数 学 纵 横 谈

谭 鼐 翟连林 编著

科学普及出版社

1 9 8 5

内容简介

本书从整个数学的发展和数学教育讲起，对中学的代数、几何、三角、解析几何和微积分的每一部分内容，分“内在联系”、“基本课题”、“常用方法”和“难点”四个专题进行详尽的分析与概括，是两位作者多年来培训中学数学教师和参加全国统编中学数学教材经验的总结。

作者曾以本书作教材，先后在湖北、吉林、北京、天津、河北、河南、山东、江苏、青海、甘肃等省、市、地区为中学数学教师作专题讲座，还曾在北京电视台作为“中学数学教材教法”课播讲，受到广大中学数学教师好评。

本书可供培训中学数学教师作教材用，亦可供中学数学教师及高中学生参考。

数学纵横谈

谭　璐　翟连林　编著

责任编辑　徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1985年10月第一版　开本：787×1092　1/32

1985年10月第一次印刷　印张：14 3/8　插页：4

印数：00001—13,000　字数：328,000

统一书号：13031·3004

本社书号：4142·13-1

定价：2.85元

序

本书针对现行中学数学教学大纲规定的内容，从基本课题、相互联系、方法技巧和严格训练四个方面作了详尽的分析概括，并对各门数学的具体选材，按其内在联系，作了结构分析表，这些表显得层次分明、条理清晰而别具一格。

本书是作者多年来辅导中学数学教师教材教法的科研成果，相信对中学数学教育的探讨会有重要参考价值。特此代为作序。

徐 利 治

1984年 9 月18日

前　　言

作者在从事高等数学教学之余，广泛地接触了中学数学教师，他们向作者提出了一些很有意义的研究课题：

“中学代数的四大部分：数、式、方程和函数，它们之间有什么关系．拿式子来说，有代数式、方程式、恒等式、条件不等式和绝对不等式，这些式子之间又有什么联系。”

“平面几何有这么多个定理，这些定理之间是个什么关系；平面三角有这么多个公式，这些公式之间又有什么联系。”

“中学数学中，方法很多，哪些是重要的、常用的。”

“学生在学习中有一些困难，在练习中会出现一些错误，怎样克服困难纠正错误．”……等等．

为了探索这些问题，作者采取了边讲边议、相互补充、集思广义、不断总结的形式来进行研究．逐渐意识到：这些问题集中到一点，就是如何从整体上来研究中学数学各部分内容之间的内在联系，从而在全局上把握住课程的中心，也就是抓住重点．

作者在参加全国统编中学数学教材的工作实践中，更加感到研究上述问题的必要性和迫切性．

从1976年起直到1984年完成本书前，作者以探索中学数学的纵横联系这个课题，曾先后在湖北、吉林、河北、河南、山东、北京、天津、江苏、青海、甘肃等省市的部分地区为中学数学教师多次进行专题讲座．1982年和1983年曾在北京电视台为北京广播电视大学中学数学教师进修后继课作

为教材播讲，受到广大听众好评，纷纷来函索取讲稿。在同志们特别是许多有经验的老教师的鼓励下，写成这本书。

本书得到徐利治教授的热情指导并为本书作序；又得到朱梧槚、周世俊、何履端、韩家渠、王家宝等同志的大力支持和帮助，为本书提供素材、校正错误，在此表示深切的谢意。

由于作者水平有限，一定存在一些缺点甚至错误，请同志们批评指正。

作　者

1984年于北京

目　　录

J111125125

绪　论

人类对数学的认识，经历了不断探索、不断前进的过程．在漫长的认识过程中，出现了多次飞跃，每一次飞跃都在数学上引起一次新的突破，小则有所创新，大则建立一门学科．可以说，每一次重大飞跃都伴随和宣告一门新的数学分支的诞生．

首先，人类对数的认识上的重大飞跃，宣告了《算术》、《初等代数》及《初等函数》的诞生．

人类对数的认识上的重大飞跃有三次．

从具体事物中抽象出数，是人类对数的认识上的第一次大飞跃．由于排序与计数的需要，便产生了自然数，进而产生了算术数（自然数、零、分数）及算术式（用四则运算符号连接算术数的式子）．大量实际问题又往往归结为列算术式及求算术式的值的问题，为了解决这个课题，便出现了《算术》这门古老的数学学科．虽然人们对算术数的认识经历了漫长的岁月，但从学校教育来看，它是从学龄前开始到小学阶段完成的．

从具体到抽象是人类认识客观事物的共同规律．人类对数的认识的第二次大飞跃，是从具体数字到抽象文字．也就是说，用一些抽象符号（一般是用字母）来表示已知的和未知的具体数字．简言之，即字母代数．在这个基础上，便出现了代数式以及方程式与不等式．而大量的实际问题包括上述算术所需要解决的问题，往往又归结为列代数式与求代数式的值以及列方程（不等式）与解方程（不等式）的问题．

为了求值（解），就必须进行化繁为简的变形．由此，以研究代数式的恒等变形与方程式（不等式）的同解变形为对象的学科——《初等代数》——便宣告诞生．虽然，人们对代数的认识经历了几千年，但从学校教育来看，它的基本部分是在初中这个阶段完成的。

从相对静止到运动变化则是人类认识事物的一般规律，也是人类对数的认识的第三次大飞跃，即从常数到变数．而变数之间的对应关系就是函数．许多实际问题往往可归结为对初等函数的研究，以研究初等函数性质为对象的学科——《初等函数》，便由此诞生。人们对初等函数的认识也经历了几百年，直到上个世纪末才完成．从学校教育来看，是从初中开始直到大学二年级学完《数学分析》才完成了这个认识。

其次，人类对形的认识上的重大飞跃，宣告了《初等几何》的诞生。

人类对形的认识上的重大飞跃也有三次．

自然界呈现出千姿百态、各种各样的图形．人们在丈量田亩、修桥筑路、制造器皿、建筑房屋等生产实践活动中，创造了一大批“具有某种规则”的几何图形．这里有三角形、四边形、多边形和圆等平面图形；有立方体、长方体、正多面体、棱（圆）柱、棱（圆）锥、棱（圆）台和球等立体图形．从自然体抽象出这些几何体，是人类对形的认识上的第一次大飞跃．人们在研究这些几何形体时，又借助代数知识，获得了有关图形的长度、角度、面积与体积的认识。从自然体抽象出几何体，人类经历了漫长的岁月；但从学校教育来说，是从学龄前到小学阶段完成这个认识的．

人类对形的认识上的第二次大飞跃，是从具体图形中特别是从直面体中抽象出点、（直）线、（平）面的概念，将

几何图形的特性研究转化为点、线、面这些基本元素在空间的位置关系及度量关系的研究．按照逻辑的观点，用推理的方法来组织已有的几何知识，探索未知的几何性质．于是《平面几何》、《立体几何》便由此诞生．《平面几何》与《立体几何》统称为《初等几何》．几何学的诞生使数学成为严密的理论科学，虽然人们对几何的认识经历了几千年．但从学校教育来说，《平面几何》是在初中完成的，而《立体几何》则是在高中完成的．

运动的观点反映在图形的研究上，是把图形视为点的运动的轨迹．这是对形的认识上的第三次大飞跃．常见轨迹已列入平面几何之中，作为中学数学基本内容之一．

综上所述，人类分别对数与形在认识上的多次重大飞跃，促使了数学上的三大学科——《初等代数》、《初等函数》、《初等几何》——的诞生．习惯上人们把这三大学科统称为《初等数学》，或简称为"三初"．从学校的教育观点来看，初等数学基本上是在中学阶段完成的．

第三，人类对数与形统一的认识上的重大飞跃，宣告了《解析几何》的诞生．

人类对数与形统一的认识上的重大飞跃有两次．

从彼此分离到相互联系是人类认识客观事物的一般规律．人类从数形分离到数形统一，在认识上的第一次大飞跃是建立数轴（直线坐标系），把实数与直线上的点一一对应起来，从此使得长期分离的数与形这两大领域有机结合起来，点可以视为数，数可以视为点．点在直线上的位置关系可以数量化，而数的运算特别是有理数的运算也可以几何化，完成这个认识从学校教育来讲是在初中阶段．

从数轴到平面（直角）坐标系是人类对数与形的认识上的第二次大飞跃，由此，把有序实数对与平面上的点一一对

应了起来，从而，使得作为点的轨迹——平面曲线与数对所满足的二元方程的解集也一一对应起来。这样，便可以用代数方法（坐标方法）来研究几何图形的性质。《解析几何》便由此宣告诞生。这个认识从学校教育来说，开始于初中，完成于高中。

上述《解析几何》，确切地说应该是《平面解析几何》，因为它研究的是平面图形特别是二次曲线的性质。如果将平面（直角）坐标系推广为空间（直角）坐标系，那末有序三实数组与空间的点便一一对应起来，空间图形与三实数组所满足的三元方程的解集也就一一对应起来。这样，便可以用代数方法来研究空间图形特别是二次曲面的性质。以此为研究对象的学科便是《空间解析几何》，它与《平面解析几何》合称为《解析几何》。

解析几何的诞生为初等数学发展到高等数学创造了前提和条件，在这个发展过程中，解析几何起了极为重要的桥梁作用。

第四，从初等数学到高等数学的重大飞跃，宣告了《微积分》的诞生.

初等数学的研究对象就其总体来说是在常量范围内进行的. 虽然也涉及到变量以及变量之间的关系——函数，但它的着眼点在于计算函数值，以及从直观上在定性方面来研究函数的简单性质，这里并没有涉及到变量的变化过程和变化趋势，从而在定量方面来研究函数的各种性质。因此，初等数学也可以说是常量数学。由此分析可知，初等数学是在相对静止的观点下来研究问题的，虽然它也涉及到运动，但不是运动的全过程，而只是运动中的某个片断。可是初等数学，无论是初等代数与初等函数中的从有理数到实数、从方程的近似解到精确解以及函数的性质；还是初等几何中的曲线的

切线和长度、平面图形的面积、空间图形的体积和表面积等问题，都不仅要涉及运动的某个片断，而且必须在运动过程中才能解决。于是极限方法由此而生，而大量的问题又往往归结为微分与积分这两种特殊极限，因此以研究微分与积分的运算及应用为对象的学科——《微积分》——便宣告诞生。

微积分的基本部分是一元函数微积分，人们习惯上称为《初等微积分》。从学校教育来说，它的主要部分是在高中完成的。而对整个微积分的认识还有待于进入理工科大学之后。

《微积分》的产生不仅解决了一大批初等数学所不能解决的问题，成为解决自然科学及工程技术中的数学问题的强有力的工具，而且也促进了数学从初等数学到高等数学的巨大转变和发展。

微积分产生前，数学已经历了几千年的发展历史，形成了两大数学分支，一是代数学，一是几何学。对函数的认识是极其初步的，还没有形成独立于代数与几何的一个分支。微积分产生后，不到三个世纪，便形成了一门庞大的以研究函数为对象的第三大数学分支——分析学。

在建立严密的极限理论后，以微积分为工具，不仅可用来研究初等数学中的函数问题，而且可以进一步研究函数的分析性质，即连续性、可微性、可积性。以研究函数的分析性质为对象的学科就是《数学分析》。

《数学分析》是整个分析学的基础，它不仅促进了分析学的突飞猛进，而且也推动了代数学与几何学的蓬勃发展。在数学发展史上出现了空前繁荣的景象，产生了一大批新的数学分支。这里有：由数学分析直接发展起来的《实变函数》与《复变函数》；从微积分的应用中分离出来的《微分几何》、《常微分方程》与《数理方程》（数理方程是《变

分法》、《积分方程》与《偏微分方程》的总称）；运用分析学发展起来的《概率论与数理统计》，从学校教育来讲，它的初等部分分别在初中以《统计初步》和高中以《概率初步》的名义作了介绍；在分析学的直接或间接的影响下，初等代数发展为《高等代数》（其中关于矩阵与向量的初步知识在高中作了简单介绍），初等几何发展为《高等几何》（高等几何是《几何基础》、《非欧几何》与《射影几何》的总称）．这些学科为区别于初等数学而统称为高等数学，它已列为大学数学专业的基础课程，除数学分析、高等代数在低年级完成外，其余课程都在高年级完成．顺便指出，人们习惯上把数学分析、高等代数与高等几何简称为“三高”或“高等数学”，而一般理工科院校开设的《高等数学》课程，是以解析几何为前提、以微积分为主体包括常微分方程和高等代数的基本知识所组成的．

扬弃枝节抓住本质是人类从事科学研究的共同规律．在代数学中，将运算的具体对象加以扬弃，抓住运算结构这个实质，便形成《近世代数》这门学科；在几何学中，将图形的度量、平行、射影等具体性质加以扬弃，抓住图形的变换是从集合到集合的一个连续的一一映射，便形成《拓扑学》这门学科；在分析学中，将函数的非本质方面加以扬弃，抓住函数是集合到集合的一个单值映射，并运用代数方法和拓扑方法便形成《泛函分析》这门学科．《近世代数》、《拓扑学》、《泛函分析》构成现代数学的三大基础，它们的基础部分已列为大学高年级的必修或选修课程．拓扑学的重要结果，关于简单多面体的顶点数、棱数、面数的欧拉定理，已在高中立体几何部分作了介绍，现代的函数概念已在高中函数部分进行了渗透，把函数看成是从定义域到值域的一个单值映射．

《近世代数》、《拓扑学》、《泛函分析》都是建立在《集合论》的基础上，集合论已成为近代数学的共同基础。集合的初步知识已在小学开始渗透，初中加以引用，高中系统地加以介绍，并用来阐述有关初等数学的概念和问题。

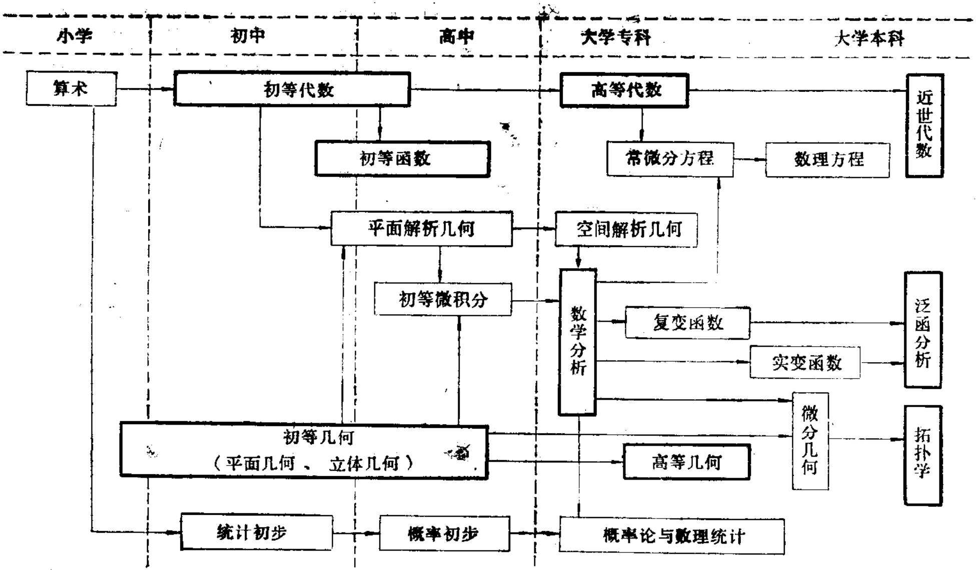
综上所述，为清晰起见，请看下页结构图Ⅰ——各级学校课程设置结构图。

下页表中箭头表示课程之间的先后关系，从这个课程设置结构表可以清楚地看到：初等代数与平面几何是整个数学的教育基础（这里所说的基础，是立足于数学教育，针对各级学校数学课程的设置与结构来说的，当然不能与数学基础论中所说“集合论为现代数学基础”一事混为一谈）．如果说“数学”是一个宏伟的大厦，那么，初等代数与平面几何就是这个大厦的两大基石，奠基不牢，大厦必倒，打好坚实的数学基础，必须从中学特别是从初中抓起．

中学数学不是一门单一学科，而是多学科的组合体．组织中学数学教材，既可以混合编写，也可以分科编写．在分科编写中，传统习惯是把初等代数与初等函数中的幂函数、指数函数与对数函数组成《中学代数》，而把三角函数与反三角函数组成《平面三角》，简称《三角》．

现行中学数学教材不仅保留了传统的教学内容，即代数、平面几何、三角、立体几何与解析几何，还增加了微积分、概率统计、逻辑代数的初步知识，并在教材中的某些部分渗透了集合与映射的观点．但就其主要内容来说，除新增加的微积分的篇幅较大外，仍旧是传统的教学内容．

中学数学各个学科之间有着密切的联系，而每个学科的各个部分之间的内在联系就更加紧密了，每个学科都有它所要解决的基本课题、常采用的方法和一定的难度．因此，为了提高教学质量，就必须从以下四个方面来进行研究．



结构图 I ——各级学校课程设置结构图