数学方法与解题研究

戴再平　等编

O1-0
82

1703063

数学方法与解题研究

戴再平　王岳庭　蔡体棨
赵庆余　徐五光　编

1311/30/03

北京师范大学藏书
图书馆

高等教育出版社

B1316805

(京)112 号

内 容 提 要

本书内容包括绪论、一般科学方法与数学解题、数学证明、数学模型方法与解题、几种重要的数学方法与解题、数学中的美学方法与解题、数学观与数学教学观的转变等7章，可供师院、师专、教育学院数学系作为教材或教学参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学方法与解题研究/戴再平等编. —北京：高等教育出版社，1996
ISBN 7-04-005548-1
Ⅰ. 数… Ⅱ. 戴… Ⅲ. ①数学方法-研究②数学-解题-研究 Ⅳ. 01-01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 19494 号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码：100009 传真：4014048 电话：4054588
新华书店总店北京发行所发行
河北省衡水地区印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.625 字数 170 000
1996 年 4 月第 1 版 1996 年 4 月第 1 次印刷
印数 0001—20 190
定价 6.40 元

凡购买高等教育出版社的图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题者，请与当地图书销售部门联系调换.

版权所有，不得翻印

序言

近几十年来，数学科学的蓬勃发展以及现代教学论的出现，使得人们的数学观念和数学教学观念产生了如库恩(T.S.Kuhn)所说的革命性的变化，即人们不再认为数学是一门在一种严格的完全性中僵化了的科学，而是一种正经历着剧烈变化的创造性活动；不再认为数学教学是一个按定理—例题—练习模式进行的灌输知识的过程，而是一种以学生为主体的数学知识创造性地“再发现”活动.这一观念的转变使得人们将注意力更多地集中到数学中的发现、发明与创新法则的探索，导致了80年代我国数学教育界研究数学方法论和数学解题的热潮.实践表明，在数学教师的培训中，“数学方法论”和“数学解题”是两门难以分割的学科，在理论联系实际这一点上，它们在发展中互相靠近可以说是完全自然的事.鉴于上述认识，我们力求通过本书在数学方法与解题研究的结合点上作出系统的叙述.

为了适应高等师范院校教学工作的需要，本书各章内容具有相对的独立性，可以依不同的教学时数适当选取.有关例题一般只涉及高等数学基础知识，特别注意加强了中学数学的内容.正文叙述中有个别现代数学的术语，即使未能理解，也不会影响对本书基本内容的掌握.

本书的选题经国家教委高等学校理科数学与力学教学指导委员会通过，并列入“高等学校理科1991—1995年教材编写选题规划”，在编写过程中得到高等教育出版社，特别是数学室高尚华同志的指导和关心.胡炳生教授、李长明教授、周焕山副教授、沈传龙副教授和汤德祥副教授审阅了书稿，并提出了许多宝贵而中肯的意见，他们的意见对本书得以问世具有十分重大的作用.

本书的撰写人为：戴再平（第一章和第七章）、王岳庭（第二章）、蔡体檠（第三章和第五章）、赵庆余（第四章）及徐五光（第六章）.全书由戴再平作总体构思、统稿和润色，并对一些章节作了补充和改写.

本书列入浙江省教育科学研究"八五"规划重点项目，在成书的过程中，还得到了浙江教育学院、杭州师范学院和杭州教育学院的支持和帮助，在此一并致谢！

作者

1994年9月于杭州

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章 绪　论

问题是数学的心脏;问题解决是数学教育的核心. 作为数学教育工作者,如何把握解决数学问题的钥匙,这是他必须关心的重要问题. 17 世纪的法国卓越数学家、哲学家笛卡儿(R. Descartes)在《方法谈》中说过:“那些只是缓慢地前进的人,如果总是遵循正确的道路,可以比那些奔跑着然而离开正确道路的人走得更远. ”笛卡儿在这里强调的是方法的重要性. 我国古代的思想家孔子也有“工欲善其事,必先利其器”的说法. 当代最著名的数学教育家波利亚(G. Polya)强调指出:“中学教学的首要任务就是加强解题训练. ”他还说过:“掌握数学意味着什么呢?这就是说善于解题,不仅善于解一些标准的题,而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题. ”但是解题毕竟是一种复杂的智力劳动,它是具有创造性特征的人类活动. 对于解决数学问题,特别是解决有关中学的数学问题来说,依靠经验性的知识积累的状况是难以令人满意的,为了避免管窥蠡测,做到高屋建瓴,我们认为重要的是掌握数学方法. 本书就是在数学方法和数学解题的结合上,作出系统的讨论和研究.

§1.1 什么是数学方法与数学问题

方法,英文叫做 method,它是由希腊词 μεταοδos 演变而来的,一般是指认识和研究自然现象、社会现象和精神现象的方式,是从实践上或理论上把握现实的、为解决具体课题而采用的手段或操作的总和.

方法起源于实践活动. 人的认识现实的方式只有在反映现实

本身的客观规律时，才会是正确的、科学的，所以人的实践活动的方式一开始就必须适合于现实的性质和规律性，适合于它们所涉及到的那些事物的客观逻辑，当这些活动方式成为意识的对象时，就表现为思维方法的源泉. 斯皮尔金(А. Г. Спиркин)在《苏联大百科全书》中写道：科学方法的基本内容首先是实践检验过的科学理论，任何这样的理论，在同一知识领域甚至不同的知识领域中建立其他理论时，实质上起着方法的作用，或者起着确定实验活动的内容和次序的方法的作用. 因此，方法同理论之间的区别事实上带有功能的性质：作为过去研究活动的理论结果形成的方法，表现为以后研究的出发点和条件.

那么，什么是数学方法呢？实际上不同的人们对它会有不同的理解，工程师会把它理解为数学模型方法与计算方法；科学工作者会把它理解为描述客观规律、进行定量分析的工具；数学研究人员则常常把它与“单纯形方法”、“有限元方法”、“差分方法”、“优化法”等专业方法相联系；而数学教师又多半会把它看成是解题方法. 在不同的场合中，人们事实上是从两种既有区别又有密切联系的涵义来运用“数学方法”这个词. 一是认为数学方法“主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新法则”[1]的表征；二是认为数学方法是“用数学语言表述事物的状态、关系和过程，并加以推导、演算和分析，以形成对问题的解释、判断和预言的方法. ”[2]对数学方法的不同理解反映了数学这一科学门类应用广泛的特性. 数学方法体系同数学科学本身一样是极为多样的，与此相应的是大量不同的关于数学方法的分类. 譬如，在人们的实际活动的各个层次上都需要用到数学方法，和这种层次性相对应，数学方法也可以分为四个层次：

(1) 数学发展和创新的方法；

(2) 运用数学理论研究和表述事物的内在联系和运动规律的方法；

(3) 具有一般意义的数学解题的方法；

(4) 特殊的数学解题方法.

什么是问题?问题是认识主体想要弄清楚或力图说明的东西,也就是主体所要解决的疑难.它是客观世界的矛盾在思维过程中的反映,人们常常用困惑、焦虑等词对问题加以诠释.问题的形成是主体对客观世界矛盾的主动积极的反映.问题表明我们对一定世界的“无知”,但仅仅是这种“无知”还构不成问题,只有当它被主体所自觉,进入我们的思维活动,即当我们意识到了无知,也就是以思维的方式主动反映矛盾时,才会有问题产生.所以问题一经产生,就意味着主体愿意花费劳动,愿意通过自己的努力来消除由于焦虑而引起的思维紧张的压力,即获得问题的解决.日本哲学家岩奇允胤和物理学家宫原将平说:“问题是基于一定科学知识的完成、积累,为解决某种未知而提出的任务.”

数学是研究客观世界的数量关系和空间形式的科学.当人们与客观世界产生接触,从数量关系或空间形式的角度反映出认识与客观世界的矛盾时,就形成了数学问题.所以我们说,以数学为内容,或者虽不以数学为内容,但必须运用数学概念、理论或方法才能解决的问题称为数学问题.

数学发展史就是一部数学问题解决的历史,而数学方法的产生和发展也是和数学问题的解决紧紧相伴的.伟大的数学家希尔伯特(D. Hilbert)在 1900 年巴黎国际数学家代表会上以“数学问题”为题发表讲演,他说道:“只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止.正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样,数学研究也需要自己的问题.正是通过这些问题的解决,研究者锻炼其钢铁意志,发现新方法和新观点,达到更为广阔和自由的境界.”[3]

由于数学问题的特性:(1)它包含着有关数学的疑问因素和未知方面;(2)问题的出现表明主体在数学方面存在着疑惑,就是说主体的思维水平和当时的状况之间失去了平衡和协调,主体的数学思维产生了隙缝或空缺;(3)主体为填补一定的数学问题带来的

隙缝或空缺，就引起紧张，激发思维活动的进行，所以在数学教学中，问题解决也是一切活动的核心. 不同的是，在教学中所要解决的并不是那些尚未解决的数学科学问题，而只是前人已有的数学知识的再发现. 在数学教学中，只有提出问题，让学生明了产生问题的情境，并且留给学生必要的时间，才能引起学生有目的的思考. 正是由于学生把特定的数学问题确定为自己努力攻克的方向，才能使思维活动以一定的方法、在一定的范围内进行，才能激发学生的创造热情，不断冲击其头脑中旧有的认知结构，不断构建新的认知结构，最后引起自身行为的改变——数学学习.

§1.2 数学方法伴随数学问题的解决而产生

数学方法起源于实践活动，它是伴随数学问题的解决而产生的. 人类解决数学问题的实践主要有两方面：一是生产实践和社会实践；二是科学研究，特别是数学研究的实践. 由于生产实践、社会实践和数学发展本身的需要，人们提出了许多数学问题，这些数学问题或是一个个地被解决，或是因无所裨益而被弃置并代之以新的问题. 在解决这些层出不穷的数学问题的过程中，绚丽多彩的数学方法就诞生了.

考察数学问题的源泉，在每个数学分支中，那些最初、最老的问题肯定是起源于经验，是由外部世界所提出的.

公元前 3000 年的埃及尼罗河流域、美索不达米亚的底格里斯河、幼发拉底河流域，以及稍晚一些的中国黄河流域、印度恒河流域，原始阶段都已结束. 在这些大河流域文明中，整数运算法则在人们的生产实践和彼此的交往中都已经被发现，正像今天的儿童通过经验的方法来学习这些规则一样. 当原始的经济逐渐被农业所代替，由于修建灌溉系统、排水设施以及管理的需要，测量耕地、计算收获物、征收赋税及营造建筑物的需要，观测天体、确定季节的需要，一些几何问题、比例问题、分数问题等就被提了出来.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

巴比仑人可能是在天文观察、土地丈量和贸易中形成了位值观念和六十进制数系，为了计算快速 方便，他们制作大量数表，其中包括倒数表、平方表、平方根表和立方表，形成了用表格进行数学计算的相当先进的数学方法.他们用楔形文字将结果刻在泥板上，然后将泥板焙干，这些泥板除了数表之外，还记载了许多数学问题，如目前保存在英国大不列颠博物馆的 BM13901 号泥板，就记载着 24 个数学问题，其中有解一元二次方程的问题.从这里我们可以看到人类最早的数学模型方法思想的萌芽.

早在公元前 5 世纪，希腊人已经形成了三个几何作图问题，被称为几何三大问题：(1)倍立方问题，求作一立方体，使它的体积二倍于一已知立方体的体积；(2)三等分角问题，求三等分一已知角；(3)化圆为方问题，求作一正方形，使它的面积等于一已知圆的面积.其中倍立方问题，据一则希腊传说讲，它与祭坛建造有关.万能的宙斯通过使者向狄拉斯的居民宣告：为了帮助他们摆脱瘟疫，他必须建造一个比现有的祭祀阿波罗的祭坛大一倍的祭坛，建筑师们为这个问题而困惑，于是向数学家们讨教，这样，倍立方问题就被提了出来.

集古代数学问题之大成的，要数成书于公元 1 世纪前后的我国辉煌数学文献《九章算术》.《九章算术》中收集了方田(各种形状的田地面积计算)、粟米(各种粮食谷物间的按比例交换)、衰分(按比例分配问题)、少广(开平方、开立方)、商功(体积计算)、均输(按比例摊派赋税和徭役)、盈不足(根据两次假设产生过剩或不足来求解的问题)、方程(求解一次方程组)、句股(有关勾股测量的各种问题)共九章计 246 个问题，几乎包括了当时社会生活的各个方面.《九章算术》中的数学问题包括“题”、“答”和“术”三个部分.所谓“术”，即是解决问题的数学方法，它常常包含着解决数学问题所应用的公式、定理或原理的叙述.处理方法上有一题一术，一题多术与多题一术的不同，通过 246 个数学问题共介绍 202 个术，可以说“《九章算术》的全部理论是以寻求各种应用问题的普遍解法为

中心课题.”[4]如《九章算术》第一卷方田,第二十五问:

今有圭田广十二步,正从二十一步.问为田几何?

答曰:一百二十六步.

第二十六问:

又有圭田广五步、二分步之一,从八步、三分步之二.问为田几何?

答曰:二十三步、六分步之五.

接着便归纳得到:

术曰:半广乘以正从.

意即底长之半乘以高,便得三角形之面积.在这里,问、答中的具体数值只起举例的作用,以说明一般方法的来历,人们通过一般方法,便可解决一类性质相同的问题,刘徽在《九章算术注》的序文中说:“事类相推,各有攸归,故枝条虽分而同本干者,知发其一端而已.”意思是许多问题看起来不相同,但经过归纳,理论上是一致的,都有其共同的根源.又如《九章算术》第二卷粟米,有

今有术曰:以所有数乘所求率为实,以所有率为法,实如法而一.

这个“今有术”实际就是现今所谓的“四项比例算法”,即是公式

$$\text{所求数}=\frac{\text{所求率}\times\text{所有数}}{\text{所有率}}.$$

这种解决比率问题的数学方法通过阿拉伯人传到欧洲之后,曾被欧洲商人称为“金法”.那么,今有术的法则从何而来呢?刘徽在“今有术注”中以粟、粝互换为例,作了解释,认为来自古老的物物交换.

《九章算术》是我国古代传统数学中影响最深远的一部著作,从中我们可以看到我国古代数学,是怎样从实际生活中分析出数量关系,建立数学模型,又怎样从研究具体的数学问题入手,通过抽象与归纳而得到解决问题的数学方法的.

与《九章算术》寻求解决实际问题的普遍方法适成鲜明对比的

是，古希腊欧几里得几何所追求的是逻辑的完美. 成书于公元前300年的欧几里得《原本》实际上总结了公元前600年到公元前300年间流行在希腊帝国的很多几何学方面的成果.《原本》的崇尚抽象的演绎推理的传统始于爱奥尼亚学派的创始人泰勒斯(Thales，约公元前624～前547)，据考证，泰勒斯已经知道了下面几个原理：(1)直角彼此相等；(2)等腰三角形的底角相等；(3)圆的直径等分圆周；(4)如果两个三角形有一边及这边上的两个角对应相等，那么这两个三角形全等. 给演绎几何的发展带来巨大推动力的是公元前500年左右毕达哥拉斯学派的希伯苏斯(Hippasus)的不可公度的线段的惊人的发现：一个正方形的对角线和边不包含公共的度量单位. 这一事实的发现，不是依靠实际测量工具的度量，而是依靠逻辑证明. 经过这一发现，希腊人相信：直觉、经验乃至实验都不是绝对可靠的，今后必须依靠证明. 其后，希腊人的数学又注入了柏拉图(Plato，公元前427～前347)的"理念学说"，就愈益脱离了直观印象，变成纯粹形式化的思维对象. 柏拉图认为，除了现实世界之外尚有一个理念世界，这理念世界中的各种"理念"，并非指由知觉而引起的人脑中的观念，而是指自存的抽象原理. 他曾以圆为例进行分析，认为真正的圆是"圆的理念"，而平时被世人称为圆的某种东西，定义的圆，画出的一个圆，都不是完善的圆. 他反对那种认为几何学只对工艺人有用处的实用主义观点，而认为其主要功用是锻炼思维能力. 经过希腊人的300年的努力，作为几何学的结晶——欧几里得《原本》终于问世了.《原本》是一部在定义、公设和公理基础上按演绎方法建立起来的命题系统，它包含23个预备性定义，5个公设，5条公理和465个命题. 欧几里得《原本》的出现，标志着一种重要的数学方法——公理化方法的形成. 2000年来，公理化方法对整个数学的发展乃至物理学、现代理论力学及各门自然科学的发展都带来深远的影响. 人们通过欧几里得几何的学习，受到了公理化方法的训练，从而迈入科学的殿堂. 爱因斯坦(A. Einstein)就说过："世界第一次目睹了一个逻辑

体系的奇迹，这个逻辑体系如此精密地一步一步推进，以致它的每一个命题都是绝对不容置疑的——我这里说的是欧几里得几何.推理的这种可赞叹的胜利，使人类的理智获得了为取得以后的成就所必需的信心.”[5]

公元前 212 年，伟大的希腊数学家阿基米德(Archimedes)死于罗马士兵的刀下，他的死预示着希腊数学厄运的到来.公元 325 年，罗马帝国定基督教为国教，罗马人并不重视抽象化的希腊数学，希腊式的学校逐渐衰亡，教会学校代之而起，直到封建社会解体，在长达千余年的时间中，欧洲数学发展缓慢，但是 16 世纪符号代数的建立，对于以后数学的发展以及各种数学方法的形成所带来的影响是不可估量的.符号代数的渐次引进，其客观原因，一方面是数学发展要求建立一套简明有效的、统一的符号体系，使得数学表达更为扼要，思路更加清晰，互相交流更为方便；另一方面是 15 世纪中国的活字版印刷术传到欧洲，对数字字形的确定和符号的标准化起了推动作用，并且由于近代印刷业的出现，标准化的符号才有推广的可能.首先系统地、有意识地使用符号的人中法国数学家韦达(F. Vieta)的功绩最为突出.符号代数的建立对各种数学方法的形成产生巨大的推动力，它不仅表明初等代数开始进入成熟期，而且为变量数学和现代数学的出现，提供了必要的条件.

17 世纪以后，欧洲的数学摆脱了发展缓慢的状态，这一“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入数学，有了变数，辩证法进入了数学，”(恩格斯)在笛卡儿的解析几何中“曲线是任何具体代数方程的轨迹”，这不仅一下子扩充了数学的范围，而且为代数方法运用到几何乃至整个数学铺平了道路.1637 年，笛卡儿的解析几何作为“附录”发表在他的哲学著作《方法谈》之中，这对笛卡儿来说并非是一种偶然的安排，因为在他看来，解析几何与其说是数学研究的新成果，还不如说是科学方法论的产物.笛卡儿在确立一些方法论的规则之后曾写道：“我除了按照这些规则小心地对我的一切思想作普遍的引导之外，还不时留下一点时间，特别

用来解决数学上的一些难题，有时也用来解决一些别的科学上的难题，……我在这一方面所做的许多工作，各位可以看到在这本书里都加以阐述了.”[6]意指《方法谈》的原本附有作者所研究的《几何学》、《气象学》、《折光学》等篇.

数学的发展一方面是由于对生产和社会生活中所提出的数学问题的研究和解决，如航海、机械、力学、天文学的发展，促使牛顿(I. Newton)在考察变速运动中的位置、速度、加速度的关系而创立微积分，从而导致函数研究中极限方法的完善；从研究博奕问题开始，经历了两个世纪，雅各布·伯努利(Jakob Bernoulli)终于将概率论发展成为数学的一个新分支，为自然科学和社会科学的研究提供了全新的或然方法；泰勒(B. Tayler)、丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli)、欧拉(L. Euler)等对声学、尤其是对音乐乐声的弦振动、声音传播问题的研究，极大地刺激了微分方程的发展，至今微分方程反过来又成为研究孤立子等重大物理现象的工具. 另一方面，由于对数学发展内部矛盾运动中提出的问题的研究和解决，更发展了抽象的数学方法，使数学成为脱离现实世界的高度抽象的形式化的事物，其中典型的例子是，伽罗瓦(E. Galois)关于代数方程可解性的研究，引进了群和域的概念，进一步导致抽象代数的建立；关于欧几里得《原本》第五公设的独立性的研究，鲍耶(J. Bolyai)、罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевсий)和黎曼(G. F. B. Riemann)相继建立了不同的非欧几何理论；关于复数运算的研究，导致1843年哈密顿(W. R. Hamilton)建立四元数代数，进一步发展为超复数理论. 希尔伯特说：“数学中每一步真正的进展都与更有力的工具和更简单的方法的发现密切联系着，这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论并把陈旧的、复杂的东西抛到一边.”

在人们所探索的众多的数学问题中，一个著名的例子是费马大定理(The Fermat Last Theorem)：$x^n + y^n = z^n$ 对于不等于零的正整数 x, y, z，当 $n \in N, n \geqslant 3$ 时无解. 300 多年以来，这个问题

引无数英雄竞折腰*，在寻求这个结论的证明过程中，涉及到 L-函数，群概形，伽罗瓦表示，模形式，形变理论等，远远地超出了费马大定理本身所在的初等数论的范畴，特别是在数论方面得出许多新的数学方法，从而丰富和发展了代数数论. 无怪希尔伯特风趣地说："我们应当更加注意，不要杀掉这个经常为我们生出金蛋的母鸡."

在数学的迅速发展之中，出现了不少在数学方法方面有研究的著名学者，如笛卡儿、莱布尼茨(G. W. Leibniz)、欧拉、高斯(C. F. Gauss)、庞加莱(J. H. Poincaré)、克莱因(F. Klein)和希尔伯特等，他们或发表过有关数学方法的精辟见解，或有专门论著. 下面以欧拉所解决的两个数学问题为例，说明这些著名学者是如何运用并发展数学方法的.

问题 1 自然数平方的倒数和.

求 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$.

这是一个曾使雅各布·伯努利感到无能为力的数学问题，他曾经写道："假如有人能够求出这个我们直到现在还未求出的和并能把它通知我们，我们将会感谢他."对于这个问题，欧拉发现了各式各样的表达式(定积分、级数)，但没有一个能使他满意，他用这些表达式之一，算出了一个有七位有效数字的和(1.644934)，但这仅是一个近似值，而欧拉的目的是求出准确值. 最后他发现了它，是类比方法帮助他得到了精彩的结果.

设一个 $2n$ 次方程

$$(*)\quad b_0-b_1x^2+b_2x^4+\cdots+(-1)^n b_n x^{2n}=0 \quad (b_0\neq 0)$$

无零根. 将这个方程变形为

$$\frac{b_0}{x^{2n}}-\frac{b_1}{x^{2(n-1)}}+\frac{b_2}{x^{2(n-2)}}+\cdots+(-1)^n b_n=0,$$

* 据报导，1993 年 6 月 23 日，美国普林斯顿大学教授、英国数学家韦尔斯(A. Wiles)在剑桥大学牛顿数学研究所做报告时，曾宣布已证明了费马大定理. 但在五个月之后，他又说证明中发现有漏洞. 不过目前还没有人宣称漏洞无法补上. 因此，费马大定理仍在证明中.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com