

高等学校教学参考书

结 构 力 学

(第三版) 下册

杨耀乾 唐昌荣

高等教育出版社

高等学校教学参考书

结 构 力 学

(第三版) 下册

杨耀乾 唐昌荣

高等教育出版社

下 册 目 录

第十一章 超静定桁架的计算	1	§ 13-11 二铰拱的计算	77
§ 11-1 超静定桁架的一般解法	1	习题	85
§ 11-2 基本结构的选择	3	第十四章 形变法	88
* § 11-3 弹性中心	4	§ 14-1 基本概念	88
§ 11-4 冗力组	5	§ 14-2 基本结构与未知数数目	91
* § 11-5 计算的校核	6	§ 14-3 正则方程式的组成	93
§ 11-6 影响线	7	§ 14-4 系数和自由项的计算	94
* § 11-7 多次超静定桁架的计算	10	§ 14-5 形变法示例	100
习题	15	§ 14-6 形变法正则方程式的矩阵解法	107
第十二章 连续梁	18	§ 14-7 对称性的利用	108
§ 12-1 三弯矩方程式	18	§ 14-8 具有非平行支柱刚架的计算	114
* § 12-2 温度变化的影响	22	§ 14-9 温度变化与支座沉陷的计算	119
§ 12-3 基础下沉的影响	23	§ 14-10 联合法	122
§ 12-4 弯矩、剪力、反力的一般公式	25	§ 14-11 混合法	123
* § 12-5 定点与定点比	26	§ 14-12 转角位移公式及其在形变中的应用	126
* § 12-6 荷载跨度内的支点弯矩	28	§ 14-13 力矩分配法计算无线位移的刚架	131
§ 12-7 在弹性支座上的连续梁	30	§ 14-14 力矩剪力分配法计算有线位移的刚架	140
§ 12-8 影响线	33	§ 14-15 无剪力分配法(剪力无变化的力矩分配法)	143
§ 12-9 连续梁影响线示例	37	§ 14-16 桁架次应力	150
§ 12-10 在均布活载作用下最不利荷载的配合	42	§ 14-17 变截面刚架的计算	153
§ 12-11 包络图	43	§ 14-18 刚架的近似计算	167
* § 12-12 在行列荷载作用下的计算	45	§ 14-19 影响线	174
习题	46	习题	184
第十三章 超静定拱的计算	50	第十五章 直接刚度法	190
§ 13-1 绪论	50	§ 15-1 引言与基本概念	190
§ 13-2 无铰拱 沿拱轴的截面变化	51	§ 15-2 结点总刚度系数	196
§ 13-3 拱轴的选择	52	§ 15-3 杆端刚度系数和单元刚度矩阵	197
§ 13-4 基本结构与弹性中心	54	§ 15-4 结构坐标系下的杆件单元刚度矩阵	201
§ 13-5 冗力的计算	57	§ 15-5 由单元刚度矩阵直接组集结构的总刚度矩阵	203
§ 13-6 内力与压力曲线	60	§ 15-6 位移、反力与杆端力的求解	208
§ 13-7 影响线	63	§ 15-7 关于非结点荷载的转换	209
§ 13-8 抛物线无铰拱的解析法	71	§ 15-8 算例	210
§ 13-9 温度变化与混凝土收缩的影响	73		
§ 13-10 拱轴缩短的影响	75		

习题	220
第十六章 按极限荷载的结构计算方法	222
§ 16-1 基本概念	222
§ 16-2 塑性铰	225
§ 16-3 塑性分析的最简单情形	227
§ 16-4 连续梁的极限荷载	230
§ 16-5 比例加载时判定极限荷载的一般定理	232
§ 16-6 刚架的极限荷载	234
* § 16-7 减载与重复荷载	237
习题	238
第十七章 结构稳定	242
§ 17-1 绪论	242
§ 17-2 求临界力的方法	244
* § 17-3 其他求临界力的方法	252
§ 17-4 在刚性支承上等截面直杆的稳定	263
§ 17-5 在弹性支承上等截面直杆的稳定	265
§ 17-6 等截面直杆在自重作用下的稳定	268
§ 17-7 变截面压杆的稳定	270
§ 17-8 剪力对于临界力数值的影响	272
§ 17-9 组合压杆的稳定	274
§ 17-10 圆弧形曲杆的平衡微分方程式	277
§ 17-11 在均匀径向压力作用下圆拱的稳定	278
§ 17-12 圆环在均匀径向压力作用下的稳定	280
* § 17-13 抛物线拱的稳定	282
§ 17-14 刚架的稳定	284
§ 17-15 连续梁的稳定	291
§ 17-16 在弹性介质上的杆件的稳定	293
* § 17-17 半穿式桥梁上弦杆的稳定	294
* § 17-18 工字梁的稳定	296
* § 17-19 薄壁杆件的稳定	299

习题	302
第十八章 结构动力学	306
§ 18-1 绪论	306
§ 18-2 单自由度体系的自由振动(无阻尼)	309
§ 18-3 单自由度体系的自由振动(有阻尼)	313
§ 18-4 单自由度体系的强迫振动(无阻尼)	317
§ 18-5 单自由度体系的强迫振动(有阻尼)	325
§ 18-6 幅值方程	328
§ 18-7 多自由度体系的自由振动	331
§ 18-8 对称性的利用	337
§ 18-9 无限自由度体系的自由振动	340
* § 18-10 等截面直杆的纵向振动、扭转振动与剪切振动	345
§ 18-11 计算频率的近似法	347
* § 18-12 桁架的自由振动	360
§ 18-13 计算桁架频率的近似法	362
§ 18-14 多自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	364
§ 18-15 多自由度体系在简谐荷载下的计算示例	366
§ 18-16 多自由度体系在一般荷载下的强迫振动(无阻尼)	370
§ 18-17 无限自由度等截面梁的强迫振动	376
§ 18-18 无限自由度刚架的强迫振动	384
习题	390
附录V $\xi_1(u)$ 、 $\xi_2(u)$ 、 $\xi_3(u)$ 、 $\eta_1(u)$ 、 $\eta_2(u)$ 、 $\eta_3(u)$ 等函数数值	395
附录VI A_{px} 、 B_{px} 、 C_{px} 、 D_{px} 等函数数值	401
附录VII 平面桁架、平面刚架计算源程序及使用说明	404
附录VIII 习题答案(下册各章)	426
主要参考书目	435

第十一章 超静定桁架的计算

§ 11-1 超静定桁架的一般解法

以冗力法解任何超静定结构,在原理以及解题的步骤上,都是一致的,超静定桁架亦不能例外。这些原理已于第十章中详细论及,兹不赘述。

至于解题的步骤,基本上是与刚架计算相同的。然而在方法上则稍有差别,兹简述于下:

首先是选择基本结构,然后写出正则方程式。由于桁架各杆仅承受轴向力,因此正则方程式中的系数与荷载项简化成为如下的形式

$$\begin{cases} E\delta_{kk} = \sum N_k^2 \frac{l}{A} \\ E\delta_{km} = \sum N_k N_m \frac{l}{A} \\ E\delta_{kP} = \sum N_P N_k \frac{l}{A} \end{cases}$$

式中的 $\sum$ 符号应包括桁架的全部杆件,连同被切断的冗杆在内。在温度变化的作用下,正则方程式中的自由项为如下的形式

$$E\Delta_{kt} = E \sum \bar{N}_k \alpha t_0 l$$

如果所取冗杆的温度也有变化,则上式中的 $\sum$ 符号内也应包括该杆在内。所有系数与自由项的计算,一般均用解析法,并应列表进行。

在解方程式并求得冗力之后,即可按下式算出桁架各杆的内力:

$$N = N_P + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \cdots + \bar{N}_n X_n$$

此项计算也应列表进行。

下面先通过一个简单例子来说明超静定桁架的一般计算步骤。

如图 11-1 a 所示超静定桁架,设各杆 EA 相同,在图示荷载作用下,求各杆的内力,并求出点 3 的竖直位移。

(1) 选基本结构如图 11-1b 所示。

(2) 列正则方程式

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

上式的物理意义是,冗杆切断处两侧的相对位移为零(它不同于 5、6 两点的相对位移)。

(3) 计算系数及自由项

为此应先算出 $\bar{N}_1$ 与 N_P , 如图 11-1 d、c 所示。计算宜列表进行,如表 11-1。表中第 4 列的总和为 $EA\delta_{11}=27$; 第 6 列的总和为 $EA\Delta_{1P}=1620$ 。

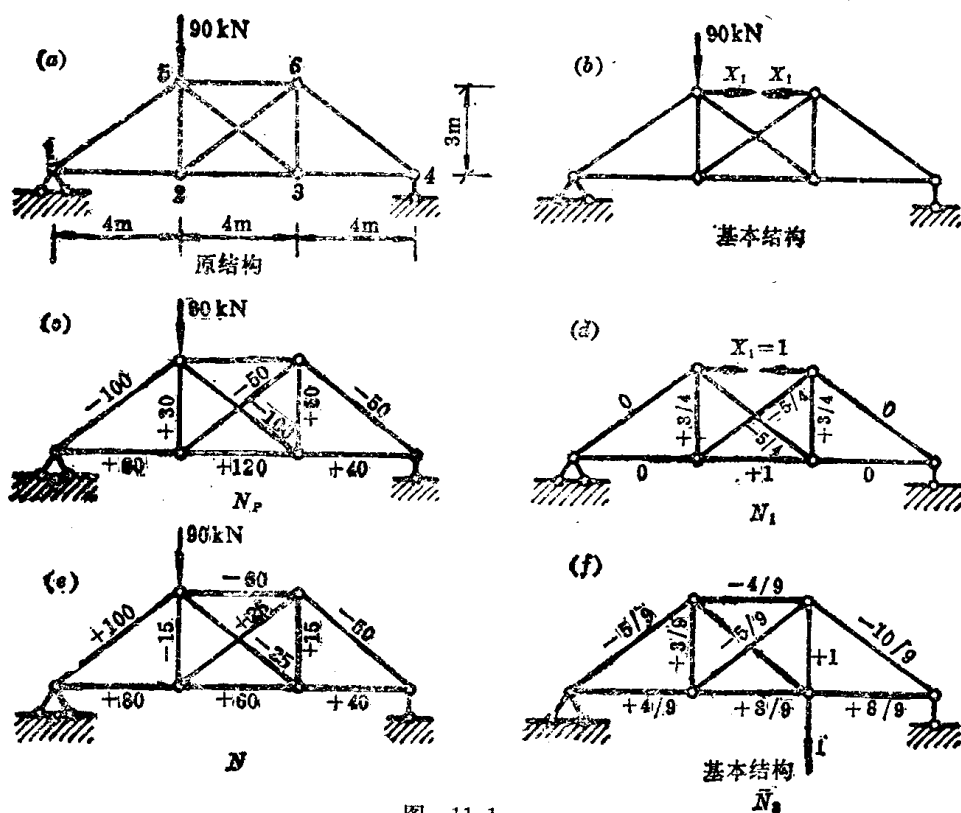


图 11-1

表 11-1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
杆件	l (m)	$\bar{N}_1$	$\bar{N}_1^2 l$	N_P (kN)	$\bar{N}_1 N_P l$	$\bar{N}_1 X_1$	$N = N_P + \bar{N}_1 X_1$	$\bar{N}_3$	$N \bar{N}_3 l$
12	4	0	0	+80	0	0	+80	+4/9	+142.22
23	4	+1	+4	+120	+480	-60	+60	+8/9	+213.33
34	4	0	0	+40	0	0	+40	+8/9	+142.22
15	5	0	0	-100	0	0	-100	-5/9	+277.78
56	4	+1	+4	0	0	-60	-60	-4/9	+106.67
46	5	0	0	-50	0	0	-50	-10/9	+277.78
25	3	+3/4	+27/16	+30	+270/4	-45	-15	+3/9	-15
36	3	+3/4	+27/16	+60	+540/4	-45	+15	+1	+45
26	5	-5/4	+125/16	-50	+1250/4	+75	+25	-5/9	-69.44
35	5	-5/4	+125/16	-100	+2500/4	+75	-25	0	0
Σ			$EA\delta_{11}=27$		$EA\Delta_{1P}=1620$			$EA\Delta_3=1120.56$	

(4) 代入正则方程式得

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{1620}{27} = -60$$

(5) 由 $N = N_P + \bar{N}_1 X_1$, 求出各杆的最后内力值, 如表 11-1 的第 8 列与图 11-1e 所示。

(6) 求结点 3 的竖直位移

按超静定结构变位的计算原理, 假想的单位力可以加在任意一个静定基本结构上。兹选基本结构如图 11-1 f 所示。求出结点 3 处单位力作用下的各杆内力 $\bar{N}_3$, 从而算得该结点的竖直位移 Δ_3 为 $EA\Delta_3 = 1120.56 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。(参阅图 11-1f 与表 11-1 第 9、10 列。)

§ 11-2 基本结构的选择

在超静定桁架的计算中,选择基本结构是具有很重要意义的,因为它可以缩短和简化计算。在一、二次超静定的桁架中,除了具有复杂腹杆的内部超静定桁架以外,可以采用下面所述的一些原则来选择适当的基本结构。

一般的超静定桁架是对称的。在此情形下,所取的基本结构最好也是对称的。如图 11-2a 所示的一次超静定桁架,如果以中间的反力为冗力,即得一对称的基本结构(图 11-1b)。因为冗力是对称的,因此在计算 $E\delta_{11} = \sum N_1^2 \frac{l}{A}$ 时,仅需计算一半桁架杆件即可。如果荷载也是对称的,那末在计算荷载项时,也有同样的便利。

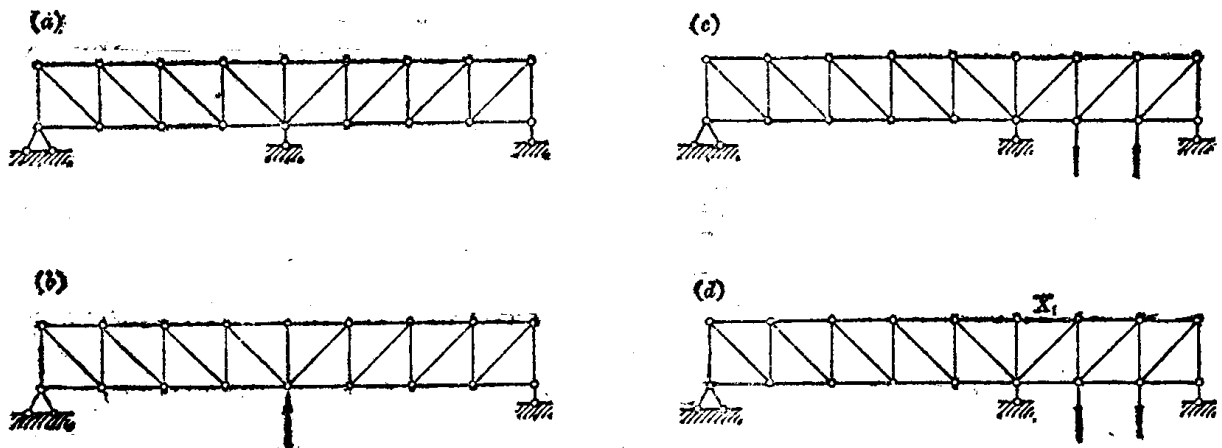


图 11-2

如图 11-2c 所示的超静定桁架,虽然也是一次超静定的,然而是不对称的。如果还是以中间的反力为冗力,则由此所得的基本结构,即失去了它的有利条件。在此情形下,假使拆除其中的一根杆件,使其成为两个简支桁架(图 11-2d),则在计算上要比较简单些,特别是当荷载仅存在于一个跨度内时,更为有利。因此,选择基本结构的第二个原则是,在连续几个跨度的内部静定外部超静定的桁架中,最好在其中间支承附近拆除一些杆件,使其成为几个互不影响的独立简支桁架。因为这样的基本结构,使冗力与荷载的影响仅局限于一部分,因此就简化了计算过程。例如如图 11-3a 所示的二次超静定结构,如取图 11-3b 所示的基本结构,则 X_1 的作用仅影响第一、二两

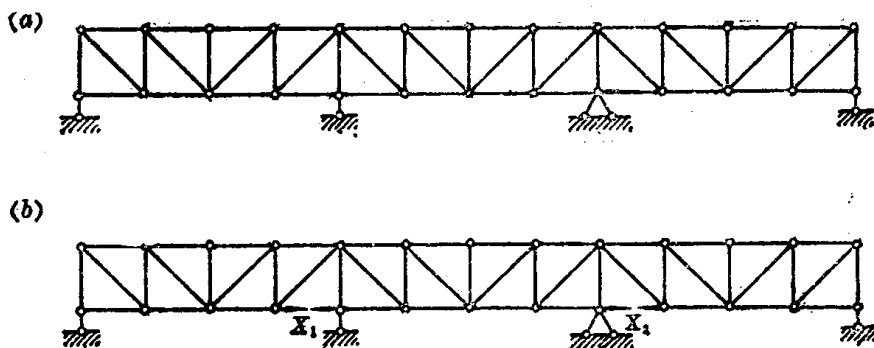


图 11-3

个跨度,而 X_2 的作用仅影响第二、三两个跨度;并且某一跨度内的荷载,其影响也仅限于该跨度内。

选择基本结构的另一个原则是,尽量选择在计算上最为简单的基本结构。如图 11-4a 所示的桁架拱,如果拆除中间的一根弦杆,其基本结构为一三铰桁架拱;如果拆除支点处的一个水平联结,其基本结构是一个简支桁架。当然,我们应该选择后一种基本结构。又如图 11-4b 所示的一次超静定组合结构,如果拆除梁式桁架部分的一根下弦杆,则其基本结构为一静定的组合结构,如果拆除拱式部分的一根链杆,则其基本结构为一梁式简支桁架。在此情形下,应该选择后一种基本结构。

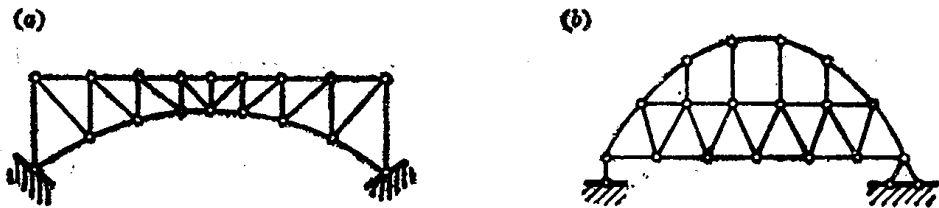


图 11-4

最后讨论一种超静定复杂腹杆桁架的基本结构选择方法。图 11-5a 为一个二次超静定的双重腹杆桁架。在选择基本结构时,非但应该注意到基本结构的静定稳定性,并且应该尽量简化系数的计算。如果拆除在对称位置内的两根竖直杆,则由此所形成的基本结构(图 11-5b),实际上是由两个独立简单桁架所组成的联合桁架。当其中一个简单桁架上作用着一对单位力时,在另一个简单桁架内的各杆内力为零。图 11-5 c 中的虚线,表示在 $X_1=1$ 作用下的零杆。同样地,在 $X_2=1$ 作用下,桁架的左边各杆内力为零。由此可见,副变位 $\delta_{12} = \sum N_1 N_2 \frac{l}{A} = 0$ 。所以在正则方程式中,每一个方程式仅包含一个未知数,这样就大大地缩短了计算过程。

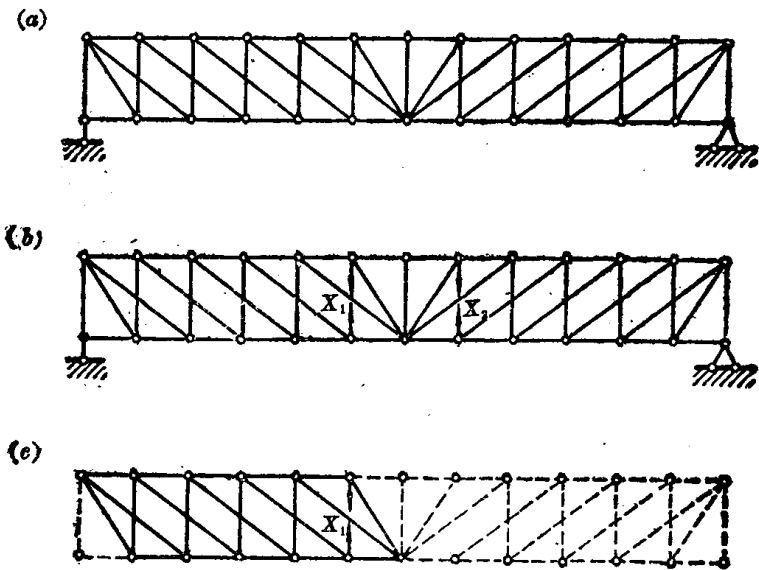


图 11-5

*§11-3 弹性中心

某些三次超静定桁架的计算,可以利用第十章 § 10-3 所述弹性中心的理论,使正则方程式中的副变位转化为零,从而简化了计算过程。图 11-6a 所示的三次超静定桁架,如果撤消左固定端,则有三个冗力,即铰 A 处的

水平与竖直反力 X_1, X_2 , 以及杆件 ab 的内力 Y , 后者可用力矩 $X_3=Y\eta$ 来代替。如果以这三个冗力为未知数, 则正则方程式中的副变位不能等于零。

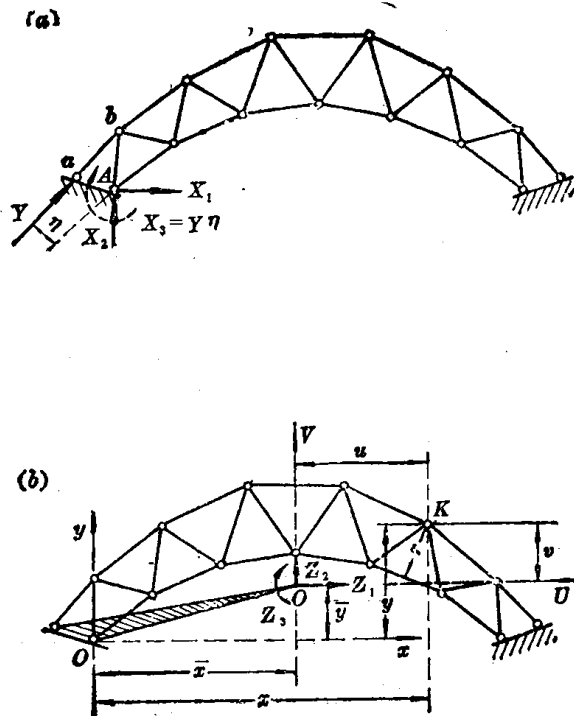


图 11-6

为欲使副变位转化为零, 可把冗力迁移到弹性中心 O 去。(图 11-6b)。在 $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$ 等各单位力作用下, 其基本结构内各杆的内力为

$$N_1=1 \times \frac{v}{r}, \quad N_2=1 \times \frac{u}{r}, \quad N_3=1 \times \frac{1}{r}$$

这里, r 为任一杆件内力至其力矩中心 K 的力臂, 而 u, v 则为任一力矩中心 K 至 V, U 轴的坐标。因为副变位转化为零, 故

$$\left. \begin{aligned} E\delta_{13} &= \sum \frac{N_1 N_3 l}{A} = \sum v \frac{l}{Ar^2} = 0 \\ E\delta_{23} &= \sum \frac{N_2 N_3 l}{A} = \sum u \frac{l}{Ar^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

这就是说, 弹性中心 O 就是以各杆的 $\frac{l}{Ar^2}$ 为弹性荷载的重心之点。因此, 弹性中心 O 对参考轴 xy 的坐标为

$$\bar{x} = \frac{\sum x \frac{l}{Ar^2}}{\sum \frac{l}{Ar^2}}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y \frac{l}{Ar^2}}{\sum \frac{l}{Ar^2}} \quad (11-1)$$

如果是平行弦杆的桁架, 则在单位力 $\bar{Z}_3=1$ 的作用下, 所有腹杆的内力均为零, 即 $N_3=0$ 。由式 (a) 可知, 在此情形下, 无需考虑腹杆的作用。在非平行弦的桁架中, 腹杆对于弹性中心位置的影响, 若与弦杆相比较, 是很小的, 因此常可略去腹杆的影响。

§ 11-4 冗力组

常遇到的多次超静定桁架, 大多数是一种对称的结构。在此情形下, 如果采用一个对称的基

本结构,常可使许多副变位转化为零,从而简化了计算过程。

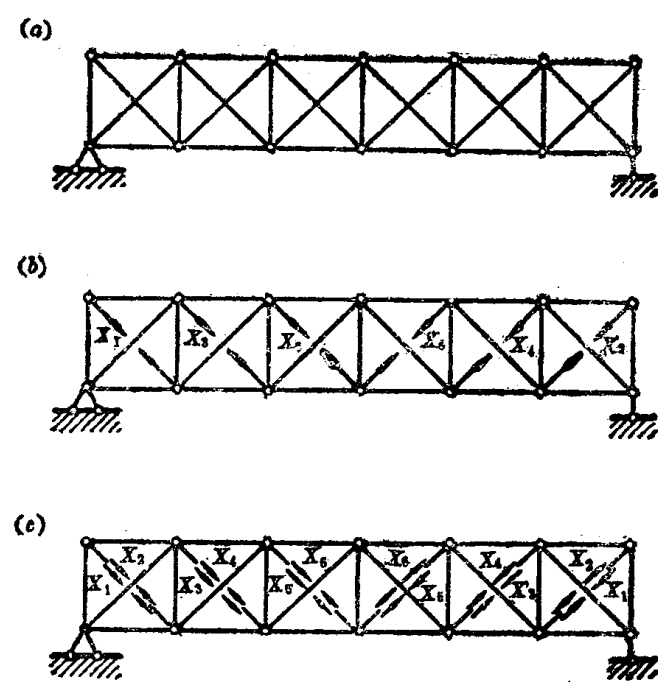


图 11-7

图 11-7a 表示一具有直撑的双重腹杆桁架,其未知数的数目依节间的数目的多少而定。如果在每一节间中拆除一根斜杆,并使其形成一对称的基本结构,如图 11-7b 所示,则可以使半数以上的副变位转化为零。这个基本结构的特点是,每一个未知力仅引起该未知力所在节间的各杆内力,因此只有中间直撑才受到其左右节间内两个未知力所产生的内力。由于这个特点,使许多副变位转变为零,而正则方程式简化成如下的形式:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11}+X_3\delta_{13}+\Delta_{1P}&=0, & X_2\delta_{22}+X_4\delta_{24}+\Delta_{2P}&=0 \\ X_1\delta_{31}+X_3\delta_{33}+X_5\delta_{35}+\Delta_{3P}&=0, & X_2\delta_{42}+X_4\delta_{44}+X_6\delta_{46}+\Delta_{4P}&=0 \\ X_3\delta_{53}+X_5\delta_{55}+X_6\delta_{56}+\Delta_{5P}&=0, & X_4\delta_{64}+X_5\delta_{65}+X_6\delta_{66}+\Delta_{6P}&=0 \end{aligned}$$

如果将每一对在对称位置内的斜杆,分解为对称与反对称的两个冗力组,如图 11-7c 所示,则更可使副变位 $\delta_{56}=\delta_{65}=0$,从而使正则方程式完全分割成两组。

*§11-5 计算的校核

多次超静定桁架的计算是繁重的,因此在整个计算过程中应步步校核,以免发生错误。其校核的方法与复杂刚架的校核方法相同,可参阅 § 10-4 至 § 10-5 各节。

首先校核正则方程式。令所有单位力全作用在基本结构上,算出桁架各杆的内力 N_s , 则

$$N_s=N_1+N_2+\cdots+N_k+\cdots+N_n \tag{a}$$

在第 k 个方程式中,全部未知数前的系数总和应等于

$$\delta_{ks}=\sum N_k N_s \frac{l}{EA}=\delta_{k1}+\delta_{k2}+\cdots+\delta_{kk}+\cdots+\delta_{kn} \tag{b}$$

各方程式中系数的总和应等于

$$\delta_{ss} = \sum N_s^2 \frac{l}{EA} = \delta_{1s} + \delta_{2s} + \cdots + \delta_{ks} + \cdots + \delta_{ns} \quad (c)$$

各方程式中自由项的总和应等于

$$\Delta_{sP} = \sum N_s N_P \frac{l}{EA} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \cdots + \Delta_{kP} + \cdots + \Delta_{nP} \quad (d)$$

至于联立求解正则方程式,可按高斯法进行(见附录 III)。

在求得各未知数之后,即可按下式

$$N = N_P + N_1 X_1 + N_2 X_2 + \cdots + N_n X_n \quad (e)$$

算出桁架各杆的内力。为了要验证全部计算的正确性,可以用变位校核法作最后的校对。此法与在刚架中所用的相同(见第十章 § 10-5),即利用超静定桁架中的某些已知变位来校核各杆内力数值的是否正确。例如,欲校核冗力 X_k 方向的相对线位移是否为零,则可利用下式进行计算:

$$\Delta_k = \sum \frac{N N_k l}{EA} = 0 \quad (f)$$

式中 N 为按公式(e)所得的超静定桁架各杆内力,而 N_k 为在单位力 $X_k=1$ 作用下的各杆内力。所有这些内力数值,是都已经求得的,因此校核的工作并不繁重。

§ 11-6 影 响 线

在移动荷载的作用下,欲求超静定桁架的各杆内力,就必须首先求得这些杆件的内力影响线。至于如何利用影响线来决定最不利的荷载位置,从而算出其活荷载内力,这与静定结构的计

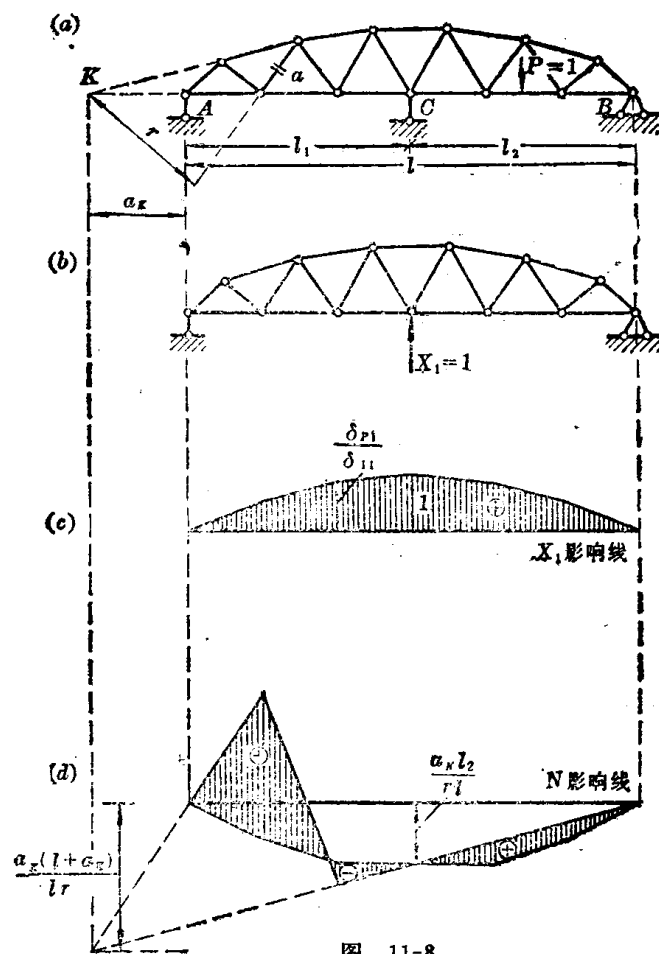


图 11-8

算是相同的。因此,问题的关键在于影响线的绘制。关于绘制超静定桁架的影响线,必须先画出其冗力影响线,然后画出其他量值(杆件内力或反力)的影响线。下面,我们来讨论这个问题。

如图 11-8a 所示的一次超静定桁架,设取中间支座 C 处的反力为冗力 X_1 ,绘 X_1 影响线。

首先必须利用基本结构写出 X_1 影响线的方程式。基本结构为一对称的简支桁架,在冗力 X_1 与移动的单位力 $P=1$ 作用下,写出正则方程式

$$X_1\delta_{11} + \delta_{1P} = 0, \text{ 或 } X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

这就是 X_1 影响线的方程式。此式中,我们用 δ_{1P} 来代替 Δ_{1P} 是因为单位荷载 $P=1$ 的缘故。这里 δ_{1P} 的意义是,因移动的单位力 $P=1$ 所引起并在 X_1 方向内的变位,它是随荷载位置而变的,是一个变数。公式中的 δ_{11} 是一个常数,其意义如前。

将荷载 $P=1$ 轮流置于载重弦的各个结点,算出各个 δ_{1P} 的数值。将这些数值分别除以 δ_{11} 之后,画在与 $P=1$ 的位置相对应点。描出各纵距的顶点,即得 X_1 影响线,如图 11-8c 所示。

在第八章中,我们曾经利用变位互等定理来简化变位影响线的计算。这个方法,当然也可用以简化冗力影响线的绘制。按变位互等定理, $\delta_{1P} = \delta_{P1}$, 代入 X_1 的影响线方程,得

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}}$$

式中的 δ_{P1} 是由于单位力 $X_1=1$ 所引起的桁架载重弦各点的挠度。其负号表示 X_1 影响线与 δ_{P1} 反号。这是因为 $P=1$ 向下,故 δ_{P1} 应以基线以下为正,基线以上为负。而作为 X_1 影响线,则应该是基线以下为负、基线以上为正。

可见, X_1 影响线就是 $X_1=1$ 所产生的挠度图 δ_{P1} , 而 $-\frac{1}{\delta_{11}}$ 是将挠度图改为影响线时所用的比例尺。

可以用变位图解法或弹性荷载法来计算 δ_{P1} 与 δ_{11} 。如果用变位图解法进行计算,可在图 11-8b 所示的单位力作用下画出卫摩图,从而得到基本结构中载重弦各点的挠度图。将此图在 C 点处的纵距当作 1, 并反其正负号,则此挠度图即为所求的冗力 X_1 影响线。

如果用弹性荷载法求 δ_{P1} 与 δ_{11} , 则弹性荷载的公式为

$$W_k = \sum \bar{N}_k \frac{\bar{N}_m l}{EA} = \sum \bar{N}_k \Delta l_m \quad (11-2)$$

式中 $\bar{N}_m$ 为由于 $X_1=1$ 所产生的各杆内力,图 11-8b 即为产生 $\bar{N}_m$ 时的荷载情形。 $\bar{N}_k$ 为结点 k 左右二杆上的单位力偶所引起的内力;例如求 W_2 时所加的单位力偶如图 11-9a 所示。图 11-9b 为其虚梁及其弹性荷载。

求弹性荷载的方法是比较繁重的。但是在特殊情形下,可以适当地作一些合理的假设,即可大大地简化计算步骤。例如,在常遇到的等节间平行弦 N 式或 V 式桁架内,弦杆中的 $\bar{N}_k$ 数值是一个常数,而腹杆内力对弹性荷载的影响是很小的(它与实体结构中剪力的影响相同)。如略去这个影响(图 11-10 桁架),则其各结点的弹性荷载公式可简化为

$$EW_k = \pm \frac{2d\bar{N}_m}{hA} \quad (11-3)$$

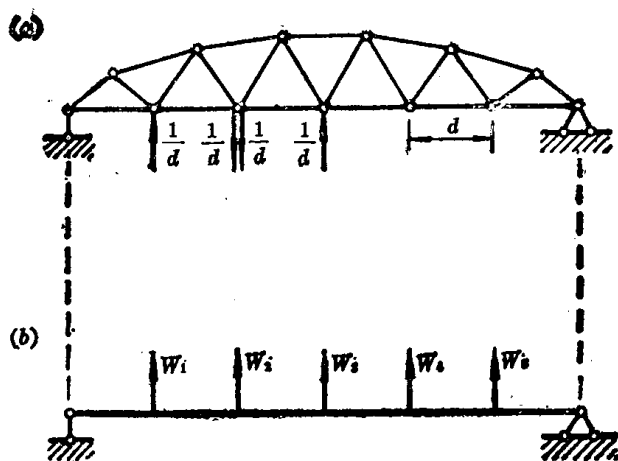


图 11-9

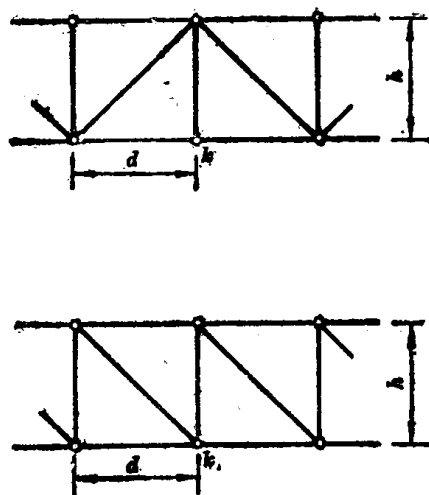


图 11-10

在各结点的弹性荷载作用下,画出虚梁的力矩图,就是载重弦的挠度图。如果令此图在 C 点(图 11-8)的纵距等于 1,即可变挠度图为 X_1 影响线。

在画了冗力影响线之后,其余桁架杆件的影响线可按叠加原理画出,其一般公式为

$$N = N_P + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots$$

例如,在图 11-8a 所示的桁架中,如欲画腹杆 a 的影响线,则先写出公式

$$N = N_P + \bar{N}_1 X_1$$

式中 N_P 是基本结构中仅由于移动的单位荷载所引起的 a 杆内力,可按 $N_P = \pm \frac{M_K^0}{r}$ 的公式画出。式中第二项的系数 $\bar{N}_1$, 为基本结构中由于 $X_1 = 1$ 所引起的 a 杆内力,其值为 $\bar{N}_1 = + \frac{l_2}{l} \times \frac{a_K}{r}$ 。将 X_1 影响线的每一纵距乘以 $\bar{N}_1$, 然后按叠加法与 N_P 影响线相叠加,得 a 杆的内力影响线,如图 11-8d 所示。应当注意到,此影响线在 C 点的纵距为零,这是与实际情形相符的。

对于两次超静定桁架,其正则方程式将为

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2P} = 0$$

故

$$X_1 = -\frac{\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \delta_{1P} + \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \delta_{2P} = C_{11} \delta_{1P} + C_{12} \delta_{2P}$$

$$X_2 = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \delta_{1P} - \frac{\delta_{11}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \delta_{2P} = C_{21} \delta_{1P} + C_{22} \delta_{2P}$$

式中 $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ 所代表的系数是与荷载无关的常数。应当注意到 $C_{12} = C_{21}$ 。

按互等定理,这些 X_1, X_2 的影响方程可以写成

$$X_1 = C_{11} \delta_{P1} + C_{12} \delta_{P2}$$

$$X_2 = C_{21} \delta_{P1} + C_{22} \delta_{P2}$$

因此冗力影响线是由挠度图乘以相应的常数后叠加而得;实际上是两个图形的叠加。如 X_1

影响线即为挠度图 δ_{P_1} 乘以常数 C_{11} 和挠度图 δ_{P_2} 乘以常数 C_{12} 后叠加而得。

对于超静定次数更多的桁架,当然也可以按同样的方法求得冗力影响线,不过需要更多的图形相叠加;计算将是更繁杂的。我们将在下节中介绍一些其他的方法。

*§11-7 多次超静定桁架的计算

图 11-11a 所示的三跨连续桁架,它是两次超静定结构。为了避免上节所述两个挠度图各乘以相应系数后的叠加,可选用超静定结构作为基本结构(图 11-11b)。注意只撤消一个反力联系,其正则方程式为

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}}$$

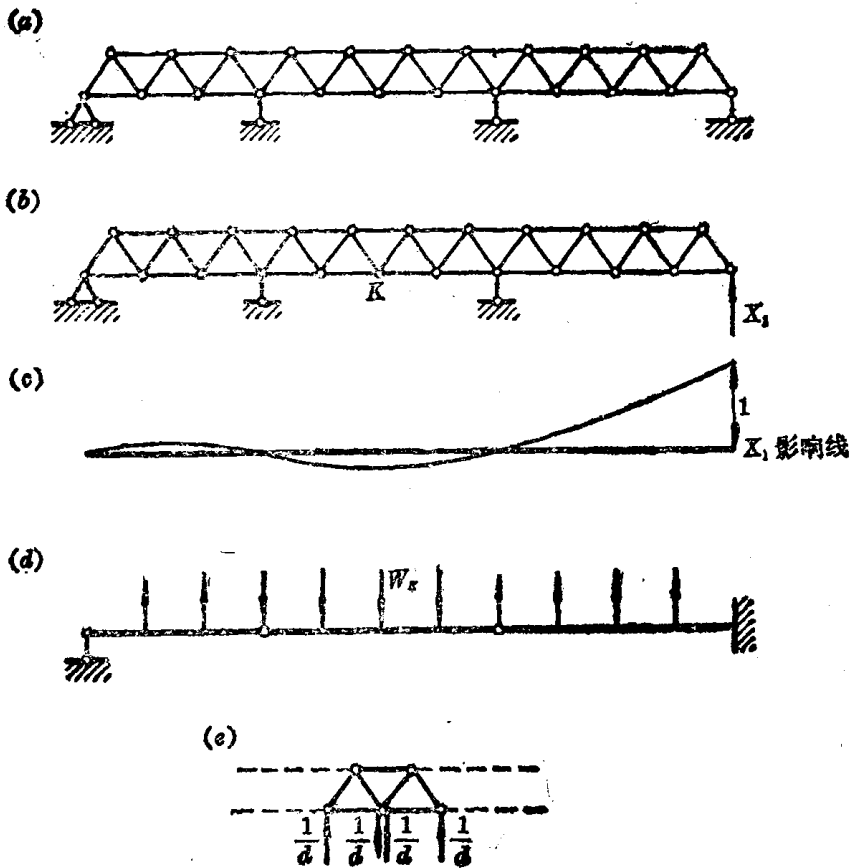
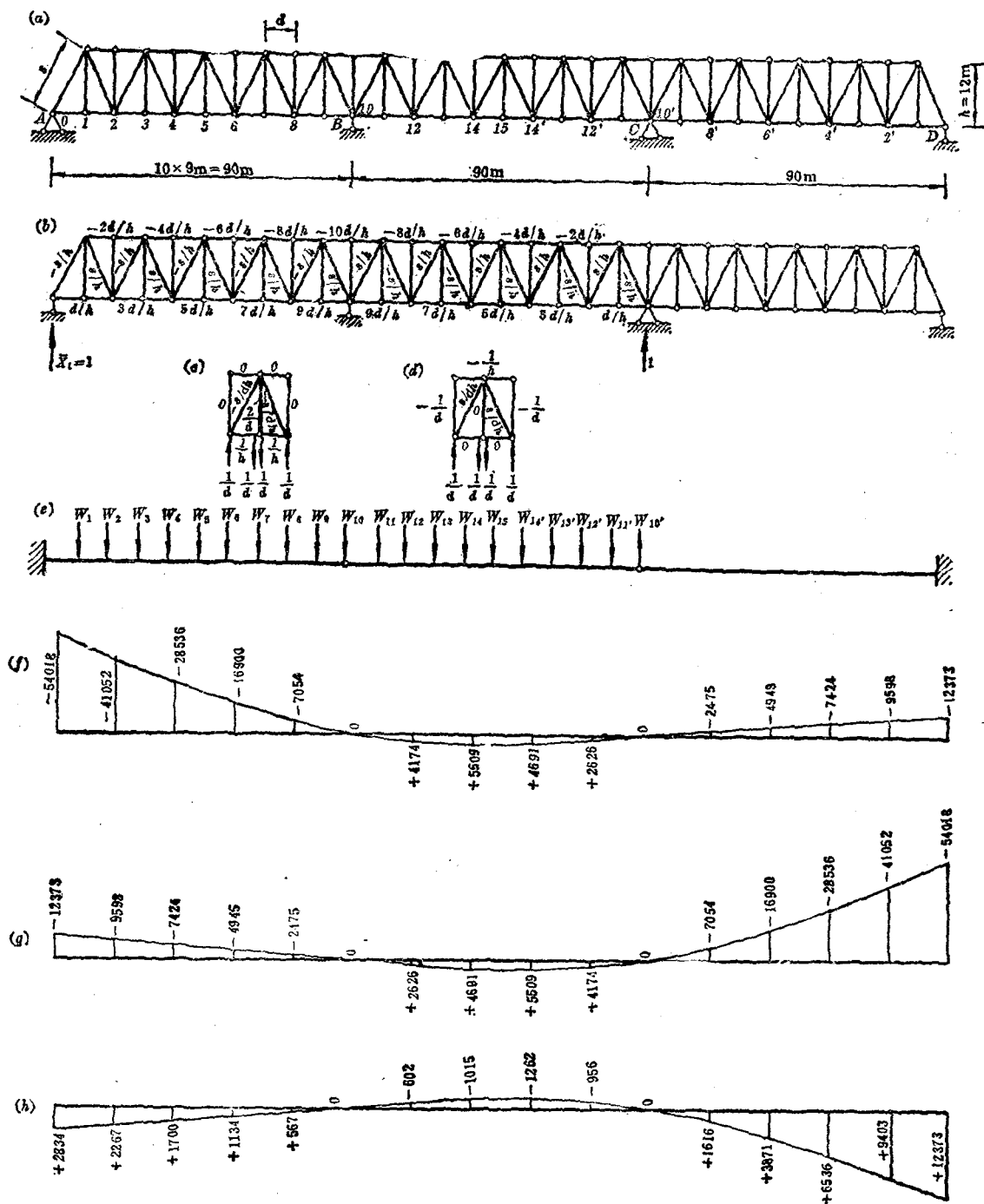


图 11-11

由上式可知,只需画出在 $X_1=1$ 作用下,该超静定基本结构的挠度图 δ_{P1} ,乘以常数 $-\frac{1}{\delta_{11}}$,即得所求的冗力 X_1 影响线。挠度图 δ_{P1} 可用机动法画出,其形状如图 11-11c 所示,其纵距仍可用弹性荷载法来绘制。其相应的虚梁如图 11-11d 所示。在计算弹性荷载 $W_k = \sum \frac{\bar{N} N_P l}{EA}$ 时,应注意 N_P 是由于 $X_1=1$ 在超静定基本结构上所引起的内力,而 $\bar{N}$ 是在基本结构中由于结点 K 左右二弦杆上作用着的一对单位力偶所引起的各杆内力。由于基本结构是 $n-1$ 次(在目前是 $n=2$)超静定桁架,所以应该用力法来解算 N_P 和 $\bar{N}$ 。考虑到当荷载弦呈水平时,弹性荷载 W_k 实际上相当于在 $X_1=1$ 作用下,基本结构上结点 K 处相联两弦杆的相对转角,因而根据求超静定结构位移的原则, $\bar{N}$ 可以是任一个相应的静定基本结构中各杆的内力,这样就可以大大简化计算工作。例如,求 W_k 时, $\bar{N}$ 将只有图 11-11e 所示的几根杆件受力。但在求 N_P 时,仍应解算一次超静定桁架。

下面以铁路桥梁中常用的三跨连续桁架(图 11-12)为例,试求端点的反力影响线。各杆截面面积如表 11-2 第 6 列所示,以 m^2 为单位^①。

因桁架是对称的,故撤去其左、右两端的反力联系,得两端悬出的对称静定桁架作为基本结构,然后进行如下计算。



① 本例数据摘自钱冬生编,《几种超静定桥的力素分析》,人民铁道出版社,1965年。

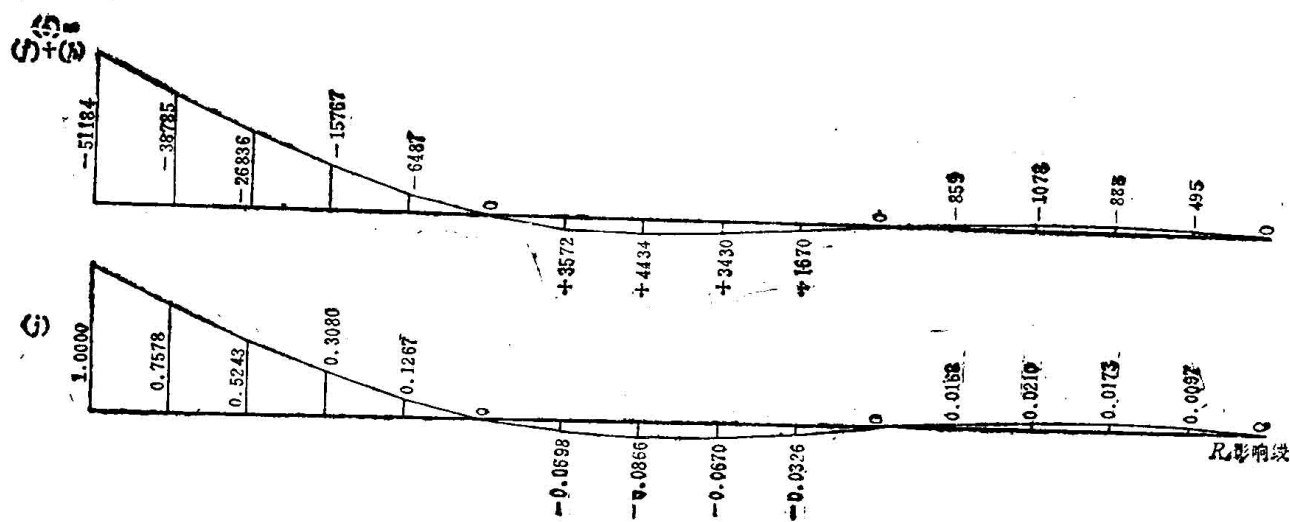


图 11-12

表 11-2 单数结点弹性荷载计算表

1	2	3	4	5	6	7	8	9
弹性荷载重	杆件	$\bar{N}$	N_P	l	A	$1/A$	$\lambda \frac{N_P \bar{N} l}{EA}$	λW 值
W_1	下 ₀ 上 ₁	$-s/dh$	$-s/h$	s	0.040	25.0	+115.75	+30.6
	上 ₁ 下 ₂	$-s/dh$	$+s/h$	s	0.025	40.0	-185.20	
	下 ₀ 下 ₂	$+1/h$	$+d/h$	$2d$	0.020	50.0	+100.00	
W_3	下 ₂ 上 ₃	$-s/dh$	$-s/h$	s	0.025	40.0	+185.20	+180.0
	上 ₃ 下 ₄	$-s/dh$	$+s/h$	s	0.025	40.0	-185.20	
	下 ₂ 下 ₄	$+1/h$	$+3d/h$	$2d$	0.033	30.0	+180.00	
W_5	下 ₄ 上 ₅	$-s/dh$	$-s/h$	s	0.025	40.0	+185.20	+300.0
	上 ₅ 下 ₆	$-s/dh$	$+s/h$	s	0.025	40.0	-185.20	
	下 ₄ 下 ₆	$+1/h$	$+5d/h$	$2d$	0.033	30.0	+300.00	
W_7	下 ₆ 上 ₇	$-s/dh$	$-s/h$	s	0.025	40.0	+185.20	+763.4
	上 ₇ 下 ₈	$-s/dh$	$+s/h$	s	0.040	25.0	-115.75	
	下 ₆ 下 ₈	$+1/h$	$+7d/h$	$2d$	0.020	50.0	+700.00	
W_9	下 ₈ 上 ₉	$-s/dh$	$-s/h$	s	0.040	25.0	+115.75	+743.2
	上 ₉ 下 ₁₀	$-s/dh$	$+s/h$	s	0.050	20.0	-92.60	
	下 ₈ 下 ₁₀	$+1/h$	$+9d/h$	$2d$	0.025	40.0	+720.00	
W_{11}	下 ₁₀ 上 ₁₁	$-s/dh$	$+s/h$	s	0.050	20.0	-92.60	+766.3
	上 ₁₁ 下 ₁₂	$-s/dh$	$-s/h$	s	0.033	30.0	+138.90	
	下 ₁₀ 下 ₁₂	$+1/h$	$+9d/h$	$2d$	0.025	40.0	+720.00	
W_{13}	下 ₁₂ 上 ₁₃	$-s/dh$	$+s/h$	s	0.033	30.0	-138.90	+792.6
	上 ₁₃ 下 ₁₄	$-s/dh$	$-s/h$	s	0.020	50.0	+231.50	
	下 ₁₂ 下 ₁₄	$+1/h$	$+7d/h$	$2d$	0.020	50.0	+700.00	
W_{15}	下 ₁₄ 上 ₁₅	$-s/dh$	$+s/h$	s	0.020	50.0	-231.50	+400.0
	上 ₁₅ 下 _{14'}	$-s/dh$	$-s/h$	s	0.020	50.0	+231.50	
	下 ₁₄ 下 _{14'}	$+1/h$	$+5d/h$	$2d$	0.025	40.0	-400.00	

续表

1	2	3	4	5	6	7	8	9
弹性载重	杆 件	$\bar{N}$	N_P	l	A	$1/A$	$\lambda \frac{N_P \bar{N} l}{EA}$	λW 值
$W_{10'}$	$\frac{F_{14'}}{F_{14'}}$	$-\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.020	50.0	-231.50	+207.4
	$\frac{F_{12'}}{F_{12'}}$	$-\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.033	30.0	+138.90	
	$\frac{F_{11'}}{F_{11'}}$	$+\frac{1}{h}$	$+\frac{3d}{h}$	$2d$	0.020	50.0	+300.00	
$W_{11'}$	$\frac{F_{12'}}{F_{12'}}$	$-\frac{s}{h}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.033	30.0	-138.90	+33.7
	$\frac{F_{11'}}{F_{11'}}$	$-\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.050	20.0	+92.60	
	$\frac{F_{10'}}{F_{10'}}$	$+\frac{1}{h}$	$+\frac{d}{h}$	$2d$	0.025	40.0	+80.00	

注 $\lambda = Eh^2/d^2$

表 11-3 双数结点弹性荷载计算表

1	2	3	4	5	6	7	8	9
弹性载重	杆 件	$\bar{N}$	N_P	l	A	$1/A$	$\lambda \frac{N_P \bar{N} l}{EA}$	λW 值
W_1	上 ₁ 下 ₂	$+\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.025	40.0	+185.20	+120.0
	下 ₂ 上 ₃	$+\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.025	40.0	-185.20	
	上 ₁ 上 ₃	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{2d}{h}$	$2d$	0.033	30.0	+120.00	
W_4	上 ₃ 下 ₄	$+\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.025	40.0	+185.20	+200.0
	下 ₄ 上 ₅	$+\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.025	40.0	-185.20	
	上 ₃ 上 ₅	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{4d}{h}$	$2d$	0.040	25.0	+200.00	
W_6	上 ₅ 下 ₆	$+\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.025	40.0	+185.20	+360.0
	下 ₆ 上 ₇	$+\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.025	40.0	-185.20	
	上 ₅ 上 ₇	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{6d}{h}$	$2d$	0.033	30.0	+360.00	
W_8	上 ₇ 下 ₈	$+\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.040	25.0	+115.75	+640.0
	下 ₈ 上 ₉	$+\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.040	25.0	-115.75	
	上 ₇ 上 ₉	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{8d}{h}$	$2d$	0.025	40.0	+640.00	
W_{10}	上 ₉ 下 ₁₀	$+\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.050	20.0	+92.60	+685.2
	下 ₁₀ 上 ₁₁	$+\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.050	20.0	+92.60	
	上 ₉ 上 ₁₁	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{10d}{h}$	$2d$	0.040	25.0	+500.00	
W_{12}	上 ₁₁ 下 ₁₂	$+\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.033	30.0	-138.90	+640
	下 ₁₂ 上 ₁₃	$+\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.033	30.0	+138.90	
	上 ₁₁ 上 ₁₃	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{8d}{h}$	$2d$	0.025	40.0	+640.00	
W_{14}	上 ₁₃ 下 ₁₄	$+\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.020	50.0	-231.50	+480.0
	下 ₁₄ 上 ₁₅	$+\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.020	50.0	+231.50	
	上 ₁₃ 上 ₁₅	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{6d}{h}$	$2d$	0.025	40.0	+480.00	
$W_{14'}$	上 ₁₅ 下 _{14'}	$+\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.020	50.0	-231.50	+320.0
	下 _{14'} 上 _{15'}	$+\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.020	50.0	+231.50	
	上 ₁₅ 下 _{15'}	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{4d}{h}$	$2d$	0.025	40.0	+320.00	
$W_{12'}$	上 _{15'} 下 _{12'}	$+\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.033	30.0	-138.90	+160.0
	下 _{12'} 上 _{11'}	$+\frac{s}{dh}$	$+\frac{s}{h}$	s	0.033	30.0	+138.90	
	上 _{15'} 上 _{11'}	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{2d}{h}$	$2d$	0.025	40.0	+160.00	
$W_{10'}$	上 _{11'} 下 _{10'}	$+\frac{s}{dh}$	$-\frac{s}{h}$	s	0.050	20.0	-92.60	-92.6
	下 _{10'} 上 _{9'}	$+\frac{s}{dh}$	0	s	0.050	20.0	0	
	上 _{11'} 上 _{9'}	$-\frac{1}{h}$	0	$2d$	0.040	25.0	0	

注: $\lambda = Eh^2/d^2$