数学概观

〔瑞典〕L. 戈 丁 著

胡作玄 译

科学出版社

1984

内容简介

本书对高等数学的大部分内容作了简明的、介绍性的论述。全书共分十二章，其中八章分别讨论数论，代数，几何及线性代数，极限、连续性及拓扑学，微分，积分，级数和概率。每章都从基本概念、基本定理开始，一直论述到当前的进展，并附有该学科的历史概况及有关的著名数学家的生平简介、重要参考书。另外还有三章分别讨论数学模型与现实，数学的应用及十七世纪的数学史。最后一章讨论数学的社会学、数学的心理学及数学教学。

本书内容丰富，论述严谨，可使读者了解数学的全貌、现代数学的特点及数学的应用，并可提高读者对数学的兴趣。

本书由胡作玄同志翻译，张燮同志初校，沈永欢同志复校。

本书可供大学数学系学生、大学及中学数学教师、科技人员及数学爱好者阅读。

encounter Lars Gårding
ENCOUNTER WITH MATHEMATICS
Springer-Verlag, 1977

数学概观
〔瑞典〕L. 戈丁 著
胡作玄 译
责任编辑 杜小杨 张鸿林
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1984年4月第一版　开本：850×1168 1/32
1984年4月第一次印刷　印张：11
印数：0001—19,300　字数：289,000

统一书号：13031·2544
本社书号：3494·13—1
定价：2.05元

序　言

试图使数学为广大公众所理解，这是一件极为艰巨的工作。作者必须考虑到读者对于不熟悉的概念和错综复杂的逻辑关系并没有什么耐心去钻研，而这就意味着要把大部分数学排除在外。

我在计划写作这本书时给自己定的目标要比较容易达到。我写这本书是给已经知道一些数学的读者看的，特别是给读完高中以后在学习大学一年级数学的学生看的。本书的目的就是要给大学低年级学生所碰到的数学内容提供历史的、科学的以及文化的基本框架。从“数论”到“应用”这九章就是为达到这个目的而写的。每一章的开始都有历史的引言，接着对于一些基本事实进行紧凑而完备的论述，一直谈到所讨论的内容的当前状况；如果可能的话，也要涉及一些近代的研究工作。大多数章节都引用历史上的数学论文中的一两段话来结尾。

有时读者需要参阅前面的章节，但是各章在很大程度上是彼此独立的。读者即使在一章中某个地方卡住了，也仍然能够阅读其余大部分材料。然而可以这么说，这本书并不打算让读者毫不费力地从头到尾一气把它读完。它包含了很丰富的材料，其中有些材料并不能算是初等的。例如，在代数那一章中的希尔伯特零点定理以及积分那一章中的傅立叶反演公式都是如此。这些重要的题材之所以都收到本书中，是因为在这两种情形下，根据前后文讲过的材料可以很自然地给出简单而清楚的证明来。

本书的另外三章讨论更为一般的课题。头一章讨论模型与现实，最后一章讨论数学的社会学、数学的心理学以及数学教学。中间还有一章谈到十七世纪的数学，它给无穷小演算（微积分）提供了一个较为完整的历史背景材料。在附录中，我简单地介绍了一下术语及记法；最后，对于如何阅读及选择数学教科书，我

也提出了一些建议。

卡尔·古斯塔夫·安德生和汤马斯·克莱生读过本书的初稿，干纳·布洛姆读过概率论这章。威廉·F·小唐纳格、陶尔·赫勒斯坦和查理·哈尔伯格读过本书的定稿。对于这六位朋友及批评者的非常有价值的建议，我表示衷心的谢意。

L. 戈丁

1977年4月于隆德

目 录

第一章 模型与现实

1.1 模型．自然数．天体力学．量子力学．经济学．语言．1.2 模型与现实．1.3 数学模型．

为了理解周围的世界，人们总是把自己的观察及思想组织成概念的体系。我们把这些概念的体系称为模型．把逻辑应用于模型的概念而得到的见解就称为理论．数学模型在逻辑上是首尾一贯的，并且具有广泛的理论．其他模型可能没有这么严格，但是它们的用处也并不因此而更小一些．

在精密科学中，模型的正确性是通过逻辑和实验来检验的．这就使得我们有必要把模型和我们设想该模型所表现的那部分外在世界十分清楚地区别开来．这个原则现在已经在许多科学分支中通用．倘若把这个原则加以普遍应用，就会把人类思想纳入引人入胜的前景中．本章的一部分，讨论人们同自己所创造的万物的模型的关系，首先简单描述并评价某些重要的模型，最后对某些数学模型及其相互关系作了概括的论述．

1.1 模　　型

自然数

最简单的数学模型就是自然数 1， 2， 3，…的集合．如果有一些对象，除开它们的数目之外其他性质我们都不予考虑的话，我们就可以用自然数来数它们．在一切语言中，都有自然数出现．有的语言中数目的名称多些，有的语言中少些，但是总有一些数目由于太大而没有名称．这种现象或许就是人们头一次碰到无穷大．这在古代就已经导致这种严肃的问题：有没有大得不能

数的数？或者，更具体一些：地球上的沙粒是不是数不完的？阿基米得在一本题为《数沙法》(The Sand Reckoner)(公元前200年)的书中回答了第二个问题。他列举出一系列增长很快的数目，并且通过体积的估计而证明：这些数目当中有些数目比地球上甚至比太阳系中的沙粒的数目还大。这里我们就看到自然数的模型可以怎样用来回答关于外在世界的一个具体问题。这表明抽象化是很有价值的。这种情形如图1.1的左边所示。左边的弯弯曲曲的轮廓线表明我们从现实世界中切下了一块，这块东西有些性质在模型中是反映不出来的。而模型中的直线及直角只是设想用来表现现实中某些概括的特性。

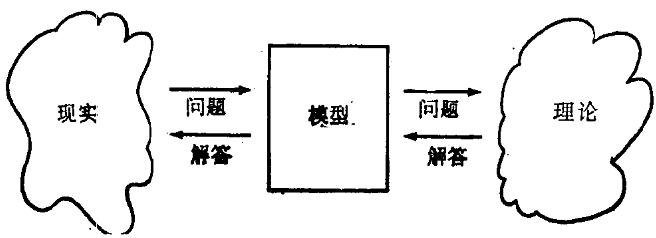

图1.1 现实-模型-理论的三元组。

现在让我们把乘法运算添到我们的模型——自然数当中去。这样它就具有许多非常有趣的性质。一些乘法的经验表明，有些数是一些比1大的其他数的乘积，例如，20＝2×2×5；而有些数，例如5，就没有这种性质。后一种数称为素数。开头的几个素数是2，3，5，7，11，13，17。不难把这个序列继续写下去，但是当我们碰到很大的数时，验证它们是否为素数所需要的计算工作量就会增长得很快。在这种情况下，自然就会提出下面的问题：素数的数目是有限多还是无穷多？在欧几里得的《原本》(Elements)(公元前270年)中，已经有一个简单而巧妙的推理能够得出结论：素数有无穷多；我们将在下一章讨论这个问题。这里我们有一个在模型中提出而能用理论来回答的问题的例子，这就是关于模型的逻辑推理。它可以用图1.1的右边来说明。图中理论的弯弯曲曲的边界表示理论并不能由模型完全决定。在我

们这个具体情形下，它包含许多关于自然数的定理：例如某些方程的可解性及不可解性，素数的分布等等。这种理论的大小及威力，除了依赖于其他因素之外，还与创造该理论的数学家的能力有关。

下面我们可以用这个由三部分构成的图形来说明自然数以外的许多重要模型。

天体力学

下面要分析的那部分现实世界，是对地球、行星及太阳在不同时刻的位置所作的天文观测。在这部分现实世界的模型中，这些天体相当于质点，它们彼此之间遵照牛顿万有引力定律而互相吸引。每个物体吸引另一个物体的力的大小与这两个物体的质量乘积成正比，与它们之间的距离的平方成反比。力的方向指向这个吸引的物体。物体的运动总是满足物体的质量与其加速度的乘积等于吸引力。这个模型的理论就是关于这种运动的性质的数学命题。由此特别可以推出，物体在某一时刻的位置和速度唯一决定了它以后的运动。这个模型及其理论是牛顿在十七世纪创建的。它回答了大量天文学上的问题。行星的轨道及质量可以非常精确地计算出来。同预见的结果的微小偏差，曾经导致新行星的发现。人造卫星的轨道也是借助这个模型来预测的。从牛顿的时代到现在，这个理论不断地发展着。天体力学获得了无比的成就，并对十八世纪和十九世纪的哲学产生了深刻的影响。

量子力学

问题是要分析原子的辐射，这种辐射作为照片上的轨迹及光谱线而被记录下来。这里的模型是天体力学的变体，其对象相应于原子核及电子，但此时实在物体与模型的对象之间比较紧密的直观联系已经消失了。这个模型的某些对象必须既解释成波又解释成粒子。导致量子力学模型的见解，在很大程度上来自天体力学中富有成果的概念，例如质量、能量、动量等。照片本身并不

能提供多少指引。除了其他内容以外，这种模型的理论主要是由关于希尔伯特空间的命题所构成的，而希尔伯特空间可以看作相当于无穷维的欧几里得空间。从这个理论出发，通过少量数据，就可以预言出辐射频率及其在电磁场中的变化。在这种意义下，古典量子力学取得了很大的成功。这个模型的一种性质——互补原理——在哲学上也取得了一定的地位。

计算所得到的频率与观测的频率之间的某些微小偏差导致建立更精细的模型，在这个模型中要考虑爱因斯坦的相对论，并且正如原子模型是行星运动模型的量子化一样，这个模型也要把电磁场量子化。这种新模型并不那么成功。在它的理论中，始终存在着一些至今尚未解决的困难。令人头痛的是不存在一个这种类型的模型，它具有相容的理论，且该理论又具有有趣的应用。另一方面，在目前的模型中有可能由某些事实预见到另一些事实。很难猜测下一步会怎么样，究竟是模型会改变还是理论将得到扩展，这就不得而知了。

经济学

我们考虑具有全面竞争的市场中的价格理论。目的是分析生产者与消费者之间的决定商品价格的相互作用。这个模型中也出现生产者和消费者，但他们的动机都大大简化了。生产者力图赚到最多的利润，而消费者则力图获得最大的效用。假定在市场的每一种状况下，利润及效用都是已知的。平衡状况可以定义为这样一种状况，如果偏离这种状况，就会至少对某一方面不利。此时关于这个模型的理论就提供一些保证平衡存在的条件，并提出计算相应几组价格的方法。因为这个理论的数学比较简单，我们就会问，为什么食品杂货店的价格用某种大型计算机还不能算出来？回答是：效用函数实际上并不是那么确定，以至进行这种计算并无意义。但是这并不使这个模型变得毫无价值。有时它可以使我们得到定性的结论，并且在任何情况下，它都有助于分析市场状况。这个模型可以用来构成一个完整的概念体系。

经济模型大都不能得出满意的定量结果。这样就使得经济学明显地区分成为两个部分：一部分是理论性分支，它研究多多少少有点人为的模型；另一部分是描述性分支，它更直接地讨论现实世界的情况。

语言

经典语法及其各个部分可以看作是语言的模型。而只是到最近人们才把这种模型和它们的理论（看作该模型的逻辑分析）加以区别。在五十年代，N. 乔姆斯基朝这方向走出了重要的一步。他考虑生成的模型，即所有规则及指令的集合，由它们得出的都是构造得正确的句子，而别无其他。乔姆斯基应用数理逻辑的方法巧妙地说明了，一种生成模型必然包含一些规则，即所谓变换，它们超出了由材料马上就能推出的简单规则。结构主义者所能接受的只是这些规则，他们抛掉经典语法的大部分内容，认为那些已沾染上太多从哲学上讲是先验的东西。举例来说，一个变换就是把主动态变成被动态的过程。乔姆斯基对于语法模型的要求更加严格，同时抛掉下面这种观念，即认为这种模型要由语言本身通过某些预先指定的步骤构造出来。

把上面一些例子记在心里以后，我们现在就可以对于现实-模型-理论这个三元组进行某种更一般的论述。在天体力学中，这三个部分有着完美的平衡和紧密的联系，而理论也被证明是非常有活力的。与这种理想状况相反，有时理论部分可能不充分，就像量子场论的情形那样。许多模型非常概念化以致不能作出预见，而只能起概念框架的作用。有效的模型十分罕见，也不能通过观察而由某种自动的步骤得出来。一般来说促使我们改进模型的往往并非现实本身，而是现实与模型之间接触的临界点。当现实比较混乱而难以观察时，旧模型有时可能会提供新模型所需要的大部分直觉的知识。

1.2 模型与现实

当我们一旦离开了精密科学及数学时，一直到目前为止所用到的意义之下的理论，就会变得不那么重要。此时为了方便起见可以把模型与理论合而为一。我们现在只限于讨论模型与现实。这一对概念在人类思想中起着极其重要的作用。

譬如说，我们自然而然会把进化论看作地球上生命演化的模型。由于进化论的内在的一贯性以及它与观察十分符合，这是非常令人信服的。宗教是人类在宇宙中的地位的模型，也是历史的推动力。许多宗教都假定有神和精灵存在，他们彼此之间的关系和他们与人类之间的关系反映了人类社会本身。把太阳、月亮、动物、力量、善、恶等拟人化是很常见的。基督教的信仰是宇宙模型的一个简明的描述；万能的神创造了宇宙，统治宇宙，统治地球上所有生命，并对他们施行奖励与惩罚。对于人类所希望知道的自己在宇宙中的地位和自己生活的目的，许多宗教就是用这种神明来回答的。

正如宗教一样，哲学体系也是关于人类及其世界的模型。但是哲学体系更加抽象，逻辑在其中也起着更重要的作用。例如，柏拉图承认神的存在，但他的世界模型的主要支柱则是抽象理念的天。有些理念对应于地面上的事物，有些则表现善与美。希腊哲学家把模型和现实区分得很清楚，并用逻辑来判断哲学上争论的是非。我们的科学传统也始于希腊人。在十七世纪和十八世纪中，哲学体系是十分重要的，象笛卡儿、莱布尼茨、休谟、洛克、康德和黑格尔等人在哲学上都作出巨大贡献，但是他们现在都已经失掉了大部分的吸引力。其后一个有巨大生命力的重要产物是马克思主义的历史哲学。它是一个社会模型，其中经济力量推动历史发展，而历史表现为阶级斗争。其中一种学说曾经预言无阶级社会必将到来。

大多数宗教及许多哲学体系都声称把普遍合理性与内在的一

贯性和令人信服的思想结合了起来。但是，在面对现实或者逻辑时，它们的缺点就暴露出来了。它们由于想包罗万象反而弄巧成拙。然而大多数人至少相信其中一种模型，这也是事实。一种自称最能解释世界及人类存在的模型，肯定可以获得追随者。它们在人类社会中过去十分重要，今后仍将十分重要。对于许多人来说，他们所相信的模型取代了现实世界的地位。用另一种说法，他们是生活在模型中的。一个相信马克思主义的人用他的模型解释所有现象。狂热的宗教信徒把生活看成皮影戏，而把他的宗教所提供的模型当作唯一的真实世界。由于模型与现实的矛盾所导致的冲突，是文学上的常见题材。我举一个例子：契诃夫的短篇小说《套中人》的主角，是俄国南部一个小市镇中的拉丁文教员，他强烈地信奉最严格的中产阶级道德风尚。他发现他的女友骑自行车，于是他和这位年青的女教师还刚刚开始的恋爱就吹了，因为在他看来，一个青年妇女骑自行车简直是不可想象的事。

我相信人类具有追求理论的动力。人的大脑是个拣选机器，来自外界的刺激在这个机器中得到储存和整理归类，并加工成世界的模型。有时他被混乱与复杂的现实所压倒，就逃避到模型的简单而安全的世界中去。大多数人满足于别人所构造的模型，但也有人能够自己创建新的模型或者改进旧的模型。我们追求理论的动力使我们产生外在世界的原始观念，同时使我们得到科学的理论。

1.3 数学模型

如果把自然数的集合称为与现实及逻辑有区别的一个数学模型，那么未免有些迂腐。大多数希腊哲学家恐怕都不同意这种区分。但是希腊数学家创造了一种数学模型——欧几里得几何，却可以精确地符合这种方案。欧几里得的《原本》中描述了这个模型，并且讨论直线、三角形以及其他几何对象，它们都出现于我

们的日常生活中，例如拉直了的绳子和画在沙盘上的图形。它们已经抽象化，而它们的相互关系总结在一些如下类型的公理中："通过任意两个不同的点，能够作且仅能作一条直线。"欧几里得几何模型就是通过这些公理固定下来的。于是欧几里得几何理论则以逻辑为其唯一工具而建立起来。这种理论包含着大量与观察从来不矛盾的结果，例如这样的定理：三角形的三个内角之和等于两个直角。数学正是通过欧几里得几何而获得最严格与最纯粹的科学的名声的。

最近四个世纪中数学的大发展，主要不是受讨论模型所支配的。对于数学家来说，数学的对象显然是抽象观念，并且逻辑是最后判断正误的标准。而把数学应用到物理上的科学家，总是要考虑到实验的检验。在这种情况下，详尽分析模型的组成部分就不是最为优先的事了。只有到了二十世纪，随着数学的系统化，模型的分析才受到重视。于是得出称为集合、群、环、线性空间、拓扑空间之类的数学模型。构成它们的现实世界的是数学对象，而不是那些呈现在日常生活中的东西。在这个意义下，它们是第二代模型。集合论就是这种模型的一个例子（参看图 1.2）。

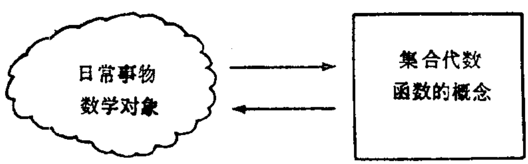

图1.2　集合论的现实世界由数学对象而非日常事物所构成。

我们令集合论的模型包括一个集合的定义、并集、交集、集合代数（即重复进行并集与交集的规则）以及函数的概念。在小学里，集合论是通过一堆日常事物来表现的。在数学中，集合论就是一种概念框架，把这个框架应用到数学对象上是非常有用的，特别对函数的概念十分有用。集合论作为数学的独立分支并没有存在多久。它在 1870 年左右由康托尔所创造，但是现在它已被吸收到逻辑、代数和其他数学分支中去了。集合论的一部

分也可以当作自然数的现实世界，在数理逻辑中就是这么做的(图 1.3)。

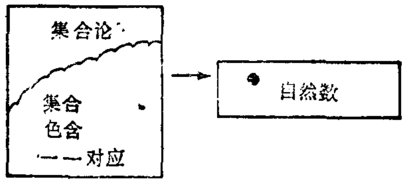

图1.3 由集合到自然数。

第二代模型的另外一个例子是线性空间，它是涉及代数、分析与几何的某些方面的一个模型。这种理论叫做线性代数。群的概念是在整个数学中有着许多不同表现的模型。群论要比线性代数丰富得多，线性代数的主要结果只要几页就可以阐述和证明(见图 1.4)。当前国际上的惯例是，线性代数和群论都要通过公理化的方式来表述。在最近对数学加以重新组织以后，公理化似乎是唯一合理的方法。麻烦主要在于：孩子们和大部分大学生只

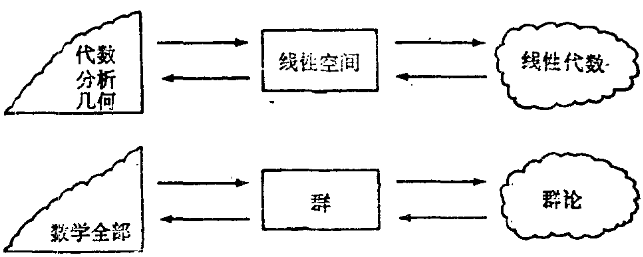

图1.4 线性空间和群是第二代数学模型。

能非常具体地思考问题，碰到第二代数学模型的术语就感到困难。实际上，他们甚至在碰到最简单的与现实紧密联系的模型时也会感到困难。正因为如此，在公立中学中不太可能讲授线性代数与群论的基础之类的课。虽然这些课题的材料非常简单，人人都应该能够理解，然而大多数学生就是听不懂。具有数学能力并有数学兴趣的学生，对于许多数学模型都能应付裕如，但是大多数学生实在只能熟悉数和简单的图形。所谓“新数学”半途遭到失