda_n(E) = \int_E \frac{dv}{(1 - |z|^2)^{n+1}}$  其中  $dv$  为欧氏体积元. 设  $A$  为复流形  $F$  的子集. 命  $A_i (i = 1, 2, \dots)$  为  $B^n$  中如此的子集, 使得对应有一串  $f_i: A_i \rightarrow F$  适合  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(A_i)$ . 命  $A$  的测度为

$$\mu_F(A) = \inf \left\{ \sum_i \lambda_n(A_i) \right\}. \text{ 若 } f \text{ 是映 } F \text{ 入复流形 } N \text{ 的解析映照, 则体积缩小, 即 } \mu_N(f(A)) \leq \mu_F(A).$$

最近国外有一种趋势是把 Schwarz 引理推广到实的情形, 最初是 Kierman (Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 148, 185—197). 考虑 Riemann 曲面的 K 拟共形映照的 Schwarz 引理, 例如, 若  $w: B \rightarrow B$  是单位圆的拟解析映照, 则有  $|w(z_1) - w(z_2)| \leq 16|z_1 - z_2|^{\frac{1}{k}}$ ,  $z_1, z_2 \in B$ . 后来被人推广到实  $n$  维 Riemann 流形的调和 K 拟共形映照 (J. Math. Jokushima Univ., 1971, 5, 17—23). 陈省身与 Goldberg 曾讨论在一定条件下调和映照是体积缩小的 (Amer. J. Math. 1975, 97, 133—147). 接着 Goldberg—Ishihara 讨论了在什么条件下调和 K 拟共形映照是距离缩小.

若在 (5) 式中把 Schwarz 引理看作是映照函数  $f$  的一阶微分估值, 而命  $ds$  表 Poincaré 度量, 则 (5) 能写为

$$\left| \frac{df(z)}{ds} \right| \leq M, \quad (9)$$

而 (6) 亦可相应地书为

$$\sum \left| \frac{df_\alpha(z)}{ds} \right|^2 \leq M, \quad (10)$$

其中  $ds$  是 Bergman 度量,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  是映照函数. 自然要问, 高阶微分的估值是什么? 但我们知道  $\frac{d^2 f(z)}{ds^2}$  不是在解析映照下协变的, 而要引进协变微分或固有微分使之协变. 实际上, 固有微分的概念在单复变函数论中是曾经不自觉地应用过, 不过似乎还未有人指出过这就是微分几何上的固有微分 (Intrinsic derivative). 例如考虑单位圆上的单叶函数  $f(z)$  时, 习知有不等式

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

(例如见 Hayman, Multivalent functions, 1958, 公式 (1.6)), 此即

$$\left| f''(z) - \frac{2\bar{z}}{1-|z|^2} f'(z) \right| \leq \frac{4|f'(z)|}{1-|z|^2}$$

左边绝对值中的表达式其实就是  $f(z)$  的二阶固有微分  $\frac{\delta^2 f(z)}{\delta s^2}$ , 则上式能书为

$$\left| \frac{\delta^2 f}{\delta s^2} \right| \leq 4 \left| \frac{\delta f(z)}{\delta s} \right|$$

由此可见, 上式是共形映照下不变的. 如果  $f(B)$  是一凸域, 此不等式可以改进为

$$\left| \frac{\delta^2 f}{\delta s^2} \right| \leq 2 \left| \frac{\delta f}{\delta s} \right|$$

(例如见 Ahlfors, Conformal Invariant, 定理 I.5)

在  $C^n$  的有界域  $D$  中我们可利用 Bergman 的核函数  $K(z, \bar{i})$  来定义固有微分, 而把一阶本性微分的估值 (10) 式推广到高阶的固有微分的估值得出

$$\left| \sum_{\alpha=1}^n \frac{\delta^\alpha f_\alpha}{\delta s^\alpha} \right|^2 \leq \frac{M^2}{K(z, z)} \int_D \left| \frac{\delta^\alpha K(z, \bar{i})}{\delta s^\alpha} \right|^2 dv_i \quad (11)$$

(陆启铿: 有界域解析映照的固有微分的估值, 科学通报, 1978). 当  $m=1$  上式即 (10) 式.

如果我们以  $z = \frac{dz}{ds}$  及以

$$F_m(z, \bar{z}) = \left[ \frac{1}{m! m!} K(z, \bar{z}) \right]^m \times \int_D \left| \frac{\delta^m K(z, \bar{i})}{\delta s^m} \right|^2 dv_i \Big]^{-\frac{1}{m}}$$

来定义一 Finsler 几何, 利用不等式 (11) 可以证明 Carathéodory 微分度量

$$C_D(z, \bar{z}) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} F_m(z, \bar{z}),$$

特别在典型域的情形

$$C_D(z, \bar{z}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} F_m(z, \bar{z}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} F_m(z, \bar{z}) = F_D(z, \bar{z}),$$

即小林与 Carathéodory 微分几何皆是此 Finsler 几何的极限情形. 看来对于一般的有界域  $D$ , 似有  $\lim_{m \rightarrow +\infty} F_m(z, \bar{z}) \leq F_D(z, \bar{z})$ , 但是对此还未能证明.

另一未解决的问题是, 什么样的有界域  $D$  的核函数  $K(z, \bar{i})$ , ( $z \in D, i \in D$ ) 没有零



点? 这个问题对于解析映照是十分重要的。我们知道有界域的许多具体例子的核函数没有零点(陆启铿, 数学学报, 1966, 16, 269—281). Shwarzycynski (Proc. Amer. Math. Soc., 1966, 16) 称  $K(z, \bar{z})$  无零点的域为  $L$  域。他证明如果有一串域  $D_m \subset D$  逼近有界域  $D$ , 当每一  $D_m$  是  $L$  域时,  $D$  必是  $L$  域。但他指出  $n=1$  时圆环  $0 < r < |z| < 1$  不是  $L$  域, 接着 Rosenthal (Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 21, 33—38) 证明在  $n=1$  时如果  $D$  是双连通

并且是  $L$  域, 则必解析等价于挖去一点的圆。Matsura (Proc. J. Math., 1973, 49, 405—424) 证明有界的完备的圆型域必定是  $L$  域。Suita—Yamada (Proc. Amer. Math. Soc., 1976, 59, 222—224) 证明非单连通的有限的 Riemann 曲面不是  $L$  域, 现在主要问题是单连通的有界域或再加条件, 同时是拟凸域 ( $n > 1$ ) 时 (Greene—Wu, Function theory on manifolds which possess a pole, Lecture Notes, in Math.) 是否是  $L$  域?

## 关于双曲流形与全纯映射

陈志华 (中国科学院数学研究所)

本文是对近年来出现的多复变函数论的一个被称之为“双曲流形”的新的分支和另一个近年来在多复变函数论中有较大进展的分布理论分支(一般人通称全纯映射理论)作一最简单介绍。

### 一、双曲流形的定义与基本性质

众所周知在单复变函数论中, 有一个十分重要的结果——Schwarz 引理, 它是单复变函数论中一个十分有用、十分深刻的结果, 古典的函数论的叙述为:  $D$  是  $C^1$  中的单位圆,  $f$  是  $D$  上的全纯函数,  $f(0)=0$ , 而且  $|f(z)| < 1$  在  $D$  上成立, 则  $|f(z)| \leq |z|$ 。此引理有另一个用几何语言表达的方式为: 单位圆  $D$  上有一个微分度量  $ds^2 = \frac{1}{(1-|z|^2)^2} dz \otimes d\bar{z}$ , 它决定了  $D$  上的一个距离  $\rho$ ,  $D$  关于距离  $\rho$  是完备的, 而 Schwarz 引理就是对  $\forall f \in \text{Hol}(D, D)$  ( $\text{Hol}(M, N)$  表示由  $M$  到  $N$  的全纯映射全体所成的集) 与  $\forall a, b \in D$ , 有  $\rho(f(a),$

$f(b)) \leq \rho(a, b)$ , S. Kobayashi 就是企图在一般的复流形上找到类似于  $D$  中距离  $\rho$  那样的距离, 使 Schwarz 引理成立。S. Kobayashi<sup>(1)(2)</sup> 在 1967 年明确的提出双曲伪矩的概念。

设  $D$  是一个单位圆 ( $C^1$  中),  $M$  是一个复流形, 对  $M$  中任何两点  $p, q$ , 如能存在一串  $p = p_0, p_1, \dots, p_r = q$  与  $a_1, b_1, \dots, a_r, b_r \in D$ , 以及  $f_1, \dots, f_r \in \text{Hol}(D, M)$ , 使

$$\begin{aligned} f_1(a_1) = p_0, & f_1(b_1) = p_1, \\ f_2(a_2) = p_1, & f_2(b_2) = p_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$f_r(a_r) = p_{r-1}, \quad f_r(b_r) = p_r,$$

这样的  $\{(p_i)(a_i, b_i)(f_i)\}$  就称为连接  $p, q$  的全纯链, 每个这样的全纯链, 对应一个

非负数  $\sum_{i=1}^r \rho(a_i, b_i)$ , 定义  $d_M(p, q) = \inf$

$\sum_{i=1}^r \rho(a_i, b_i)$ , 这里  $\inf$  是对所有连接  $p, q$  的全纯链取的。从定义易于验证  $d_M$  是一个伪

矩, 亦有人称其为S. Kobayashi伪矩.

下面我们来看这个伪矩的一些最基本性质.

**命题1** 设  $M, N$  是二个复流形,  $f: M \rightarrow N$ ,  $f \in \text{Hol}(M, N)$ , 则对  $\forall p, q \in M$ , 必有  $d_N(f(p), f(q)) \leq d_M(p, q)$ .

**命题2** 对  $C^1$  中的单位圆, 有  $d_D = \rho$ .

**命题3** 设  $M$  是一个复流形, 在其上有一个伪矩  $d'_M$ , 它对  $\forall f \in \text{Hol}(D, M)$  与  $Aa, bCD$  有

$$\rho(a, b) \geq d'_M(f(a), f(b)),$$

则  $d'_M \leq d_M$ .

**定义** 一个复流形  $M$ , 如  $d_M(a, b) \geq 0$  之充要条件是  $a = b$ , 则称  $M$  为双曲流形. 亦即当伪矩  $d_M$  成为一个真距离时, 称  $M$  为双曲流形. 一个双曲流形  $M$  关于距离  $d_M$  是完备的, 就称  $M$  为完备双曲流形.

可以验证当  $M$  为双曲流形时,  $d_M$  所决定的拓扑与  $M$  原来的拓扑是一致的.

对于  $C^1$  中的单位圆  $D$ ,  $d_D = \rho$ , 而  $D$  关于  $\rho$  是完备的, 因此  $D$  是完备双曲流形. 对于一个一般的复流形要从  $d_M$  的定义直接去判断它是否双曲? 是否完备双曲, 这是很困难的. 下面的一些命题可以供给我们一批双曲流形与完备双曲流形的实例.

**命题4** (a) 两个复流形  $M_1, M_2$ , 如果全纯同构, 则必同时为双曲(完备双曲).

(b) 两个复流形  $M_1 \subset M_2$ , 如  $M_2$  双曲, 则  $M_1$  亦然.

(c) 两个复流形  $M_1, M_2$ ,  $\forall p_1, q_1 \in M_1$ ,  $p_2, q_2 \in M_2$ , 则有

$$d_{M_1}(p_1, q_1) + d_{M_2}(p_2, q_2) \geq d_{M_1 \times M_2}((p_1, p_2), (q_1, q_2)) \geq \text{Max}(d_{M_1}(p_1, q_1), d_{M_2}(p_2, q_2)).$$

由(c)知道, 如  $M_1, M_2$  双曲(完备双曲), 则  $M_1 \times M_2$  亦然.

设  $\tilde{M}, M$  是两个复流形,  $f: \tilde{M} \rightarrow M$ ,  $f \in \text{Hol}(\tilde{M}, M)$ , 且  $f(\tilde{M}) = M$ , 对  $\forall m \in M$ , 存在  $m$  的一个邻域  $U$ , 使  $\pi^{-1}(U)$  的每一连通

分支与  $U$  在  $f$  之下同胚. 则称  $(\tilde{M}, f, M)$  是一个全纯复盖, 或者说  $\tilde{M}$  是  $M$  的一个全纯复盖.

**命题5**  $f: \tilde{M} \rightarrow M$  是一个全纯复盖, 则  $\tilde{M}$  是(完备)双曲当且仅当  $M$  是(完备)双曲.

如  $M = D^1 - \{3 \text{ 个点} \}$ , 则其有万有复盖是单位圆, 因此  $D^1 - \{3 \text{ 个点} \}$  是完备双曲流形.

**命题6**  $(E, F, \pi, M)$  是以  $F$  为纤维,  $M$  为底的全纯纤维丛, 则当  $F$  和  $M$  是(完备)双曲时,  $E$  亦是(完备)双曲.

(关于纤维丛的定义见一般近代的微分几何书)

**命题7** 一个(完备)Hermite 流形  $M$ , 如它的全纯截曲率有一个负常数上界, 则  $M$  是(完备)双曲.

(关于Hermite几何的基本性质可见于陆启铤<sup>[3]</sup>之附录或其他微分几何书)

上面的定义与命题都是对  $M$  是复流形陈述的, 事实上  $M$  的正则性是不重要的, 因此这些定义与命题对于复空间也都成立, 关于复空间的定义见 R. C. Gunning, H. Rossi<sup>[4]</sup>. 这七个命题, 从双曲伪矩的定义出发不难给出证明.

有一类流形, 它的双曲伪矩特别简单, 即对任何两点的双曲伪矩都是零, 这类流形称为双曲平凡的. 最简单的例子是  $C^1, C^n$ , 因为  $D$  内  $0$  点与  $0$  任意相近的点均可以一个全纯映射映成  $C^n$  上任意两点, 因此  $C^n$  中任两点之双曲伪矩可以小于一个任意小的正数, 因此必为零. 由  $P^n \supset C^n$ , 故  $d_{P^n} = 0$ , 另外  $C^1 - \{0\}$ ,  $C^n - \{0\}$  亦是双曲平凡的, 因为  $\exp: C^1 \rightarrow C^1 - \{0\}$  是一个满全纯映射, 因此  $d_{C^1 - \{0\}} = 0$ ,  $d_{C^n - \{0\}} = 0$  亦为显然. 另外在紧 Riemann 曲面中, 当亏格  $g = 0$  时, 它就是  $P^1$ ,  $g = 1$  时, 是环面, 它以  $C^1$  为万有复盖, 因此都是双曲平凡的, 但对  $g \geq 2$  时, 可以证明此时紧 Riemann 面是完备双曲的.

## 二、双曲流形的若干 函数论性质

任何一本单复变函数论的书上,都会提到特别精彩的小Picard定理:在 $C^1$ 上定义的全纯(亚纯)函数,如不取两个(三个)以上的值,则这个函数必是常数.将它改书为全纯映射的语言,即为 $f: C^1 \rightarrow P^1 - \{3\text{个不同的点}\}$ 的全纯映射必为常数.从双曲流形的观点来看 $C^1$ 是双曲平凡的,而 $P^1 - \{3\text{个不同的点}\}$ 是双曲流形,自然想到应该有

**定理1**  $f: N \rightarrow M$ ,  $N, M$ 为两个复流形,  $d_N = 0$ ,  $M$ 为双曲,  $f \in \text{Hol}(N, M)$ , 则 $f$ 必为常数.

证明:  $\forall a, b \in N, d_M(f(a), f(b)) \leq d_N(a, b) = 0$ . 因此由 $M$ 为双曲, 故 $f(a) = f(b)$ .

这个用两句话证明的多复变数的第一个较一般的小Picard定理是在单复变函数的小Picard定理发现后九十年才得到的. 定理1的最简单情况就是单复变的小Picard定理, 但是定理1究竟给了我们多少东西, 取决于对双曲平凡流形与双曲流形的了解程度. 作为小Picard定理的形式推广, 自然还提出全纯映射 $f: C^m \rightarrow P^n - \{2n+1\text{个居最广位置的超平面}\}$ 或 $f: C^m \rightarrow P^n - \{2+n\text{个居最广位置的超平面}\}$ 是否是退化或常值? M. L. Green<sup>[8]</sup>和M. Fujimoto<sup>[9]</sup>都在1972年证明了如下结果: 全纯映射 $f: C^m \rightarrow P^n - \{n+k\text{个居最广位置的超平面}\}$ , 则 $f(C^m) \subset [n/k]$ 维的投影子空间中. 这就回答了上面的问题, 即 $k=2$ 时,  $f(C^m)$ 是在 $P^n$ 的真子空间中; 当 $k=n+1$ 时,  $f(C^m)$ 就是一点. 显然, 如果我们知道 $P^n - \{2n+1\text{个居最广位置的超平面}\}$ 是一个双曲流形, 则由定理1, 自然得出问题一半之解, 但这个事实是1973年<sup>[7]</sup>中才得以证明.

任何一个复流形 $M$ , 如对 $\forall f \in \text{Hol}(C^1, M)$ 必为常值, 则称 $M$ 不允许复直线. 定理1

说明每个双曲流形是不允许复直线的, 但是反之则不然, 这有D. Eisenman和L. Talor给出简单的例子.  $M = \{(z, w) \in C^2; |z| < 1, |zw| < 1\} - \{(0, w); |w| \geq 1\}$ , 任何的 $f = (f_1, f_2): C \rightarrow M$ 的全纯映射一定是常值, 同时亦不难证明 $M$ 不是双曲的.

经典的单复变函数论的大Picard定理是:  $f(z)$ 在 $0 < |z| < R$ 全纯, 如果不取两个以上的有限值, 则0点必不是 $f$ 的本性奇点, 即0或为 $f$ 的可取奇点, 或为极点. 今改叙为全纯映射的语言, 即为 $f: 0 < |z| < R \rightarrow P^1 - \{3\text{个不同点}\}$ 之全纯映射, 则 $f$ 必可扩充为 $\bar{f}: D_R = \{|z| < R; z \in C^1\} \rightarrow P^1$ .

现在自然想借助双曲流形来推广大Picard定理, 最理想的推广自然是 $f: X \rightarrow A \rightarrow M \subset Y$ 是全纯映射, 其中 $X$ 是一个复空间,  $A$ 是 $X$ 的一个复子空间,  $M$ 是双曲流形, 它在复空间 $Y$ 中是相对紧的, 则 $f$ 可以扩充为全纯映射 $\bar{f}: X \rightarrow Y$ . 但是事实上并没有那么乐观的结果, 而只是在某些具体条件下, 我们才能扩充. 下面我们引进一些必需用到的概念.

**定义**  $\Omega$ 是 $C^n$ 中的一个域,  $S$ 是 $\Omega$ 中的一个子集, 如对任何 $a \in \Omega$ , 都存在一个 $a$ 的邻域 $N_a$ , 使 $S \cap N_a$ 正好是在 $N_a$ 上定义的有限个全纯函数 $f_1, \dots, f_p$ 的公共零点. 此即

$$S \cap N_a = \{z \in N_a \mid f_1(z) = f_2(z) = \dots = f_p(z) = 0\}.$$

易证 $S$ 是 $\Omega$ 中的闭子集. 当 $S \neq \emptyset$ 时,  $\Omega - S$ 在 $\Omega$ 中稠, 且 $\Omega - S$ 为连通集. 这个 $S$ 就称为解析集.

复空间、复子空间的概念请参考文献[4], 简单的讲复空间就是一个拓扑空间, 其局部同构于一个解析集.

**定义**  $M \subset Y$ ,  $M$ 在 $Y$ 中相对紧,  $Y$ 是一复空间,  $M$ 是一双曲复空间, 今 $\{P_n\}, \{Q_n\} \in M$ 的两个点列. 如 $d_M(P_n, Q_n)$ 不趋于零, 当 $\{P_n\} \cup \{Q_n\}$ 趋于 $M$ 的不同点时, 就称 $M$ 是双曲嵌入于 $Y$ 的.

最简单的双曲嵌入的例子是 $Y = P_1$

(C),  $M = P_1(C) - \{3 \text{ 个不同点}\}$ , 文献 [7][8] 中亦证明  $M = P_n(C) - \{2n+1 \text{ 个居最广位置的超平面}\}$  是双曲嵌入于  $Y = P_n(C)$ .

关于大 Picard 定理有如下几种推广

**定理2**  $f: D^* = D - \{0\} \rightarrow M \subset Y, \forall f \in \text{Hol}(D^*, M)$ ,  $M$  是双曲嵌入于  $Y$ , 则  $f$  可扩充为  $\tilde{f}: D \rightarrow Y$ .

定理2之中取  $Y = P_1(C), M = P_1(C) - \{3 \text{ 个不同点}\}$ , 就是经典的大 Picard 定理.

M. M. Kwack<sup>[9]</sup> 证明了  $f: X \rightarrow A \rightarrow M$ ,  $M$  为紧双曲流形,  $X$  是一个复流形,  $A$  是一个  $\text{codim}_X A \geq 1$  的解析集的情况与当  $M$  是完备双曲流形, 而  $\text{codim}_X A \geq 2$  时的情况. 当  $M$  用紧复空间代替流形时, 上述结果亦真.

P. Kiernan<sup>[10]</sup> 在 1973 年进一步证明了

**定理3**  $M \subset Y$ ,  $M$  为双曲复空间且双曲嵌入于复空间  $Y$ ,  $\{f_k\} \in \text{Hol}(D^*, M), \{z_k\}, \{z'_k\} \in D^*$  是两个不同点列,  $z_k \rightarrow 0, z'_k \rightarrow 0$  而且  $f_k(z'_k) \rightarrow q \in Y$ , 则有:

(i)  $f_k(z_k) \rightarrow q$ ,

(ii)  $f_k: D^* \rightarrow M$  可全纯扩充为  $\tilde{f}_k: D \rightarrow Y$ ,

(iii)  $\tilde{f}_k(0) \rightarrow q$ .

**定理4**  $A$  是流形  $X$  上闭复子空间, 如  $A$  是正规截的(即局部  $X - A$  可同构于  $(D^*)^n \times D^1$ ), 则任何  $f: X - A \rightarrow M \subset Y (M, Y \text{ 之条件如定理3})$  的全纯映射可扩充为  $\tilde{f}: X - A \rightarrow Y$  的全纯映射.

下面的例子说明, 当  $M$  非紧时正规截的条件是必要的.

$M = D \times \{C - (1, -1)\} \subset P_1(C) \times P_1(C)$ , 这个  $M$  是双曲嵌入于  $P_1(C) \times P_1(C)$ , 现在  $X = D \times D$ , 而

$A = \{(z, w) \in D \times D \mid z = 0\} \cup \{(z, w) \in D \times D \mid z = \pm w\}$ .

今定义  $f: X - A \rightarrow M, f(z, w) = (z, w/z)$ , 这个  $f$  无法扩充到整个  $X$  上, 因无法定义  $f(0, 0)$ , 使  $\tilde{f}$  为连续.

单复变函数论另一个重要的结果是 Mo-

ntel 的正规定则:  $\{f_i\}_{i \in I}$  是在  $C^1$  的一个域  $\Omega$  上定义的全纯函数族, 而且都不取两个有限值  $a, b$ , 则  $\{f_i\}_{i \in I}$  是一个正规族 (即  $\{f_i\}_{i \in I}$  之任一序列或是有子序列在  $\Omega$  内一致收敛或是一致发散于  $\infty$ ). 将 Montel 正规定则改叙为全纯映射的语言, 即为  $\{f_i\}_{i \in I}: \Omega \rightarrow P^1 - \{3 \text{ 个不同点}\}$  的全纯映射族  $\{f_i\}_{i \in I}$  之任一序列  $\{f_n\}$  或是有收敛子序列或是一致地发散 (在这里一致发散是指一致地趋于  $P^1$  中所除去的那三个点)

关于正规定则在多复变函数中的推广, 最值得提的是 Wu H.<sup>[11]</sup> 在 1967 年的工作. 他首先引进了“紧发散”的概念来描述映射序的发散情况.

**定义**  $\{f_n\}: M \rightarrow N, \{f_n\} \in \text{Hol}(M, N)$ ,  $M, N$  均为复空间, 如果对  $M$  中之任一紧集  $K$  与  $N$  中任一紧集  $K_1$ , 能找到一个正整数  $n_0$ , 当  $n > n_0$  时, 永有  $f_n(K) \cap K_1 = \emptyset$ , 就称  $\{f_n\}$  是紧发散的.

他又定义了紧空间 (Taut space) 的概念.

**定义** 如  $N$  是一个复空间, 对任何一个复空间, 如  $\text{Hol}(M, N)$  中之任一序列  $\{f_n\}$ , 它或是有子序列收敛于  $\text{Hol}(M, N)$  的一个元素或是紧发散, 就称  $N$  是一个紧空间.

这里  $\text{Hol}(M, N)$  中引进的拓扑就是通常的紧开拓扑, 紧空间的定义即使  $\text{Hol}(M, N)$  成为正规族的空间  $N$  (对于任意的复空间  $M$ ).

**定理5** 如果复空间是连通、局部紧的完备双曲复空间, 则是紧空间.

H. Wu<sup>[11]</sup> 又引进了紧复空间 (Tight complex space) 的概念.

**定义** 设  $N$  是一个复空间,  $d'$  是  $N$  上一个与  $N$  的拓扑等价的距离, 如果对任一复空间  $M, \text{Hol}(M, N)$  是等度连续的, 则称  $N$  为紧复空间.

等度连续是指对任给的  $\epsilon > 0, \forall m \in M$ , 必存在一个  $m$  的邻域  $U$ , 使  $\forall m' \in U, \forall f \in \text{Hol}(M, N)$  均有  $d'(f(m), f(m')) < \epsilon$ .

**定理 6** 如 $N$ 是双曲复空间, 则 $(N, d_N)$ 是紧密的。反之, 如果 $(N, d')$ 是紧密的, 则 $N$ 必为双曲。

上面我们简单陈述了大 Picard 定理、小 Picard 定理与正规规则的推广。这些定理在单复变中成立都是基于  $P^1 - \{3 \text{ 个不同点} \}$  这个空间的性质, 但是这个空间不仅是双曲, 而且完备双曲与双曲嵌入于  $P^1(C)$ , 在单复变讨论中这些性质的差异并不显著, 而在这里我们知道双曲性质可以推出小 Picard 定理, 双曲嵌入是推广大 Picard 定理的一个不可少的条件, 完备双曲决定了正规规则的成立。这些概念之间的关系大部分已有讨论, 有人猜想完备双曲与紧空间等价, 但是至今未能证明, 也未能枚举反例。

在这一节的最后我们要提及一个重要的事实, 象  $D, D^*$  这种最简单的流形, 它们的双曲距离在一定程度上可以计算出来, 但是一般未必有那样好的结果, Royden<sup>[13]</sup>证明对任一复空间, 其之双曲伪矩可以由一个广义 Finsler 伪度量所决定 (设  $X$  是一个复空间,  $T(X)$  表示  $X$  上的切丛,  $G$  是定义在  $T(X)$  上一个非负可测函数, 而且对任一  $v \in T(X)$ , 有  $G(\lambda v) = |\lambda|G(v), \forall \lambda \in C^1$ , 就称  $G$  为一个广义 Finsler 伪度量), 双曲伪矩的 Finsler 伪度量  $F_X(v)$  定义如下: 对  $\forall v \in T(X)$

$$F_X(v) = \inf_{f \in \text{Hol}(D, X)} \{ |u| : u \in T(D), f_*(u) = v \},$$

叫表示  $T(D)$  中之元  $u$ , 以  $D$  之 Schwarz-Pich 度量来度量  $u$  的长度。Royden<sup>[13]</sup>证明  $F_X(v)$  是  $T(X)$  上之上半连续函数, 而且其决定双曲伪矩。这个结果的证明后来为 S. Kobayashi<sup>[14]</sup>所简化,  $F_X(v)$  就称为  $X$  之双曲伪矩的无穷小形式, 这是一个十分重要的问题, 但是至今所知甚微。

以上是关于双曲流形的最简单的介绍, 主要是函数论性质, 如有进一步的兴趣可参阅 S. Kobayashi<sup>[14]</sup>的一篇综合性文章与他写的一本书<sup>[15]</sup>。

### 三、关于全纯映射

现在一般都用“全纯映射”表示研究多复变函数的值分布理论, 单复变的值分布理论已经有十分丰富与深刻的内容, 但是多复变函数论的值分布的理论还是处在极不成熟的状态, 虽然这个问题几乎与单复变的值分布理论同时开始有人探讨, 早在 1922 年 P. Fatou<sup>[16]</sup>, 1933 年 L. Bieberbach<sup>[17]</sup> 都给出了一个从  $C^2 \rightarrow C^2$  的全纯映射  $f$  在  $C^2$  上无处退化, 但是  $C^2 - f(C^2)$  的测度不为零, 这个例子说明与单复变的小 Picard 定理有完全不同的性质, 亦是说明多变数的值分布与单变数的值分布有本质区别。在  $R. Nevalinna$ <sup>[18]</sup> 给出他的著名的第一基本定理与第二基本定理之后不久, L. V. Ahlfors<sup>[19]</sup> 和 T. Shimizu<sup>[20]</sup> 给出一个有几何意义的特征函数  $T_0(f, r)$  (它与  $R. Nevalinna$  所给出的特征函数  $T(f, r)$ , 当  $r \rightarrow +\infty$  时, 只差一个常数), 它在多复变函数的值分布理论中起了重要的作用。考虑多复变函数论的值分布理论, 首先希望得到类似于  $R. Nevalinna$  的第一基本定理与第二基本定理的结果, 一直到 1960 年, 陈省身<sup>[21]</sup> 第一个得到了多复变数的第一基本定理, 陈的结果是:  $f: C^m \rightarrow P^m$  是全纯映射, 如果  $f$  满足

$$(1) T_0(r) \rightarrow +\infty, \text{ 当 } r \rightarrow +\infty$$

$$(2) \int_{r_0}^r \frac{v_1'(t)}{t^{2m-1}} dt = O(T_0(r)),$$

则  $P^m - f(C^m)$  之测度为零。这里

$$(3.1) T_0(r) = \int_{r_0}^r \frac{v_0(t)}{t^{2m-1}} dt, v_k(t) =$$

$\int_{B_t} f^* \Omega^{m-k} \wedge \Omega_k, B_t$  是  $C^m$  中半径为  $t$  的超球,  $\Omega_0$  是  $C^m$  上欧氏度量所对应的二次形式  $\Omega_0 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i=1}^m d\zeta_i \wedge \bar{d}\zeta_i$  ( $\zeta_i$  是  $C^m$  中的欧氏坐标), 现在较详细的解释一下  $\Omega$ ,  $m$  维复投

影空间  $P^m$  上有一个 Fubini—Study 度量

$$ds^2 = \frac{1}{\langle Z, Z \rangle^2} \left\{ \langle Z, Z \rangle \langle dZ, dZ \rangle - \langle dZ, Z \rangle \langle Z, dZ \rangle \right\}, \text{ 这里 } Z = (z^0, \dots, z^m) \in P^m, \langle Z, W \rangle = \sum_{i=0}^m z^i \bar{w}^i, \text{ 这个 } ds^2 \text{ 对应一个二次形式}$$

$$\Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \frac{1}{\langle Z, Z \rangle^2} \left\{ \langle Z, Z \rangle \sum_{i=0}^m dz^i \wedge d\bar{z}^i - \left( \sum_{i=0}^m dz^i \bar{z}^i \right) \wedge \left( \sum_{i=0}^m d\bar{z}^i z^i \right) \right\} = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} d' d''$$

$$\log |Z| = dd^c \log |Z|,$$

$$\text{其中 } d' = \sum_{i=0}^m dz^i \frac{\partial}{\partial z^i}, d'' = \sum_{i=0}^m d\bar{z}^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$$

$$d = d' + d'', d^c = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} (d'' - d')$$

和  $|z| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

(3.1) 中所定义的  $T_m(r)$ , 当  $m=1$  时就是 L. V. Ahlfors 所定义的特征函数。陈省身之文的主要点是设法表示出奇异性  $f(B_r)$  与  $A$  之相交数  $n(r, A)$  (这里  $A \in P^n$ , 表示  $P^n$  之一点)

$$(3.2) \quad n(r, A) - v_0(r) = \int f(\partial B_r) \wedge.$$

这里  $\wedge$  是一个  $2n-1$  次形式, 其之作用相当于单复变值分布中产生  $m(f, r)$  的项。

1968—69 年伍鸿熙<sup>(22)</sup> 推广了陈的结果, 证明非积分的第一基本定理在更广的范围存在 (即 (3.2))。

关于开 Riemann 曲面到  $P^n$  (或到 Grassmann 流形) 已有较好的结果, 可在文献<sup>(23)</sup> (24) (25) 中找到, 这个结果可以用来得  $f: C^m \rightarrow P^n$  的全纯映射的第一基本定理。设  $\xi$  表示  $C^m$  中过原点的一条复直线, 则  $C^m$  中所有这样的复直线构成一个  $P^{m-1}$ , 现在将限制在  $\xi$  上, 就得到  $f_\xi: C^1 \rightarrow P^n$  的一个全纯映射, 对它应用已有的结果得到第一基本定理。再对  $\xi$  积分就可以得到  $f$  的第一基本定理。关于较详细的证明见之于 P. Griffith 和 J.

King<sup>(26)</sup>。关于从  $C^n$  到  $P^n$  的全纯映射的第二基本定理, 这十几年来也有不少人作尝试, 其中较成功的是 J. Carlson 和 P. Griffith<sup>(27)</sup> 的工作, 他们得到  $f: C^n \rightarrow P^n$  的全纯映射的亏量公式  $\sum_1 \delta(A_i) \leq n+1 = \chi(P^n)$ , 这里  $A_i$  是

$P^n$  中居最广位置的超平面。文献<sup>(28)(27)</sup> 都是对一般的代数流形到一般的投影代数流形作的第一、第二基本定理, 内容极为丰富, 而且还有在代数几何的应用是值得对全纯映射有兴趣的读者一读。这十几年国外从事全纯映射研究的人不少, 发表的文章数量亦甚多, 由于篇幅所限这里只是提到极少的几篇笔者认为特别有价值的。另外 W. Stoll 长期从事多复变数的值分布理论, 在 1970 年他所写的一本书<sup>(28)</sup> 详细地总结了他个人的工作, 另外最近他又发表了一篇综合性文章<sup>(29)</sup> 值得有兴趣于这方面的同志参考。

#### 参 考 文 献

- [1] S. Kobayashi, J. Math. Soc. Japan, 19(1967), 481—485.
- [2] S. Kobayashi, J. Math. Soc. Japan, 19(1967), 460—480.
- [3] 陆启铿, 典型流形与典型域, 上海科技出版社, 1963.
- [4] R. C. Gunning, H. Rossi, analytic Functions of several complex variables, Printice-Hall series in Modern Analysis, 1965.
- [5] M. L. Green, Trans. Amer. Math. Soc., 169(1972), 89—103.
- [6] H. Fujimoto, Tôhoku Math. J., 24(1972), 415—422.
- [7] P. J. Kiernan, S. Kobayashi, Nagoya Math. J., 50(1973), 199—216.
- [8] H. Fujimoto, J. Math. Soc. Japan, 25(1973), 235—249.
- [9] M. H. Kwack, Ann. Math., 90(1969), 9—22.

- [10] P. Kiernan, *Trans of A. M. S.*, 172(1973), 347—355.
- [11] Wu H., *Acta Math.*, 139 (1967), 193—233.
- [12] H. L. Royden, *Lecture Notes in Math.* Vol1, 185, 125—137.
- [13] S. Kobayashi, *Tôhoku Math. J.*, (2)25 (1973), 481—486.
- [14] S. Kobayashi, *Bulletin of A. M. S.*, Vol82, №3 (1976), 357—416.
- [15] S. Kobayashi, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, inc, New york, 1970.
- [16] P. Fatou, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol 175, (1922), 1030—1033.
- [17] L. Bieberbach, *Preuss. Acad. Wiss. Sitzungsber.*, (1933), 476—479.
- [18] R. Nevalinna, *Le théorème de Poincaré-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Paris, (1929).
- [19] L. V. Ahlfors, *C. B. 7 congr. Math. Scoda*, Oslo, (1929), 84—88.
- [20] T. Shimizu, *Jap. J. Math.*, 6, (1929) 119—171.
- [21] Chern, S.S., *Ann. of Math.* Vol71, №7 (1960).
- [22] Wu H., *J. Diff. Geom.*, 2 (1968), 197—202, *J. Diff. Geom.*, 2 (1968) 369—384, *J. Diff. Geom.*, 3(1969), 83—94, *J. Diff. Geom.*, 3 (1969), 433—446.
- [23] H. Weyl, *Meromorphic functions and analytic curves*, *Annals of Math. studies*, №12, Princeton Univ. Press., 1943.
- [24] Chern S. S., *Complex manifolds without potential theory*, D. Van Nostrand company, 1967.
- [25] Wu H., *The equidistribution theory of holomorphic curves*, *Annals of Math. studies*, №64, 1970.
- [26] P. Griffiths, *J. King.*, *Acta Math.*, 130 (1973), 145—220.
- [27] J. Carlson, P. Griffiths, *Ann. of Math.*, (2) 95 (1972), 557—584.
- [28] W. Stoll, *Lecture Notes in Math.*, 135.
- [29] W. Stoll, *Bulletin of A. M. S.*, Vol32, №2, March(1977), 166—183.

## $C^n$ 中域的分类理论

许以超 (中国科学院数学研究所)

### §1. 引言

$C^n$  中域  $D_1$  到  $D_2$  上的——对应  $\sigma: w_j = f_j(z_1, \dots, z_n)$ ,  $1 \leq j \leq n$  称为同构, 如果  $f_1, \dots, f_n$  在  $D_1$  上全纯. 当  $D_1 = D_2$ , 则称为自同构. 显然同构是等价关系. 域的分类理论指 1. 分类问题, 即求出在这个等价关系下的全系不变量; 2. 实现问题, 即在每个等价类中

找出一个具有最简形状的标准域. 这些问题是多复变函数论的基本问题之一. 在  $n=1$  时, 问题已得到完整的解决. 当  $n>1$ , 这些问题远未解决. 下面就介绍这方面的发展状况.

### §2. $C^2$ 中域的分类理论

迄今关于  $C^n$  中域的分类工作, 都是围绕著有界情形. 在 1935 年 H. Cartan 证明了有

界域的(最大)自同构群G为有限维实李变换群, 域中任一点P, 点P之迷向子群H<sub>P</sub>为G之紧子群. 在n=2时, 有界域D称为Thullen域(或简称T域), 如果D中存在一点P, 使dimG>dimH<sub>P</sub>. 已有的分类结果是完全解决了如下四类域的分类: T-Reinhardt域(P. Thullen 1930), T-圆型域(H. Cartan 1932), T-半圆型域(许以超, 王德霖 1977), T-正(m, p)圆型域(许以超 1963). 关于一般情况如下: 由于1907年Poincaré证明了C<sup>2</sup>中单连通域双圆柱和超球互不同构, 从而揭开了多复变函数论域的分类理论的序幕. 从1907—1932年间, 集中研究了C<sup>2</sup>中有界域的分类. H. Cartan(1931, 1932)定义了(m, p)圆型域, 其中整数m, p有m≥|p|, m>0, m, |p|互素. 且证明了有界域D中若点P(不妨设它为原点)使迷向子群维数最大, 同时它不可分解, 即不同构于低维有界域的拓扑积, 则存在同构, 将它映为(多叶)有界(m, p)圆型域, 或超球, 或有界Reinhardt域, 或僵域(迷向子群不连通, 单位分量为零维), 或死域(迷向子群连通, 且零维). Thullen及Cartan给出了各种类型单叶域之例. 关于单叶的僵域及死域, 及有界反圆型域, 有界反(m, p)圆型域以及非Thullen的Reinhardt域, 圆型域, 半圆型域及正(m, p)圆型域等没有任何结果. 所以即使在n=2的情形, 分类理论没有什么进展.

### §3. C<sup>n</sup>中强拟凸域的分类

在n≥2时除了利用自同构群G为实Lie群, É. Cartan在1935年还指出有界域的Bergman核函数K(z,  $\bar{z}$ )在分类理论中扮演了重要的角色. 这是因为其伴随Kähler型 $\sum \frac{\partial^2 \log K(z, \bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \otimes d\bar{z}_j$ 是Kähler度量, 从而可以运用复几何的工具. 在n≥2时, 已有的分类结果都是关于拟凸域的. C<sup>n</sup>中一域D称为拟凸的, 结果它有界, 且任取z<sub>0</sub> ∈ ∂D, 存在z<sub>0</sub>的邻域U<sub>0</sub>及U<sub>0</sub>上C<sup>2</sup>类函数φ(z),

使D ∩ U<sub>0</sub> = {z ∈ U<sub>0</sub>; φ(z) < 0}, 且任取q ∈ U<sub>0</sub>, grad φ|<sub>q</sub> ≠ 0,  $\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_q \geq 0$ , 称为强拟凸

的, 如果 $\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_q > 0$ . 这时可证存在R<sup>2n</sup>

上C<sup>2</sup>类函数φ(z), 使D = {z ∈ C<sup>n</sup>; φ(z) < 0}, 且任取q ∈ ∂D, grad φ|<sub>q</sub> ≠ 0,

$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_q > 0$ . 当φ(z)为多项式, 则D

称代数强拟凸域, 当φ(z)解析或光滑, 相应地D称解析或光滑强拟凸域. 从1974年Fefferman及陈省身, Moser的工作发表以来, 光滑强拟凸域的分类成为当前一个很引人注意的分支. Fefferman给出了光滑强拟凸域的Bergman核函数的渐近展开式K(z,  $\bar{z}$ ) = φ(z)<sup>-(n+1)</sup> F(z) + (log φ(z)) G(z), 其中F, G在D光滑, F在∂D附近无零点. 利用这一结果Fefferman解决了这样一个古老的猜想: 光滑强拟凸域的同构能光滑地开拓到边界, 使成为边界上的光滑同构. 这样一来, 光滑强拟凸域的边界上的光滑不变量必为此域的解析不变量. 从而引起了研究2n-1维实光滑强拟凸超曲面的必要性.

对强拟凸超曲面, 在解析情形, 当n=2早已被Poincaré(1907)注意到. B. Segre(1931), É. Cartan(1932)求出了n=2时强拟凸实解析超曲面的全局局部解析不变量. 当n>2时, 陈省身和Moser有了重大突破. 他们从两个不同角度来研究. 一是用标准超曲面在全纯映射下的像来逼近已知曲面, 特别用二阶密切来建立已知曲面的标准形; 另一个是在已知曲面上引进一主丛, 且构造了一个Cartan联络, 证明了陈-Moser定理: 设M为C<sup>n+1</sup>中实解析超曲面, 在每点非退化, 则在M上存在一个以H为结构群的主纤维丛, 它有这样的Cartan联络, 其值取在SU(p+1, q+1)之Lie代数中, 这里p+q=n, 且M的Levi型的符号差为p-q. M和M'间若解析等价, 则它们的丛之间有一个保联络的同构(参看N. Tanaka 1962, 1976). 后来,



H. Jacobowitz在1977年将这两种观点作了统一的处理。

具体类型强拟凸域的分类有两个结果。S. M. Webster (1977) 从代数几何角度给出了 $C^n$ 中椭球的完全分类。Burns—Shnider则证明了光滑强拟凸域同构于超球的几种等价条件：齐性、自同构非紧、自同构群有完全不连续子群 $\Gamma$ ，使模 $\Gamma$ 紧。

#### §4. Cartan猜想

关于拟凸域分类，进展最大的是齐性有界域的分类。一域称为齐性的，如果存在自同构，将任一指定点映为一固定点。熟知齐性有界域为拟凸域。关于齐性有界域分类的第一个结果是É. Cartan在1936年给出了对称有界域的分类，除了两个例外域外，解决了实现问题。É. Cartan证明对称有界域齐性，且是典型域及两个例外域的拓扑积（一域称为对称，如果对此域中任一点，存在此域之自同构，以此点为孤立不动点，且 $o^2$ 为恒等变换）。两个例外域的实现是M. Isc在1969年给出的。关于É. Cartan工作的简化，有三类工作，一是用Harish—Chandra在1956年从半单Lie群理论给出的存在性证明出发，在1964年J. A. Wolf给出了四大类的实现。一是Kaecher用1957年建立的实锥理论，用半单Jordan代数的分类给出了实现。一是我们在1965年用Bergman核函数给出存在性证明，且实现了四大类典型域。É. Cartan在1936年提出了一个著名的猜想： $C^n$ 中具有不变体积元素，其伴随Kaeher度量定正，则同构于对称有界域。从1936年到1959年间，关于分类理论没有任何进展，原因是人们都希望给出Cartan猜想是肯定的证明。1954年A. Borel证明了齐性有界域的自同构群若半单，则必对称。1955年L. Koszul独立地证明了Cartan猜想在自同构群半单时是肯定的。到1957年，Hano将半单条件放宽到么模。同时，Koszul给出了具有不变体积元素的齐性复流形的自同构群 $G$ 的Lie代数所适合的条

件，从而引进了J. Lie代数的概念。在1959年P. Jatzetzk—Shapiro在 $n=4, 5$ 时给出了Cartan猜想的反例。1963年P. Jatzetzk—Shapiro, Vinberg, Gindikin计算了J. Lie代数，从而证明了齐性有界域的(最大)自同构群同构于代数Lie群，且迷向子群为最大紧，又齐性有界域在三角Lie群下单可递(Lie群若同构于上三角方阵构成之Lie群，则称为三角群)，从而证明了齐性有界域同构于齐性Siegel域。和Cartan猜想类似，华罗庚在1946年提出了齐性有界域的Bergman度量的全纯数曲率必取负值的猜想，这个猜想被陆启铿与许以超在1961年举出反例所否定。

#### §5. 齐性Siegel域

设 $V$ 为 $R^n$ 中以原点为顶点的开凸锥，不包含整条直线， $F(u, u) = (f_1(u, u), \dots, f_n(u, u))$ ，使 $f_j(u, u)$ 在 $C^m$ 上为Hermite型，且 $F(u, u) \in V, u \in C^m; F(u, u) = 0$ 当且仅当 $n = 0$ 。则 $D(V, F) = \{ (z, u) \in C^m \times C^m; I_m(z) - F(u, u) \in V \}$ 称为Siegel域。当 $F \equiv 0$ 称为第一类， $F \neq 0$ 称为第二类。易证Siegel域同构于有界域。记 $GL(V)$ 为 $GL(n, R)$ 中使 $V$ 映为自身的线性变换构成之闭子群。设存在Lie群 $G \subset GL(V)$ 在 $V$ 上可递，且任取 $A \in G$ ，存在 $Q \in GL(m, C)$ ，使 $F(u, u)A = F(uQ, uQ), u \in C^m$ 。则 $D(V, F)$ 在 $w = zA + \alpha + 2\Gamma_{-1}F(uQ, \beta) + \Gamma_{-1}F(\beta, \beta), v = uQ + \beta, \alpha \in R^n, \beta \in C^m, A \in G'$ 下可递，这时称 $D(V, F)$ 为齐性Siegel域。上面提到齐性有界域的分类为齐性Siegel域的分类。这是分类结果的一个重大进展。在1970年Kaup, Matsushima, Ochiai证明了齐性Siegel域同构则必线性同构，且它诱导了锥的线性同构。另一方面，熟知齐性有界域同构于不可分解齐性有界域的拓扑积。而不可分解齐性锥定义为不能线性同构于两个低维锥的拓扑积，则Kaneyuki和Tanaka(1967)证明了齐性Siegel域 $D(V, F)$ 不可分解当且仅当 $V$ 不可分解。这样一来，齐性有界域的分类化为不可分解齐性锥