普通高等专科教育机电类规划教材

运筹学

江南大学　张哉玄　主编

机械工业出版社

普通高等专科教育机电类规划教材

运　筹　学

主编　张哉玄
参编　姚祖桦　王盘根
主审　陶　田

机 械 工 业 出 版 社

前　言

本书是根据全国高等专科学校管理工程类专业运筹学课程组1991年会议拟订的教学大纲和基本要求，并在编者多年使用的自编教材的基础上整理编写而成的。本书编写的内容仅涉及运筹学的部分分支，包括线性规划，整数规划，动态规划，图、网络的基本知识及其应用，网络计划技术等共八章。其中第一、二、三、四章由王盘根编写，第五、六章由姚祖桦编写，绪论、第七、八章由张哉玄编写。全书由张哉玄统稿并担任主编，由陶田主审。

考虑到高等专科学校的教学特点，本书注意突出内容的实践性和应用性，着重运筹学原理和方法的应用，力求文字通俗易懂，便于自学。有些内容附有计算框图，便于计算机的应用。每章后附有一定数量的习题。

本书除可作为管理工程类专业大专教材外，也可供函授班、干部培训班等成人教育使用参考。

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

目　录

绪　论

一、运筹学的发展历史

当代的运筹学作为一门定量优化决策科学，追本溯源，已经经历了半个多世纪的发展历程。

早在1938年，英国试制成功了雷达、新式作战飞机等武器。为了检验新式武器的性能和在大型作战演习中的效果，英国成立了一个分析研究小组来研究如何评价演习的结果以及如何制定武器的使用方案，使之最有效地利用有限的军事资源。这时，“运筹学”(Operations Research，缩写OR，意即作战研究)这一术语就被提出。第二次世界大战期间，英国、美国、加拿大等国各主要兵种便相继成立了由各种学科科学家组成的“运筹学”小组，对战争中所涉及到的各种具体的战略战术问题进行了科学、广泛的研究，诸如雷达的布置、高射炮火的控制、水雷的埋设、护航舰队的规模以及对敌方潜艇的侦察等。

战后，在军事运筹小组中作出贡献的科学家中间，有一部分先驱者(首先是英国的)转而注意在民用问题方面应用类似方法的可能性。其中，有的重返大学，专心致志为在战争期间草率发展的技术提供坚实的理论基础；有的再接再厉发展新技术；另有好多转到各经济部门，把前人发展的各种方法应用到各行各业的独特问题上去。他们的工作不仅为合理使用资源，提高生产效率，加快战后经济的恢复和发展作出了很大的贡献，而且促使运筹学在理论方面逐步形成为一门新兴的边缘学科，并迅速得到普及和发展。

虽然英国是运筹学这门新学科的创立者，但是美国在这方面所取得的发展是最快的。第一个被公认的数学方法——线性规划的单纯形法，就是由美国数学家丹茨基(G. B. Dantzig)在1947年提出的，这个方法从根本上解决了线性规划的求解问题。自此以后，经过高等院校和工商界的努力和合作，许多新的方法和应用都得到了很快的发展。到50年代初，民用运筹学活动的发展水平有力地促进了运筹学作为一门独立学科的形成。美国于1952年创立了运筹学会(ORSA)，为运筹学界科学家的专业需要服务，并出版发行了《运筹学》刊物。到60年代初，美国部分大专院校首先开设部分的、然后是一整套的运筹学课程，许多著名大学还设了理科硕士和哲学博士的研究课程。到了70年代中期，运筹学有了较成熟的发展，它的各个分支如最优化方法、图论和网络、排队论、可靠性理论和马尔柯夫决策过程等都有新的发展。

运筹学是在不断实践中获得迅速发展的。运筹学理论的不断发展又逐渐地扩大了它的应用范围，并获得十分明显的效果。现在，它在军事、工业、农业、经济、交通运输和管理方面都得到了广泛的应用和推广，甚至在对财政机关、城市规划、旅游观光、教育模式等方面的问题的研究中，也得到了愈来愈多的应用。

运筹学发展之所以如此之快，电子计算机的平行发展是一个很重要的因素。而电子计算机在计算的速度和信息的储存与检索方面的巨大能力，使得运筹学中许多十分棘手的甚至无法想象的计算问题可以顺利获得最优的或满意的求解结果。因此，如果没有电子计算机的快速发展，具有大型计算问题的运筹学就不可能得到目前所许可的各种计算状态，运筹学方法的应用也将受到很大的限制。

我国是从 50 年代中期开始有目的、较大量地研究运筹学的，并把它应用于制定国家经济计划的工作中。60 年代初，著名数学家华罗庚教授系统研究了“统筹方法”，并在大庆油田、黑龙江林业战线、山西大同市口泉车站、太原铁路局、太原钢铁公司以及一些省市的农业生产中推广应用，取得了良好效果。1963 年，在我国国防科技研究工作中采用了计划评审技术。到了 70 年代，运筹学在企业管理方面又得到了更多更成熟的应用，从而开始使我国广大企业界领导和管理人员自觉地应用运筹学方法来解决手头的各种工程技术问题和各类管理方面的问题。与此同时，首先在一些重点高等院校，然后在其他一些大专院校的经济管理、信息工程等专业中相继开设了运筹学课程，从而更有力地促进了运筹学理论的发展和运筹学方法的推广和应用。

二、运筹学的性质

运筹学作为一门定量优化决策科学，它利用了现代数学、计算机科学以及其他科学的最新成果，来研究人类在从事的各种活动中处理事务的数量化规律，使得有限的人、财、物、时、空、信(息)等资源得到充分和合理的利用，以期获得尽可能满意的经济和社会效果。运筹学就其理论和应用意义来说，具有以下的主要性质和特征：

(1)运筹学是一门内容广泛、实践性强的应用数学，是寻求各种问题最优方案的学科，所以是一门优化学科。

(2)运筹学研究问题的特点是从系统的观点出发，研究全局性的规划问题、综合优化的规律，它是一门新兴学科——系统工程学的主要基础理论。

(3)应用运筹学不仅可解决具体的工程技术范畴的优化问题，更为主要的是它可为行政管理人员在决策时提供科学的依据，因此，它是实现管理现代化的有力工具，它的理论和实践是现代管理科学的重要组成部分。

三、运筹学的内容

运筹学的内容是相当广泛丰富的，它的主要分支有：

(一)规划论

研究在满足确定的条件下，按某一或某些衡量指标来寻求最优化方案的问题。规划论包括线性规划、非线性规划、动态规划和整数规划等。其中的线性规划发展最早，应用最广，取得了相当显著的效果。规划论是提供决策依据的良好工具。

(二)图论与网络分析

它从构成“图”的基本要素出发，研究无向图或有向图在结构上的基本特征，并对由“图论”要素组成的网络进行优化计算，以确定其最短路、最大流等。它在工程问题和管理问题中得到了广泛的实际应用。

(三)网络计划法

它又称计划评审技术(PERT)，是一种新的计划管理的科学方法。它以数理统计为基础，运用网络分析的方法，将构成计划目标的所有任务，按其相互之间的逻辑关系与时间参数组成统一的网络形式，通过计算确定其进度和关键路线以及工期实现的概率，并通过网络进行资源和费用的优化。这种方法一经提出，就使美国 1958 年北极星导弹的研制提前两年完成，于是世界其他各国也相继采用。

(四)排队论

它有时称为等待线问题，或称随机服务系统理论。它是一种用来研究公用服务系统工作过

程的数学理论和方法。在这个系统中，服务对象何时到达及其占用系统时间的长短，都是随机的，是一种随机聚散现象，它通过对每个个别随机服务现象的统计研究，找出反映这些随机现象平均特性的规律，从而提高服务系统的工作能力和工作效率。随着计算机技术的飞速发展，排队论的应用也愈益广泛。

（五）对策论

它又称博奕论，是一种研究对抗性竞争局势，寻求最优的对抗策略的问题。对策论的思路对解决实际问题很有用途，过去在军事上应用较多。在科技、经济发展迅速，市场竞争日趋剧烈的现代，其应用将更为广泛。

（六）决策论

它是根据系统的状态信息、可能选取的若干策略以及采取这些策略所产生的后果来进行综合研究，以便按照某种衡量准则选取一组最优策略的系统分析方法。决策论是运筹学最新发展的一个分支，它在近代广泛应用于系统工程和管理科学之中。

（七）库存论

在经济管理工作中，为了维持系统的有效运转，往往需要对各种物资保持必要的储备。库存论就是研究在什么时间、以多少数量、从什么供应来源来补充这些储备，并使维持库存和采购补充物资的总费用最少。这类问题的研究和应用，国外发展得较早，应用较多。我国近年来也得到不断的发展和应用。

此外，运筹学还包括可靠性理论，搜索论，仿真技术等分支。

第一章　线性规划的概念及基本解法

第一节　引　　例

某厂生产甲、乙两种产品，需消耗的主要资源有焦炭、某种矿石及冶炼设备的加工台时，其资源定额分配、单位产品利润及资源限额的情况，见表 1-1 所示。试问如何安排甲、乙两种产品的生产计划，才能获利润最大？

这是一种比较典型的线性规划问题，这类问题在企业经营生产决策中会经常碰到。随着经营机制的转换和社会主义市场经济的不断发展，企业生产的自主权越来越大，也就越需要这方面的决策，以实现有效利用人、财、物诸要素，争取取得最理想的经济效益。

表　1-1

主要资源＼每吨产品消耗＼产品	甲	乙	计划期可供资源限额
焦炭 b_1(t)	18	8	700
某矿石 b_2(t)	8	10	400
冶炼设备 b_3(台时)	60	200	6000
每吨产品的利润(百元)	7	12	—

根据表 1-1 中资源定额分配表，用数学形式表示出它们之间的关系，即建立模型。

若以 x_1 和 x_2 代表甲、乙两种产品的产量，则引例可用以下数学术语表示：

使 $7x_1+12x_2$ 最大，并满足条件

$$18x_1+8x_2\leqslant 700$$
$$8x_1+10x_2\leqslant 400$$
$$60x_1+200x_2\leqslant 6000$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

这就是一个标准的线性规划问题的数学表示式，通常称为原实际问题的线性规划模型。

为简单起见，一般可把以上模型写成

$$\max \quad Z_0=7x_1+12x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}18x_1+8x_2\leqslant 700\\8x_1+10x_2\leqslant 400\\60x_1+200x_2\leqslant 6000\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

第二节　线性规划的三种形式

线性规划问题在数学表达形式上，可归纳为三种形式。但不管是哪种形式，它们都具有如下特征：

(1)每个问题都用一组未知数($x_1,x_2\cdots,x_n$)表示某一种活动方案，这组未知数的一组特定值就代表了一个具体方案。通常要求这些未知数的取值为非负的。

(2)存在一系列限制条件，并可用一组线性等式或不等式表示，称为约束条件。

(3)都有一个追求的目标，且可表示为一组未知数的线性函数，称为目标函数。根据所研究问题的性质，要求目标函数实现最大化或最小化。

一、线性规划的一般形式

线性规划的一般形式，可表示为

$$\max(\text{或}\min)\quad Z_0=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & \leqslant(=\text{或}\geqslant)b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & \leqslant(=\text{或}\geqslant)b_2\\ \vdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & \leqslant(=\text{或}\geqslant)b_m\\ x_j\geqslant 0\qquad (j=1,2,\cdots,n) & \end{cases}$$

它的求和形式为

$$\max(\text{或}\min)\quad Z_0=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\Sigma a_{ij}x_j\quad \leqslant(=\text{或}\geqslant)b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

x_j 称为决策变量。对符号无正负限制的变量，可以等价地转化为非负的变量。具体地说，符号无约束的变量等价于两个非负变量之差。如 x 是符号无约束的变量，它可以用($x'-x''$)来代替，这里 $x',x''\geqslant 0$。

模型中 b_i 表示第 i 种资源现有的限额，即可利用数；对 a_{ij}的解释是第 j 种活动(如生产)过程中对第 i 种资源的消耗额；c_j 则表示活动 j 的每个单位“价值”，如单位利润或单位成本。

二、线性规划的典则形式

典则形式的特点是：

(1)所有决策变量都是非负的。

(2)所有约束条件都是“$\leqslant$”型。

(3)目标函数是求最大。

以下是用求和形式表示的典则形式

$$\max\quad Z_0=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

线性规划的典则形式在以后对偶理论中将显得十分有用。

事实上，任何一种形式的线性规划，都可通过如下变换化成典则形式：

(1)
$$\min\quad Z_0=\Sigma c_jx_j$$

等价于

$$\max\quad Z_0'=-\Sigma c_jx_j$$

其中，$Z_0'=-Z_0$。

(2)“$\geqslant$”的不等式，通过不等式两边同乘以-1而变成反向不等式“$\leqslant$”。

(3)对于等式，可由两个反向的不等式组成，如

$$a_1x_1+a_2x_2=b$$

等价于两个联立的约束条件

$$a_1x_1+a_2x_2\leqslant b$$
$$-a_1x_1-a_2x_2\leqslant -b$$

(4)不等式左边是绝对值，可以由两个不等式表示，如

$$|a_1x_1+a_2x_2|\leqslant b$$

等价于

$$a_1x_1+a_2x_2\leqslant b$$
$$a_1x_1+a_2x_2\geqslant -b$$

(5)符号无约束的变量，等价于两个非负变量之差。

例 1-1 有如下线性规划

$$\min \quad Z_0=5x_1+4x_2-2x_3$$

$$\text{s.t}\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3\leqslant 10\\ x_1-2x_2+5x_3\geqslant 15\\ |x_1+x_2|\leqslant 5\\ 2x_2+7x_3=12\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\text{ 符号无约束}\end{cases}$$

试把它化成典则形式。

解：根据上述变换方法，可以写出原问题的典则形式

$$\max \quad Z_0'=(-Z_0)=-5x_1-4x_2+2x_3$$

$$\text{s.t}\begin{cases}2x_1-x_2+3(x_3'-x_3'')\leqslant 10\\ -x_1+2x_2-5(x_3'-x_3'')\leqslant -15\\ x_1+x_2\leqslant 5\\ -x_1-x_2\leqslant 5\\ 2x_2+7(x_3'-x_3'')\leqslant 12\\ -2x_2-7(x_3'-x_3'')\leqslant -12\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3'\geqslant 0,x_3''\geqslant 0\end{cases}$$

三、线性规划的标准形式

在典则形式的约束条件中，均是不等式，为了便于求解线性规划，必须设法把不等式变换成等式，为此，必须引进一个新的变量，叫“松弛变量”。

我们在每一个约束条件的左边增添一个非负的变量，便可使不等式变成等式，这些变量就称为松弛变量。如引例的约束条件左端，增添s_1、s_2和s_3三个非负的变量，则可变成如下标准形式

$$\max \quad Z_0=7x_1+12x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}18x_1+8x_2+s_1=700\\8x_1+10x_2+s_2=400\\60x_1+200x_2+s_3=6000\\x_1,x_2,s_1,s_2,s_3\ \text{均不小于零}\end{cases}$$

一般情况下，以求和形式表示的典则形式，可变换成求和形式的标准形式如下

$$\max\quad Z_0=\Sigma c_jx_j$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\Sigma a_{ij}x_j\leqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

$$\max\quad Z_0=\Sigma c_jx_j$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\Sigma a_{ij}x_j+s_i=b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\x_j\geqslant 0,s_i\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

第三节　线性规划的图解法

对于两个变量的线性规划问题，可以采用图解法；另外，通过图解法的求解过程，可以比较直观地得到一些重要结论。现以引例为例

$$\max\quad Z_0=7x_1+12x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}18x_1+8x_2\leqslant 700 & (1)\\8x_1+10x_2\leqslant 400 & (2)\\60x_1+200x_2\leqslant 6000 & (3)\\x_1,x_2\geqslant 0 & (4)\end{cases}$$

解：由条件(4)可知 x_1、x_2 均在第一象限，约束条件(1)～(3)中每个不等式，首先用"＝"代替"≤"，画出直线①、②、③，连同横坐标 x_1 与纵坐标 x_2，它们共同围成一个凸多边形 $OABCD$，如图 1-1 所示。当我们重新考虑到要同时满足(1)～(4)不等式时，与之对应的则应是包括凸多边形 $OABCD$ 周界及其围成的整个区域，称此为可行区域，简称**可行域**。显然，在可行域 $OABCD$ 的内部或周界上每一个点，都是满足所有的约束条件的。可行域为确定问题的最优解给出了范围。我们把与可行域对应的解叫**可行解**，可行解的全体，称为**可行解集**。

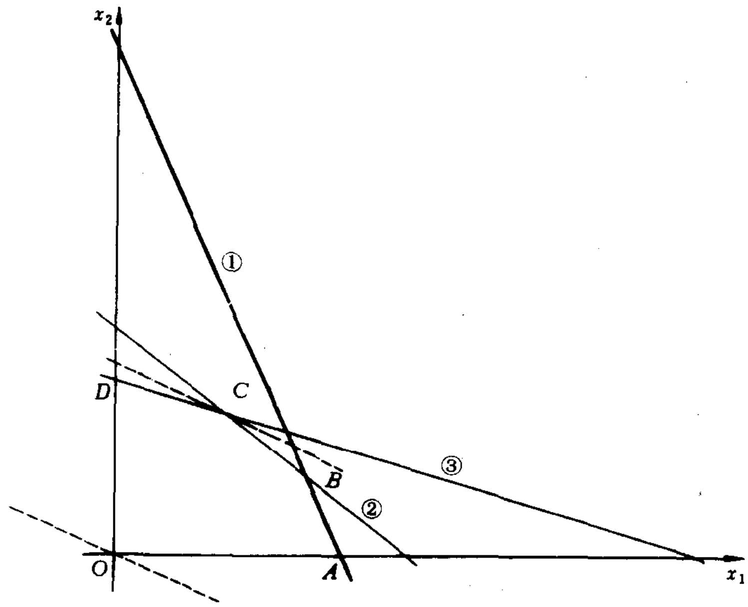

图　1-1

接下来的任务是，要在所给问题的可行域上寻找一点，使目标函数

$$Z_0=7x_1+12x_2$$

取得最大值。显然，对于不同的 Z_0 值，可以画出不同的直线，但不管 Z_0 值取多少，这些直线组成一组互相平行的直线簇：Z_0 取值越大，则直线离原点越远；另外，同一条直线上的点，都具有

相同的目标函数值，因此称为“等值线”（在图 1-1 中用虚线表示）。一般可以先令 $Z_0=0$，画出所谓“零值线”，然后，以它为基准，向右上方平移。离零值线越远的等值线（在引例中，可称为不变利润线），可以得到越大的目标函数值（利润总额）；但由于约束条件的限制，它又不能离开可行域。可以发现，在满足约束条件的所有可行解中，能取得最大值的解必然是在可行域的某一个顶点上获得。我们把可行域的顶点称为**可行角点**（简称角点或极值点）。引例是在 C 点可获得目标函数最大值，与此对应的解就是问题的**最优解**

$$x_1=20 \quad x_2=24$$

对应目标函数最大值为

$$Z_0=7x_1+12x_2=7\times20+12\times24=428$$

即当甲产品生产 20t，乙产品生产 24t 时，企业可获利最大，为 428 百元。

可以证明，Z_0 的最大值总能在可行域的角点中某一点取得。选择一个特定的角点作为最优解，决定于目标函数的斜率。

若问题是求目标函数的最小值，则将目标函数在第一象限的等值线朝原点方向平行移动，直到移动至既和可行域有交点，又距离原点最近的地方。与求最大值一样，它的最优解也是在一个特定的角点取得。

但对于线性规划问题，其解的情况不一定都如引例那样是唯一的，还可能出现其他多种情况：

（一）无限多个最优解

例 1-2 求解线性规划

$$\max \quad Z_0=4x_1+14x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}2x_1+7x_2\leqslant21\\7x_1+2x_2\leqslant21\\x_1,x_2\geqslant0\end{cases}$$

解：由图 1-2 可见，目标函数等值线与第一个约束条件 $2x_1+7x_2\leqslant21$ 对应的直线平行，因此，角点 B、C 以及它们的连线上任一点，都可使目标函数值 Z_0 取到相同的最大值。因此，该线性规划问题有无限多个最优解。

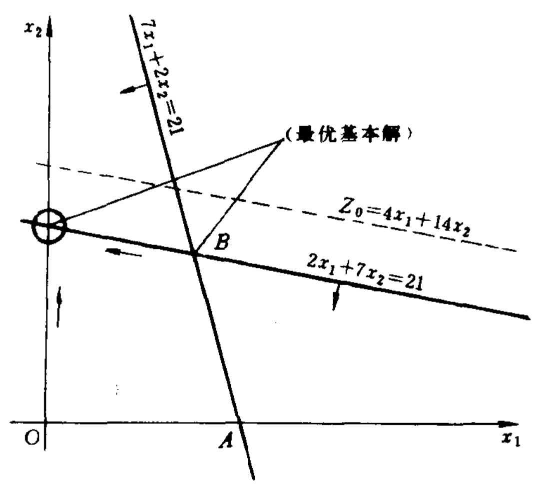

图 1-2

（二）无界解

例 1-3 求解线性规划

$$\max \quad Z_0=4x_1+3x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}-3x_1+2x_2\leqslant6\\-x_1+3x_2\leqslant18\\x_1,x_2\geqslant0\end{cases}$$

解：从图 1-3 可以看出，可行域不组成凸多边形，而是呈开口状，即可行域无界，因此，目标函数值 Z_0 的等值线（在图 1-3 中用虚线表示）无限远离原点时，都与可行域相交，所以说目标函数无上界，$Z_0\to\infty$。

(三)无解

例 1-4 求解线性规划

$$\max \quad Z_0 = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解:从图 1-4 可见,这问题不存在可行域,当然也就没有最优解。

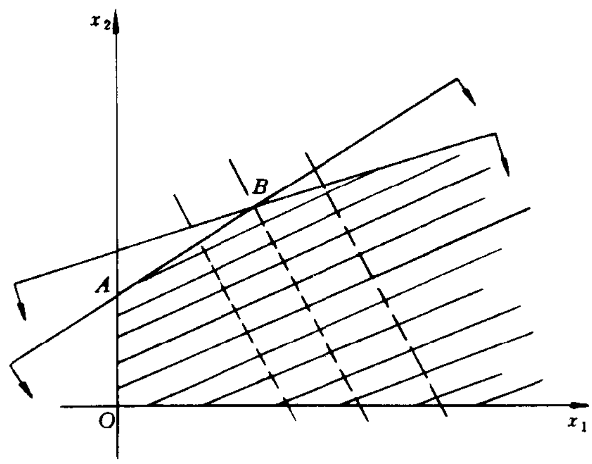

图 1-3

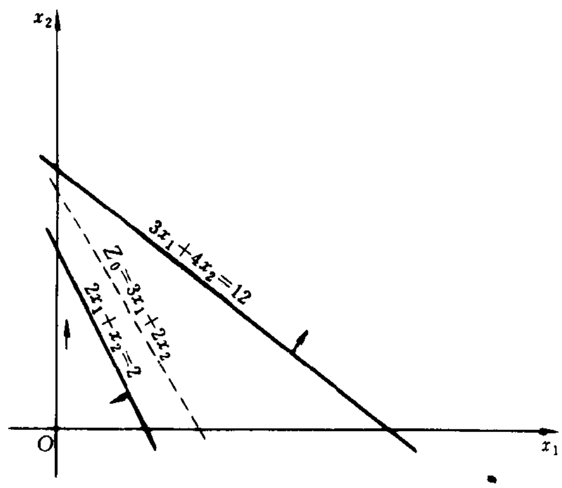

图 1-4

由上述用图解法描述的线性规划的可行域和最优解的几种情况，可以直观地得到线性规划问题的几个特性：

1. 线性规划问题的可行域都是凸集

所谓“凸”，在几何图形上是指整个形状没有向内凹陷的部分。或者可以这样来定义图形凸的概念：如果图形中连接任意两点的直线上的全部点都在图形区域内时，则称此图形是凸的。

从两个变量的线性规划图解法可以看到，不管可行域是有界还是无界，其中任意两点的连线都包含在原可行域内，所以线性规划的可行域都是凸的。

凸图形中的全部点组成的集合称为凸集，所以说线性规划问题的可行域都是凸集。

2. 线性规划问题可能不存在最优解，或者说是无解

由图解例看出，这种无解有两种情况，一是问题不存在可行解，即可行域是空集，如例 1-4 即为此情况；二是目标函数无有限极值，也称问题无解，如例 1-3 所示。

3. 若线性规划问题存在最优解，则至少有一个最优解可在可行域的角点上得到

若最优解是唯一的，则此最优解必在可行域的一个角点上得到，如引例所示；若最优解不是唯一的，则不管可行域有界还是无界，最优解集合有界还是无界，此结论都是正确的。其中可行域有界、最优解集合有界的情况如例 1-2 所示。

第四节　线性规划的基本解和基本可行解

为便于理解，先举例说明。

例 1-5　求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4-x_5=1 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4+3x_5=3 \\ x_1+2x_2-x_3-x_4+5x_5=4 \end{cases}$$

现在表格上运用线性代数中行变换的方法对方程组求解如下：

表 1-2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	行变换
表一（初始表）	1	1	1	1	−1	1	I_0
	1	−1	1	−3	3	3	II_0
	1	2	−1	−1	5	4	III_0
表二	1	1	1	1	−1	1	$\mathrm{I}_1=\mathrm{I}_0$
	0	−2	0	−4	4	2	$\mathrm{II}_1=-\mathrm{I}_0+\mathrm{II}_0$
	0	1	−2	−2	6	3	$\mathrm{III}_1=-\mathrm{I}_0+\mathrm{III}_0$
表三	1	0	1	−1	1	2	$\mathrm{I}_2=-\mathrm{II}_2+\mathrm{I}_1$
	0	1	0	2	−2	−1	$\mathrm{II}_2=-\mathrm{II}_1/2$
	0	0	−2	−4	8	4	$\mathrm{III}_2=-\mathrm{II}_2+\mathrm{III}_1$
表四（最终表）	1	0	0	−3	5	4	$\mathrm{I}_3=-\mathrm{III}_3+\mathrm{I}_2$
	0	1	0	2	−2	−1	$\mathrm{II}_3=\mathrm{II}_2$
	0	0	1	2	−4	−2	$\mathrm{III}_3=-\mathrm{III}_2/2$

上述表四为最终表，其对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad -3x_4+5x_5=4 \\ \quad x_2 \qquad +2x_4-2x_5=-1 \\ \qquad\quad x_3+2x_4-4x_5=-2 \end{cases}$$

此方程组与原方程组是等价的，它还可以表示为

$$\begin{cases} x_1=\quad 3x_4-5x_5+4 \\ x_2=-2x_4+2x_5-1 \\ x_3=-2x_4+4x_5-2 \end{cases}$$

于是取 x_4、x_5 为任一组值，即可求得 x_1、x_2、x_3 的值，便得到原方程组的一组解。若令 $x_4=x_5=0$，则 $x_1=4$，$x_2=-1$，$x_3=-2$，即得原方程组的一组解为

$$(4 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \quad 0)$$

考察最终表对应的方程组，它具有如下特点：

每个方程都有一个相异的仅在该方程中出现、且系数为 1 的变量，这种变量称为基本变量（或称**基础变量**、**基变量**），基变量个数一般等于方程个数。其余的变量称为**非基变量**。本例中 x_1、x_2、x_3 为原方程组的基变量，x_4、x_5 为非基变量。

显然，相应的最终表中“0—1”列对应的变量为基变量，其他列对应的变量为非基变量。由

基变量对应的各"0—1"列构成一个单位矩阵 $\boldsymbol{I}$。

特别地,若令非基变量为 0,则基变量等于最终表中的各方程的常数项。这样所得到的一组解称为原方程组的**基本解**(或称**基础解**);当变量的值都非负时(满足线性规划非负条件),这个基本解又称为**基本可行解**。在本例中 $\boldsymbol{X}=(x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5)^T=(4\ \ -1\ \ -2\ \ 0\ \ 0)^T$ 是原方程组的一个基本解,而不是基本可行解。

表 1-3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	5/2	0	2	0	3/2
0	−1/2	0	−1	1	1/2
0	−2	1	−2	0	0

如果在本例中选择 x_1,x_5,x_3 为基本变量,经过行变换可得(表 1-3):

其对应方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad +\dfrac{5}{2}x_2+2x_4=\dfrac{3}{2} \\ \quad x_5 \quad -\dfrac{1}{2}x_2-x_4=\dfrac{1}{2} \\ \quad\quad x_3-2x_2-2x_4=0 \end{cases}$$

其对应的基本解为

$$\boldsymbol{X}=(x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4\quad x_5)^T=\left(\frac{3}{2}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{1}{2}\right)^T$$

因为满足非负条件,故它也是原方程的一个基本可行解。

基本解具有如下性质:

(1)对于线性方程组的同一组基本变量,其基本解各分量的值是唯一确定的。

(2)对于具有 m 个方程 n 个变量的线性方程组,如果其系数矩阵的秩为 $r(\leqslant m)$,则其基本解的个数是有限的,至多有 $C_n^r=\dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$ 个基本解。

(3)每个基本解的非零分量个数不多于 r 个(若小于 r 时,称此基本解是退化的)。

第五节　单纯形法

在用图解法解两个变量的线性规划问题时,我们得出,如果线性规划存在最优解,则一定可以在其可行域的角点上找到,因此我们只要沿着这些角点去找就行了。这个方法可以推广到多个变量的线性规划问题。我们知道由 n 个变量所组成的不等式组的可行域在 n 维空间内是一个凸多面体。有定理证明:线性规划问题的目标函数一定可在其可行域的顶点(角点)上达到最大值。因此,我们也只需要沿着这些角点去找就行了。单纯形法的特点,则是从可行域中一个角点开始,通过一定的搜索方法,转换到另一个角点,使得相应的目标函数值逐步增大,当目标函数值达到最大时,问题就得到了最优解。

线性规划问题对应于可行域的每一个角点的解,即为基本可行解。基本可行解的转换过程称为迭代过程。为了使线性规划问题的标准形式变换成表格形式,并在表格上进行求解,首先把目标函数改写成

$$Z_0-\Sigma c_j x_j+0\Sigma s_i=0$$

如引例的目标函数改写为

$$Z_0-7x_1-12x_2+0s_1+0s_2+0s_3=0$$

再结合约束条件，把模型中的字母与系数分解开来，可以得到与引例对应的表 1-4，称为单纯形初始表。

表 1-4

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	18	8	1	0	0	700
s_2	8	10	0	1	0	400
s_3	60	200	0	0	1	6000
Z_0	−7	−12	0	0	0	0

值得注意的是，在这个初始表里，已明显给出了一个初始解，而且是一个基本可行解：$s_1=700$，$s_2=400$，$s_3=6000$，而非基变量为 $x_1=x_2=0$。在下面逐次迭代得到的表中，也只表示出相应的基变量，列在表的第一列，而非基变量并不在迭代表中明显给出。

从几何的角度分析，以上由单纯形初始表表 1-4 得到的基本可行解，与图 1-1 中的 O 点对应。

列出了初始表，这已完成了单纯形法求解的第一步。紧接着是要在初始表的基础上，以初始解（一个基本可行解）为出发点，逐步移动，寻找一个能够改进目标函数值的新的基本可行解。

为了寻找一个新的基本可行解，就必须调整目前基变量和非基变量的构成。具体说，必须挑选一个目前的非基变量转换成为基变量；而在目前的基变量中也挑选一个，使它变成新的非基变量。这是因为，每一组基本可行解有固定数目的基变量和非基变量。

将转变成基变量的非基变量称为调入变量 x_K，它可由最优性条件确定。

将转变成非基变量的基变量，称为调出变量 x_L，它可由可行性条件确定。

最优性条件

在只按非基变量表示的 Z_0 方程中（在表中最后一行表出），选择一个有最负（最正）系数的非基变量，作为最大化（最小化）问题中的调入变量。如有几个这样的非基变量，则任选其一。当 Z_0 方程的系数全部为非负（非正）时，得到最优解。

可行性条件

把对应于目前基变量的值与调入变量中正的约束系数相比，选取比值最小的那一个基变量作为调出变量。如有几个相同，可任选其一。其目的是为了保证解的可行性，即在表的最后一列均为非负的。

用最优性条件和可行性条件进行基变量的调整。对于引例的初始表（表 1-4）中 Z_0 方程各系数，x_2 的系数为最负（−12），因此，选择 x_2 作为调入变量。又因为初始表基变量的值分别为 $b_1=700$，$b_2=400$，$b_3=6000$，而调入变量 x_K 已确定为 x_2，它在各约束方程中正的约束系数分别为 $a_{12}=8$，$a_{22}=10$，$a_{32}=200$。再求比值 $\frac{b_i}{a_{i2}}$，分别为 $\frac{b_1}{a_{12}}=87.5$，$\frac{b_2}{a_{22}}=40$，$\frac{b_3}{a_{32}}=30$，所以有：

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i2}}\bigg|_{a_{i2}>0}\right\}=\frac{b_3}{a_{32}}=30$$，由此可知，调出变量 x_L 是 s_3。

确定了调入变量 x_K 和调出变量 x_L 之后，下一步便是修改迭代表。修改后的迭代表，应能从表中解列直接得出新的 Z_0 值以及新的基变量的值。就引例而言，对初始表修改后得到的表中，基变量分别是 s_1、s_2 和 x_2（见表 1-5）。

显然，由表 1-4 转换成表 1-5，是采用行变换的方法：

(1)先确定表 1-4 的主元，一般可用□标出。所谓主元，指与最小比值相对应的调入变量的

系数，也可理解为是调入变量与调出变量所在列、行交叉处的元素。目前表 1-4 中的主元是 200。

(2)确定主方程。与调出变量相对应的方程称为主方程，目前表 1-4 中是 s_3 方程。

(3)在表 1-5 中，写出新的主方程。将表 1-4 中的主方程被主元除，并以调入变量 x_2 代替 s_3，作为新的基变量。

表 1-5

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	78/5	0	1	0	−1/25	460
s_2	5	0	0	1	−1/20	100
x_2	3/10	1	0	0	1/200	30
Z_0	−17/5	0	0	0	3/50	360

(4)在表 1-5 中，消去除主方程外其他各方程中调入变量 x_2 的系数。具体方法是新的主方程乘一适当的非零数，加到表 1-4 各对应方程上去即可实现，并写出表 1-5 中各方程。

由表 1-4 对应的基本可行解，转换成表 1-5 所对应的基本可行解，相应于图 1-1 中从角点 O 移动到角点 D。

根据最优性条件，对表 1-5 进行最优性检验。由于目标函数中非基变量 x_1 的系数仍然是负的，因此，还需要继续迭代，并确定 x_1 为调入变量；根据可行性条件，s_2 为调出变量。重复上述的迭代步骤，可以得到新的迭代表(见表 1-6)。

表 1-6

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	0	1	−78/25	29/250	148
x_1	1	0	0	1/5	−1/100	20
x_2	0	1	0	−3/50	1/125	24
Z_0	0	0	0	17/25	13/500	428

由表 1-5 转换为表 1-6，实现了图 1-1 中由 D 点移动到 C 点的目的。

对表 1-6 进行最优性检验，发现它已完全符合最优性条件。我们把表 1-6 就称为最优表。由此，可得最优解：$s_1=148$，$x_1=20$，$x_2=24$，$Z_0=428$。具体说，当甲产品生产 20t，乙产品生产 24t 时，企业可获最大利润为 42800 元；这时，第一种资源(焦炭)还剩 148 吨，另外两种资源(矿石和冶炼设备加工台时)则已全部耗用掉。

第六节　单纯形表的矩阵表示

在第二节中，我们曾用求和的形式表示过线性规划的三种形式，为了在后面对问题的研究更简洁些，我们先分别用矩阵形式写出线性规划的典则形式与标准形式。

1. 线性规划典则形式的矩阵表示

对于求最大值问题，它对应的矩阵形式可写成

$$\begin{aligned} \max \quad & Z_0=\boldsymbol{CX} \\ \text{s.t} \quad & \boldsymbol{AX}\leqslant \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{X}\geqslant 0 \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 为约束系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$