
BUDONGDIAN
LILUNJI YINGYONG
不动点理论及应用
张石生 著

不动点理论及应用

张石生著

重庆出版社
一九八四年·重庆

责任编辑　尹明善
封面设计　金乔楠

不动点理论及应用　张石生　著

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
新华书店重庆发行所发行
重庆印制一厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张16.375 插页4 字数321千
1984年8月第一版　1984年8月第一次印刷
印数：1—3,400

书号：13114·8　定价：2.80元

内 容 简 介

本书是介绍不动点理论及应用的专著.作者把到目前为止散见于国内外书刊有关不动点的最新成果，其中包括我国数学家和作者本人在国内外发表的大量成果，经过整理加工，以不大的篇幅，系统、深入地介绍了这一领域的基本内容和近期发展概况.

全书共十章，第一至三章介绍了压缩型、非扩张型和扩张型映象的不动点定理，介绍了这些定理在非线性积分方程、微分方程解的存在性和唯一性问题、线性算子的区域不变性问题、反函数的存在性问题、非线性半群理论、遍历理论及单调算子理论上的应用.

第四至七章介绍紧凸集上映象、多值映象、偏序集上映象和2-距离空间中映象的不动点定理，并给出其对代数基本定理、经济平衡点问题、变分不等式理论、极值原理、微分方程边值问题、不变子空间问题及散逸动态系统理论的应用.

第八至十章介绍正处于初期发展阶段的概率分析中随机算子、概率度量空间中映象和模糊映象的不动点定理，并给

出其对随机逼近理论和随机方程解的存在性和唯一性问题的应用。

全书采用的是泛函分析的方法。阅读本书只假定读者具有泛函分析，函数论和微分方程的基础知识。为便于初学，选定的内容写得较细，期望在没有外援的的情况下也能坚持自学；为便于研究，各章末都开列了一批参考文献。

本书可供数学系高年级学生、研究生学习，也可供数学工作者、理论物理、控制论科学工作者参考。

序　言

不动点理论是目前正在迅速发展的非线性泛函分析理论的重要组成部分，它与近代数学的许多分支有着紧密的联系。特别是在建立各类方程（其中包括各类线性或非线性的、确定或非确定型的微分方程、积分方程以及各类算子方程）解的存在唯一性问题中起着重要的作用。

自本世纪初Brouwer和Banach提出两个以他俩姓氏命名的Brouwer定理和Banach压缩映象原理之后，半个多世纪以来，特别是最近二十年来，由于实际需要的推动和数学工作者的努力，这门学科已经出现了诸子百家，巧立门户，群峰竞秀，万水争流的局面。我国数学工作者在这方面也作了大量工作，取得了许多第一流的成果。但是到目前为止，还缺少一本适合于广大读者学习的直接而又详细，系统而又统一的介绍不动点理论的核心部分及其近代发展的专门性著作。本书的目的就是试图满足这一急需。在本书中我们把到目前为止散见于国内外各主要杂志发表的有关不动点理论及其应用的重要结果，其中包含作者本人的若干结果，通过整理，希望在一本篇幅不大的书里，向读者系统地介绍不动点理论

的基本内容及其近期发展概况，以期通过本书的学习，能对读者进行有关不动点理论的某些前沿性工作有所裨益。

全书采用的是泛函分析的方法。为了便于初学，作者力求把选定的内容写细。我们希望即使在没有外援的情况下，也有可能坚持自学。

全书共十章

第一章介绍经典的Banach压缩映象原理及其近代各种推广形式(即所谓的压缩型映象的不动点定理)，以及它们之间的联系，并给出其对非线性Volterra积分方程和微分方程解的存在性、唯一性问题、线性算子区域的不变性问题、反函数的存在性问题、以及单调算子理论的应用。

第二章介绍非扩张映象的不动点定理及其各种形式的推广，并给出其对非线性半群理论、遍历理论和单调算子理论的应用。

第三章讨论扩张型映象的不动点定理，并给出其对Banach空间中具局部凝聚映象和局部增殖映象的方程解的存在性问题的应用。

第四章介绍紧凸集中映象的不动点定理，其中包括著名的Brouwer不动点定理，Schauder不动点定理，Tychonoff不动点定理和Krasnoselskii不动点定理以及它们的各种近代推广形式。在本章中还介绍了Borsuk-Ulam定理和Brouwer定理的各种等价形式以及与非紧性测度有关的Darbo-Sadovskii定理等。在本章中，我们是用Brouwer度的方法证明Brouwer定理。作为本章某些结果的应用，在本章之末，我

们介绍了对代数基本定理、经济平衡点问题、变分不等式理论、极值原理的应用，以及对微分方程的边值问题、双点边值问题、非线性Poisson方程以及不变子空间问题的应用。

第五章介绍多值映象的不动点定理以及各种近代推广形式，其中包括Kakutani，Ky Fan，和 Browder 等人的著名的不动点定理，并给出其对对策理论的应用。

第六章介绍偏序集中映象的不动点定理，其中包括著名的Tarski，Kantorovitch和Caristi不动点定理，以及对传染病传播模型和散逸动态系统的应用。

第七章介绍2-距离空间中映象的不动点定理。

第八章讨论随机分析中随机算子的不动点定理，其中包括 Hanš 的不动点定理，Banach，Schauder，Krasnoselskii 等人的不动点定理的随机化定理，及作者给出的多种推广形式。并给出其对随机逼近理论和随机积分-微分方程的应用。

第九章介绍新近发展起来的概率度量空间的理论及其中映象的不动点定理，这些定理中包括Sehgal，Bharucha-Reid，Istratescu和作者本人的某些结果，同时给出其对随机算子方程解的存在性问题的应用。

第十章介绍模糊(Fuzzy)映象的不动点定理。这些定理包括Heilpern，Butnariu和作者本人最近得出的某些新结果。

另外在每章之末附有一批参考文献，供有兴趣的读者进一步参考。当然，这很可能是挂一漏万的。

本书部分内容在四川大学讲授过，作者衷心的感谢听众所提出的许多宝贵意见。

由于作者学识浅薄，尽管竭力而为，错误缺点，仍然难免，敬请随时指教，以便改进。

作者1983年2月

符　号　用　法

M°	集M的内部
$\bar{M}$	集M的闭包
∂M	集M的边界
CoM	集M的凸包
$\overline{Co}M$	集M的闭凸包
$(\cdot,\cdot)$	内积
ϕ	空集
I	恒等算子
B^*	Banach空间B的对偶空间
Z^+	正整数集
deg	度
roi	旋度
l^2	平方可和序列空间
$\mathscr{H}_0$	Hilbert立方体
$Span(M)$	由集M生成的线性子空间
$\alpha(M)$	M的非紧性测度
$F(T)$	T的不动点集

$C(M)$	M上的有界连续函数空间
$D(T)$	映象T的定义域
$R(T)$	T的值域
R	一切实数之集
R^+	一切非负实数之集
$\delta(M)$	集M的直径
$B(x,r)$	以x为心r为半径的球
$f\|_M$	f在集M上的限制
gof	f与g的合成映象
$O_T(x;\ 0,\ \infty)$	表T在x处的轨道，即

$$O_T(x;\ 0,\ \infty)=\left\{x_n=T^n x\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

$O_T(x,\ y;\ 0,\ \infty)$表T在x，y处的联合轨道，即

$$O_T(x,\ y;\ 0,\ \infty)=O_T(x;\ 0,\ \infty)\cup O_T(y;\ 0,\ \infty).$$

目　录

第一章

压缩型映象的不动点定理

§1.1 引言

设(X, d)是一度量空间，设T是X的自映象，T称为**Banach压缩映象**，如果存在常数$h\in(0,1)$使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant hd(x,y),\quad \forall x,y\in X.$$

Banach压缩映象是一类有着广泛实际背景的典型而且重要的非线性映象。

关于上述类型的映象，第一个重要的不动点定理是属于Banach[1]（以后这一定理称为**Banach压缩映象原理**），他证明完备度量空间上的每一Banach压缩映象都在该空间中存在唯一不动点。

Banach压缩映象原理实际上是经典的Picard迭代法的抽象表述，它是一个典型的代数型的不动点定理。根据这一定理，不仅可以判定不动点的存在性和唯一性，而且还可以构造一个迭代程序，逼近不动点到任何精确程度。因此，Banach不动点定理在近代数学的许多分支，特别是在应用