广义相对论与引力波

〔美〕J. 韦伯 著

科学出版社

广义相对论与引力波

〔美〕J. 韦伯 著

陈凤至　张大卫 译

内 容 简 介

本书是一本系统地介绍引力波研究的专著．书中对广义相对论的理论基础以及这一领域通常所需要的黎曼几何、张量计算、守恒定律和经典实验作了较严密的介绍，并以约四分之一的篇幅叙述了引力辐射的理论和实验，最后一章扼要讨论了运动方程的推导、统一场论、宇宙学问题和广义相对论的哈密顿表述等．作者是第一个设计检测引力波实验的人．

本书叙述简明、扼要，可供物理方面的研究和教学人员以及哲学工作者参考．

J. Weber

GENERAL RELATIVITY

AND

GRAVITATIONAL WAVES

Interscience, New York, 1961

广义相对论与引力波

〔美〕J. 韦伯 著

陈凤至　张大卫 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

朝阳六六七厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1977年10月第一版　开本：787×1092 1/32

1979年10月第二次印刷　印张：6

印数：6,421—39,780 字数：133,000

统一书号：13031·599

本社书号：876·13—3

定价：0.63 元

原　　序

广义相对论重新引起人们的兴趣有几方面的原因．对理论工作者来说，爱因斯坦引力场的量子化为建立新的基本粒子理论和消除量子场论中的困难开拓了一个大有希望的途径;对实验工作者来说，由于近二十年来的技术进展,已有可能进行某些新的引力实验和更为精确地重做过去的实验．

由于本书篇幅有限，对广义相对论的论述不可能是完备的．作者试图对这个理论的基础、这一领域通常所需要的黎曼几何和张量计算、守恒定律和经典实验等作一个较为严密的介绍．

全书约有四分之一的篇幅主要用于探讨引力辐射的理论和实验．最后一章简要地讨论运动方程的推导、统一场论、宇宙学问题的弗里德曼解和广义相对论的哈密顿表述．

这本小书是我在马里兰大学物理系讲授相对论的教本．

（下略）

J．韦伯

目　　录

第一章 等效原理

这个精确的物理等效性假设不允许我们谈及参照系的绝对加速度，恰如狭义相对论禁止我们论及系统的绝对速度一样.

A. 爱因斯坦 (Einstein)

1.1 厄阜实验

从牛顿 (Newton) 时代起，人们就已假设，物体的惯性质量和重量(引力质量)的比值对于各种物质都是一样的. 如果采用这个假设,写出物体在地球引力场中的运动方程,则物体的质量便被消去,因而所有自由落体均具有相同的加速度.

1890 年,厄阜 (Eötvos)[1] 完成了一项精巧的实验,旨在检验惯性质量和重量的比值.考虑位于地面的物体(图1.1).作用在它上面的力,有指向地心的引力 $\boldsymbol{G}$ 和地球自转产生的惯性离心力 $\boldsymbol{I}$. 这两个力的量值之比以及对应的分量之比，取决于引力质量和惯性质量的比值. 在距赤道和地球一极约等远的纬度上,厄阜将两个物体悬系在扭秤的两臂上，如图 1.2 所示. 设想我们对物体作这样的调整，使得当扭秤处于平衡时，连结二物体的杆位于观察者的水平面内，并指向东西方向. 我们首先可以得出，作用在两个物体上的合力 $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{I}$ 的垂直分量所产生的总转矩分量等于零. 假如两个物体的惯性质量和引力质量的比值不等，那么 $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{I}$ 的水平分量将产生一个转矩，此转矩被悬线的反方向转矩所抵消. 如果现在将整个装置旋转 180°，使两个物体互换位置，那么 $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{I}$

的水平分量所引起的转矩将取相反的方向．但悬线的转矩仍保持不变．假如惯性质量和引力质量的比值对于两个物体是不等的，则应当观察到杆连同物体相对于装置的桁架偏转一个角度．

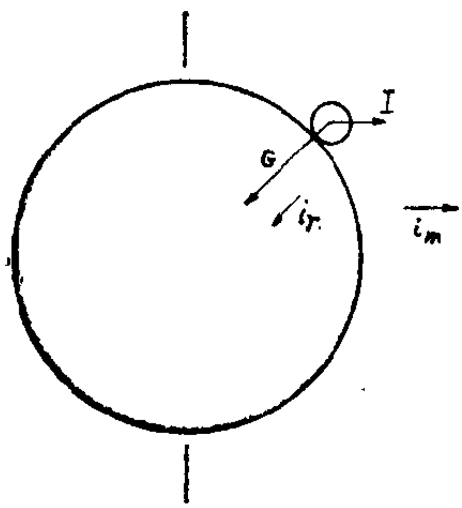

图 1.1

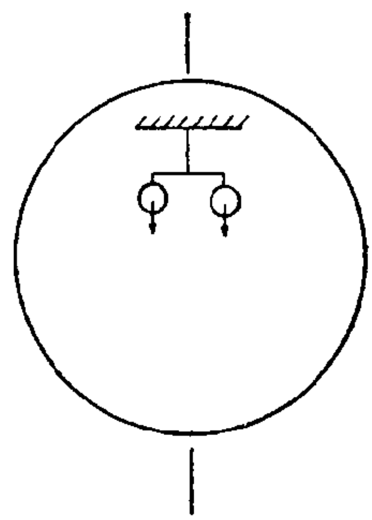

图 1.2

令其中一个物体的引力质量为 M_1，惯性质量为 m_1；令 $\boldsymbol{i}_r$ 为由物体到地心方向的单位矢量，$\boldsymbol{i}_m$ 为在子午圈平面内正交于地球旋转轴的单位矢量；令 g_e 为地球引力场的量值．则引力 $\boldsymbol{G}_1$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{G}_1 = g_e M_1 \boldsymbol{i}_r. \tag{1.1}$$

令 a 为地球半径，ω 为地球角速度，φ 为纬度．则惯性(离心)力 $\boldsymbol{I}_1$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{I}_1 = (m_1 a \omega^2 \cos\varphi) \boldsymbol{i}_m. \tag{1.2}$$

设第二个物体具有引力质量 M_2 和惯性质量 m_2．我们借助扭秤对作用在两个物体上的诸力作一比较．适当选择 M_1 和 M_2，使悬点与杆的中点重合．令矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 分别表示杆与转矩．于是可以写出

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{b}}{2} \times [\boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{G}_2] + \frac{\boldsymbol{b}}{2} \times [\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_2]. \tag{1.3}$$

上式中四个力的合力，其方向必在悬挂杆的细线上，并由下式给出：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{G}_2+\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2. \tag{1.4}$$

平行于悬线的转矩分量势必引起一个可观察到的转动. 利用前面的诸表达式，我们能够写出有效转矩为

$$T_{\parallel}=\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{F}|}$$

$$\approx\frac{(g_e[M_1+M_2]\boldsymbol{i}_r+a\omega^2\cos\varphi[m_1+m_2]\boldsymbol{i}_m)\cdot\boldsymbol{b}\times[\boldsymbol{G}_1-\boldsymbol{G}_2+\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{I}_2]}{2g_e(M_1+M_2)}. \tag{1.5}$$

在式（1.5）中我们略去了分母中的离心力，因为同引力相比其量值甚微. 计算式（1.5）并作如下代换：

$$\alpha_1=M_1/m_1,\qquad \alpha_2=M_2/m_2, \tag{1.6}$$

得有效转矩为

$$T_{\parallel}\approx\frac{a\omega^2\cos\varphi m_1m_2(\alpha_1-\alpha_2)[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{i}_r\times\boldsymbol{i}_m]}{\alpha_1m_1+\alpha_2m_2}. \tag{1.7}$$

若 $\alpha_1=\alpha_2$，表达式（1.7）等于零；若 $\alpha_1\neq\alpha_2$，其值由杆 $\boldsymbol{b}$ 相对于同子午面正交的矢量 $\boldsymbol{i}_r\times\boldsymbol{i}_m$ 的取向决定. 当 $\boldsymbol{b}$ 指东西方向时，它具有最大值. 如前所述，我们这样来转动扭秤，使得它在达到平衡状态时，杆位于地面的切平面内并指东西方向. 然后将装置旋转 180°，使 $\boldsymbol{b}$ 反向；若 $\alpha_1\neq\alpha_2$，则将产生一个转矩，它使杆相对于悬挂扭秤的桁架发生偏转. 但厄阜并未观察到偏转，从而得出结论：对于所有被检试的材料，在 10^{-8} 的精度内 $\alpha_1=\alpha_2$. 后来，这个实验被重复多次[2,3]. 萨森斯（Southerns）的实验是用摆做的；并且证明了，α 对于放射性物质也相等. R. H. 迪克（Dicke）教授现正用大为改良的仪器重做厄阜实验. 他用的是三个物体和一个三重对称轴，为的是尽可能减少局部扰动的影响. 迄今为止，他的结果均与厄

阜的相符；并已确定，对于某些物质，α 的相等达到 10^{10} 分之几的精度*.

厄阜实验使我们能够得出有关基本粒子的某些结论．可以证明：在 10^{-7} 的精度内，电子加质子的质量重量比同中子的是一样的；在 10^{-5} 的精度内，由核结合力引起的核质量减少，伴随着同样的重量减少．在千分之五的精度内可以肯定，轨道电子的结合能也伴有相应的重量改变.

邦迪 (Bondi)[5] 指出，受引力作用的质量与作为引力场源的质量之间可能存在区别． 他称前者为被动引力质量 (passive gravitational mass)，而将后者叫做主动引力质量 (active gravitational mass)． 按照这种观点，厄阜实验所确定的是惯性质量和被动引力质量的比值相等.

1.2 负质量

无论牛顿引力理论还是相对论引力理论，都不排除负质量的存在，可是负质量从未被观察到却是经验事实． 牛顿引力理论和广义相对论都指出，负质量的行为和电动力学中的相应情况迥然不同．如果一个小的负质量同一个大的正质量相互作用，运动方程两端的(负)质量再一次被消去，因而加速度依然指向正质量．这样，一个正质量吸引所有其他质量，既吸引正的也吸引负的． 可以预料，一个小的负质量在地球引力场中是要下落的．类似地，负质量推斥一切其他质量，不管它们的符号如何．对于一对物体，一个具正质量，另一个具负质量，而量值大致相同，我们应当预料到：正质量吸引负质量，而负质量推斥正质量，以致出现一个追逐另一个的局面！

* 据报道，迪克等人于1962—1964 年曾将 α 相等的精度提高到 10^{-11}． 又据最近报道，苏联的 В. Б. 布拉金斯基 (Брагинский) 小组已使这个检验达到 0.9×10^{-12} 的精度．——译者

如果运动被限定在通过两物体中心的直线上，二者即作匀加速运动．这个问题曾为邦迪[5]探讨过．

希夫（Schiff）[6] 最近考虑了一种反粒子即正电子的引力质量为负的可能性．他的论证以重整化的量子电动力学为基础．原子核的库仑（Coulomb）场引起真空极化．尤令(Uehling)[7]最先对氢的这种效应作了计算，结果表明，对氢 2S 态的兰姆（Lamb）移动，该效应引起的贡献为 27Mc．同真空极化相关联的虚电子-正电子偶可望对重整化的原子质量作出贡献．我们由实验得知，正电子的惯性质量是正的．假如它的引力质量是负的，那么不同原子的惯性质量和被动引力质量的比值就应当稍有差别．这是因为虚偶对质量的相对贡献有赖于核电荷及其分布，而后者因不同的原子而异．如果认为正电子和负电子的引力静质量在量值上相等而符号相反，但引力场对正电子动能的影响与通常一样，则引力质量和重整化的惯性质量之差是有限的，并近似地等于[6]

$$(3m/8\pi)(Z/137)^2\int_0^\infty \frac{|F(q)|^2dq}{(q^2+4\mu^2)^{1/2}}.$$

这里 m 为电子质量，$\mu = mc/\hbar$，Z 为原子序数，$F(q)$ 为核电荷分布的傅里叶（Fourier）变换式，且已归一化为单位总电荷．此表达式和原子质量的比值，对于铅、铜和铂分别为 10^{-7}，2×10^{-7}和 4.3×10^{-7}．由于这些数值超过厄阜所确定的质量比值的误差，希夫得出：正电子引力质量为负的可能性应被排除．

看来，有可能尝试某种实验，以观察反中子在地球引力场中是否下落．如前所述，若接受现有的引力理论，则可预料，无论在哪种情况下反中子总是要下落的．

1.3 不同参照系的等效性

两种质量等效这个经验事实，在爱因斯坦[5] 指出它可以

借助不同参照系的等效性来理解之前，在整个理论物理学中都找不到说明. 爱因斯坦假设，处在无引力场区域内的加速系等效1) 于静态引力场中一个给定无限小区域2) 内的静止系.

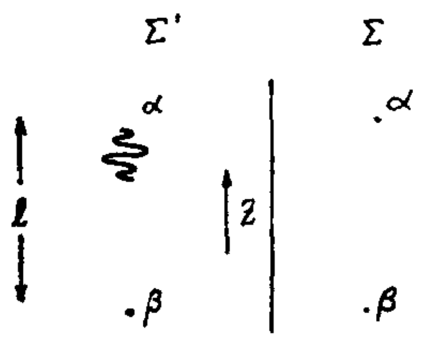

图 1.3

这就是所谓等效原理. 根据这个假设，我们可以用下面的论证[8]（见图 1.3）来证明引力质量和惯性质量的等效是一必然结果. 考虑 Z 轴彼此重合的两个系统 Σ 和 Σ'. 假定系统 Σ 在强度为 g 的引力场内处于静止状态；系统 Σ' 不具有引力场，但有一个沿 Z 轴正向的加速度 g. 设 Σ' 在 $t=0$ 时是静止的，此刻有一能量为 E_α 的光脉冲从点 α 射出，在点 β 被吸收，此刻 Σ' 的速度为 gl/c.

光具有的能量为 E_α，动量为 E_α/c. 利用洛伦兹(Lorentz)变换，可得光在点 β 的能量为

$$E_\beta = E_\alpha \cos\psi + iE_\alpha \sin\psi, \tag{1.8}$$

式中

$$\cos\psi = (1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \sin\psi = (-iv/c)(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

计算式 (1.8)，得

$$\begin{aligned} E_\beta &= E_\alpha[(c+v)/(c-v)]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx E_\alpha(1+v/c) = E_\alpha + E_\alpha gl/c^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

根据等效原理，我们认为表达式 (1.9) 对于系统 Σ 内发生的同样过程亦成立. 假想质量 M 初始在 Σ 内的点 α 上，之后移向点 β. 能量为 E_α 的光在点 α 被射出，在点 β 被 M 吸收. 设 M 在吸收了光能之后的总引力质量为 M'. 现将 M' 重新提

---

1) 这意味着，对一个处于均匀静态引力场中的系统所作的一切局部观察，同对一个匀加速系统的一切局部观察是一样的.

2) 实际引力场的不均匀性排除了在大区域内代之以单一加速系的可能性.

升到点 α，并释放出光能，使其在 α 的质量仍旧为 M. 在整个过程中，总能量没有改变，因而可以令由点 α 至点 β 的能量变化等于返回时的能量变化:

$$Mgl + E_\beta - E_\alpha = M'gl. \tag{1.10}$$

利用式 (1.9) 则得出

$$M' - M = E_\alpha/c^2. \tag{1.11}$$

表达式 (1.11) 表明，引力质量的增加等于惯性质量的改变，因此可以认为质量和重量的等效是加速系和引力场等效的结果.

1.4 谱线的引力红移

我们由等效原理还可以推知谱线的引力红移. 为此我们再来考察加速系 Σ' 内的某原子在点 α 的光发射，此刻 Σ' 是静止的. 频率为 ν 的光被观察者在点 β 接收到，他用自己的原时 (proper time) 单位测量频率. 频率在点 β 的多普勒 (Doppler) 移动为

$$\nu_\beta = \nu_\alpha[(c+v)/(c-v)]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.12}$$

或

$$\nu_\beta \approx \nu_\alpha(1 + v/c). \tag{1.13}$$

在与之等效的引力场中，式 (1.13) 仍然成立，从而有

$$E_\beta/E_\alpha = \nu_\beta/\nu_\alpha = 1 + gl/c^2. \tag{1.14}$$

式 (1.14) 中的量 gl 是引力势的改变. 现在我们将频率移动 $(\nu_\beta - \nu_\alpha)$ 写作

$$\Delta\nu = \nu(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)/c^2. \tag{1.15}$$

在式 (1.15) 中，φ_β 为光的接收点的引力势(负值)，φ_α 为光的发射点的引力势. 对于在地球上接收到的恒星的光，$\varphi_\beta > \varphi_\alpha$. 若 M 为恒星质量，G 为引力常数，r_s 为恒星半径，m 和 r_e 分别为地球的质量和半径，则式 (1.15) 变为

$$\Delta\nu \approx -\frac{\nu G}{c^2}\left[\frac{M}{r_s}-\frac{m}{r_e}\right]. \tag{1.16}$$

这一结果预言了引力红移. 在推导式(1.16)时我们曾假定，按原子或分子的本地原时确定的频率，即使在引力场中，亦保持不变. 这个假设毕竟是关于原子的陈述. 它对于摆钟显然不成立，但对石英钟[1)]至少近似地满足，对于“原子”钟则更为精确. 在缺乏一种完整的(包括同量子化引力场有相互作用的所有场的影响在内的）原子光谱的量子理论的情况下,似乎有理由认为式(1.16)是一个很好的近似式. 但是,可以预计,由引力场的空间导数引起的某些效应,有时会造成对式(1.16)的微小偏离,甚至对于质心自由下落[2)]的原子或分子系统也是如此. 对红移的补充讨论将在第五章给出.

1.5 关于等效原理的补充说明

由于一个加速系与某个引力场等效，我们可以用适当的加速度将引力场消除. 例如,在引力场中自由下落的升降机,仅就与引力有关的情况而言，便表现为一个惯性系. 物体在升降机内运动,宛如没有引力场存在,对物体的任何观察都不能发现升降机内的空间与惯性系有何区别.

还不很清楚,如果升降机内的物体是带电的,上述情况是否仍然正确. 对于匀加速运动的点电荷能否辐射的问题曾做过大量的研究[9,10,11,12]. 邦迪,戈尔德(Gold),富尔顿(Fulton)和罗利希（Rohrlich）等都预言说，这样的电荷确实要发出辐

1) 一位于地面的静止石英振荡器受有本身重量的压力，因而它的体积相对于自由下落(譬如在卫星中)时的值有稍许改变.

2) 原子处于自由下落状态意味着由引力场引起的应力极其微弱. 静止于加速系中的原子可能受到这种应力的扰动. 对于在加速系中进行的实验，这种应力会导致某些可观察到（且可计算）的效应. 详见 C. W. 舍温(Sherwin) 的工作[13].

射. 辐射的反作用(对匀加速运动而言)为零. 由于自能具有无限大值，致使能量守恒问题变得很复杂. 或许，对基本粒子的内部结构予以适当的考虑，将会发现在均匀引力场中下落的带电粒子会发出辐射,并有异于零的辐射反作用存在.由此可得出,我们在观察带电的和不带电的物体的自由下落时,能够用局部测量来判定我们是位于惯性系之中还是在引力场中作自由下落. 因此，等效原理只不过为引力场方程的表述作了前导,它并不是普遍的自然定律.

参 考 文 献

[1] R. V. Eötvos, *Math. u. naturw. Ber. Ungarn* 8, 65 (1890); *Beibl. Ann. Physik* 15, 688 (1891); *Ann. Phys.* 59, 354 (1896); *Ann. Physik* 68, 11 (1922).

[2] L. Southerns, *Proc. Roy. Soc. (London)* 84, 325 (1910).

[3] P. Zeeman, *Proc. Amsterdam Acad.* 20, 542 (1917).

[4] R. H. Dicke, *Revs. Modern Phys.* 29, 3, 355 (1957). 本文仅包含迪克对等效原理的看法,并未讨论新的实验.

[5] H. Bondi, *Revs. Modern Phys.* 29, 3, 423 (1957).

[6] L. I. Schiff, *Phys. Rev. Letters* 1, 7, 254 (1958).

[7] E. A. Uehling, *Phys. Rev.* 48, 55 (1935); R. Serber, *Phys. Rev.* 48, 49 (1935).

[8] A. Einstein, *Ann. Physik* 35, 898 (1911).

[9] H. Bondi and T. Gold, *Proc. Roy. Soc. (London)* A229, 416—424 (1955).

[10] B. DeWitt and R. W. Brehme, *Annals of Physics* 9, 220 (1960).

[11] D. L. Drukey, *Phys. Rev.* 76, 543 (1949).

[12] T. Fulton and F. Rohrlich, *Annals of Physics* 9, 499 (1960).

[13] C. W. Sherwin, *Phys. Rev.* 120, 17 (1960).

第二章　狭义相对论的推广

普遍的自然定律，是由那些对一切坐标系都有效的，也就是说，对于无论哪种代换都是协变(广义协变)的方程来表示的。

A. 爱因斯坦

2.1　协变的概念

闵可夫斯基（Minkowski）曾发现一个重要的事实：由一个惯性系到另一个以相对速度 v 运动的惯性系的变换相当于[1]四维空-时坐标系中的轴旋转．将物理定律写成四维矢量间的关系式，确实是极好地满足了狭义相对论的要求．纵然这种方法不是实质性的，却为理论增添了优美与简洁的色彩．

我们以上标来标识坐标．在狭义相对论的闵可夫斯基空间中，有 x，y，z 及 ct 四个坐标，以后分别记作 x^1，x^2，x^3 及 x^0．事件之间的关系是很重要的量．事件在空间或时间上均不具有广延性，它是四维空间中的一个点．两个事件 a 和 b 的间隔用符号 s_{ab} 表示，并定义为

$$s_{ab}^2 = (x_a^0 - x_b^0)^2 - (x_a^1 - x_b^1)^2 - (x_a^2 - x_b^2)^2 - (x_a^3 - x_b^3)^2. \quad (2.1)$$

如果由一个闵可夫斯基坐标系变换到另一个闵可夫斯基坐标系，同一对事件的间隔保持不变，而且在新的坐标系 x'^1，x'^2，x'^3，x'^0 中，其形式为

$$s_{ab}^2 = (x_a'^0 - x_b'^0)^2 - (x_a'^1 - x_b'^1)^2 - (x_a'^2 - x_b'^2)^2 - (x_a'^3 - x_b'^3)^2. \quad (2.2)$$

在上述的坐标变换(它们构成一个群)下，有些量如 s_{ab} 的值是不变的，而另一些量如 $x_a^1 - x_b^1$ 的值则要改变．又 s_{ab} 的