素数定理的初等证明

潘承洞　潘承彪　著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

众所周知，素数是数学中最重要最基本的概念之一．素数定理“$\pi(x)\sim x(\ln x)^{-1}, x\to+\infty$”是数论以至整个数学中最著名的定理之一．

本书主要介绍素数定理的七个初等证明以及与之有关的 Чебышев 不等式、Mertens 定理、素数定理的等价命题、Riemann Zeta 函数、几个 Tauber 型定理、L空间中的 Fourier 变换、Wiener 定理、素数定理的推广等．

通过学习本书，对于了解数学各分支之间的相互联系，提高观察问题、分析问题和解决问题的能力，以至对素数定理作进一步的研究，是很有裨益的．

本书可供大学数学专业的学生、教师；数学工作者及数学爱好者参考．

大学数学丛书

素数定理的初等证明

潘承洞　潘承彪

责任编辑　赵序明

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 9.75　字数 211,000

1988 年 2 月第 1 版　1988 年 2 月第 1 次印刷

印数：1— 8,800

ISBN 7-5323-0604-6/O·58

统一书号：13119·1434　　定价：2.05 元

《大学数学丛书》

编辑出版说明

为我国大学生提供更多内容丰富的数学读物，这一直是我国数学界和出版界多年的宿愿之一．这套《丛书》就是以理工科数学（数理）系大学生为主要读者对象，兼供大专院校数学教师、科研工作者、中学数学教师和其他数学爱好者参考的读物．

《丛书》的内容大致包括这样几个方面：数学中某些分支或专题的入门介绍；体系新颖、别具一格的基础读物；数学史料、数学家传记和重要数学思想的介绍等．《丛书》中的各本可以是编著、编写而成，也可以是翻译、编译、摘译汇编而成．

《丛书》从1981年开始陆续出版．企盼数学界、教育界以及关心我国数学事业的各界人士不吝赐教，并望在推荐选题和编撰方面给予热忱支持．让我们为繁荣我国数学读物的出版事业而共同努力．

上海科学技术出版社

序　言

素数是数学中最重要最基本的概念之一．素数定理：

$$\pi(x)^{*)}\sim x(\ln x)^{-1}\quad(x\to+\infty)$$

是数论以至整个数学中最著名的定理之一．这一定理是Legendre于1800年左右提出的．经过了一百多年的时间，在1896年由Hadamard和de la Vallée Poussin彼此独立地用高深的整函数理论所证明．但是，对定理的研究并没有因此而完结，其中的一个方面是数学家们企图找到尽可能简单的证明．在数学中很少有一个定理像素数定理那样对其证明作了如此深入、透彻、全面的研究．在数学中，对于一种理论体系的逻辑结构——即其中各个概念、命题之间的逻辑联系——的研究是十分重要的．长期以来，根据所找到的许多证明，人们认为素数定理和Riemann ζ函数**)有不可分割的联系，因而许多数学家认为要给出一个素数定理的初等证明(至多用一些初等微积分)是不可能的．然而，在证明素数定理之后约50年，Selberg和Erdös于1949年给出了这样的证明！他们的证明竟是这样的初等，除了e^x、$\ln x$之外用不到任何“超越性”的东西，也不需要微分和积分．当然证明是很复杂的．他们的工作被认为是对素数分布理论的逻辑结构具有头等重要意义的发现．对素数定理的研究大大促进了数论、分析、函数论的研究．对这一定理的研究至今不衰，仍吸

*) $\pi(x)$表示不超过x的素数个数。

**) 见第八章。

引着不少数学工作者的注意.

这样,学习素数定理已有的各种证明,对于了解数学各分支之间的相互联系,提高我们观察问题、分析问题和解决问题的能力,以至于对素数定理作进一步研究,是有裨益的.

因此,当出版社的同志要我们为数学系高年级学生写一本课外读物时,我们就想到了这一个题目,把有关的知识向他们作一个较为系统而全面的介绍. 当然,作为这样的读物,把要用到高深的函数论知识的证明包括在内是不适宜的. 本书把至多用到复变函数论的 Cauchy 积分定理的证明都看作是初等的. 我们选了到 1981 年为止有代表性的七种证明.

阅读本书不需要具备任何初等数论的知识. 但是,不同的证明需要大学数学系的一元微积分、复变函数论和实变函数论方面的有关知识. 第一章主要是介绍素数定理的历史,并结合介绍了本书各章的内容;具有中学程度就可阅读第二章;学过微积分后就可阅读第三~六及第九章;第八,十一,十二及十五章需要复变函数论的知识;当学过实变函数论后,就可阅读其他各章了. 有些内容我们按其困难的程度打上了*号和**号,初次阅读时可略去,这并不影响对素数定理的初等证明有一个相当的了解. 我们希望本书对从事数论工作的同志亦有一定的参考价值.

书中的定理、引理、推论等分别按每节编号,公式亦按每节编号. 在引用时,"(5)式"表示同一节中的(5)式;"§2(5)式"表示同一章第2节中的(5)式;"第一章§2(5)"表示第一章第2节中的(5)式;其他类推.

关于素数定理的研究已作了各种推广,例如算术级数中的素数定理亦是十分著名的问题,但本书不涉及这些内容.

本书的内容是我们在多年的教学工作的基础上整理、补

充而成的，有些内容还来不及仔细推敲，缺点与错误一定不少，切望指正。

我们衷心感谢陈景润同志在病中仔细地审阅了本书，并提出了十分宝贵的意见。

潘承洞　潘承彪

一九八三年十月于济南

******

补　记

对1981年后的有关进展说明两点.(一)H.Daboussi(Sur le théorème des nombres premiers, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 298(1984), 161—164)和A. Hildebrand(The prime number theorem via the large sieve, Mathematika, 33 (1986), 23—30)，给出了两个新的初等的实分析证明，不需要利用Selberg不等式(见第一章§2(39)式)，是不属于本书第19页中所说的四类证明的又一类新证明.（二）A. Ф. Лаврик的文章：Методы Изучения Закона Распределения Простых Чисел, Труды Матем. Инст. Стеклов, 163 (1984), 118—142，对素数定理的初等与非初等证明作了很好很全面的介绍.

我们衷心感谢本书的责任编辑赵序明同志，由于他的建议与帮助使本书更便于阅读和改正了一些笔误.

作者　一九八七年六月一日于北京

参 考 书 目

为了叙述和读者阅读方便起见，我们把本书中用到的大学课程中的某些知识列出参考书如下，有的还作为定理、引理列出（当然不加证明．因为凡是学过这些课程的读者是不难补上这些证明的）．本书中所引用的参考书是：

【 微 】：菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）：«微积分学教程»，人民教育出版社，1979.

【 数 】：复旦大学数学系主编：«数学分析»，上海科学技术出版社，1962 年第 2 版.

【 函 】：梯次玛希（E. C. Titchmarsh）：«函数论»，科学出版社，1964.

【 复 】：庄圻泰，张南岳：«复变函数»，北京大学出版社，1984.

【 实 】：那汤松（И. П. Натансон）：«实变函数论»，商务印书馆，1953.

【实变】：周民强：«实变函数»，北京大学出版社，1985.

在本书末，还列有参考资料，阅读本书并不需要这些资料，这是为需要进一步了解本书所涉及的内容的读者准备的.

符 号 说 明

x, y 等表示实数.

a, b, d, k, l, m, n 等表示整数或正整数.

p, q 等表示素数.

$a\mid b$	a 整除 b.
$a\nmid b$	a 不能整除 b.
$p^k\parallel a$	$p^k\mid a$, $p^{k+1}\nmid a$, k 是非负整数.
(a, b)	a 和 b 的最大公约数.
$[a, b]$	a 和 b 的最小公倍数.
$\sum\limits_{n\leqslant x}$	对不超过 x 的正整数 n 求和.
$\sum\limits_{y<n\leqslant x}$	对满足条件 $y<n\leqslant x$ 的整数 n 求和.
$\sum\limits_{d\mid n}$	对 n 的所有的正除数 d 求和.
$\sum\limits_{p\leqslant x}$	对不超过 x 的素数 p 求和.
$\sum\limits_{y<p\leqslant x}$	对满足条件 $y<p\leqslant x$ 的素数求和.
$\sum\limits_{p\mid n}$	对 n 的所有不同的素因数求和.
$\sum\limits_{p}$	对全体素数求和.
$\prod\limits_{p\leqslant x}$	对不超过 x 的素数求积.
$\prod\limits_{y<p\leqslant x}$	对满足条件 $y<p\leqslant x$ 的素数求积.
$\prod\limits_{p\mid n}$	对 n 的所有不同的素因数求积.
$\prod\limits_{p}$	对全体素数求积.

$\log_a x$ $a>1$, 以 a 为底的对数.

e 极限值 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$\ln x$ 以 e 为底的自然对数.

$[x]$ 实数 x 的整数部份.

O, $\ll$ 见第一章 § 1 定义 1.

o, $\sim$ 见第一章 § 1 末.

$d(n)$ 除数函数, 见第二章 § 2(8)式.

$\mu(n)$ Möbius 函数, 见第二章 § 3(4)式.

$\Lambda(n)$ Mangoldt 函数, 见第二章 § 5(3)式.

$\pi(x)$ 不超过 x 的素数个数.

$\theta(x)$, $\psi(x)$ Чебышев 函数, 见第二章 § 5(1)及(2)式.

C, C_1, $C_2\cdots$ 表示正常数.

$s=\sigma+it$ $\sigma=\mathrm{Re}\,s$ 表示复数 s 的实部, $t=\mathrm{Im}\,s$ 表示虚部.

γ Euler 常数, 见第三章 § 1(13)式.

目　　录

第一章
素数定理的历史

本章主要介绍素数定理证明的发展史，并同时介绍本书的内容安排(见§2)．在§1及§3中分别介绍本书中常用的符号O和$\ll$，以及数论函数$[x]$.

§1 符号O及≪

本书中经常要使用符号O(读作“大欧”)及$\ll$(读作“小于小于”)，前者是 E. Landau 引进的，后者是 И. М. Виноградов 引进的．它们的意义是相同的，但在使用中各有优点．

定义1 设$\mathscr{M}$是给定的一个实数集合，$f(x)$是定义在$\mathscr{M}$上的复值函数，$\phi(x)$是定义在$\mathscr{M}$上的正值函数．如果存在一个与变数x无关的常数A，使得

$$(1)\qquad |f(x)|\leqslant A\phi(x),\ x\in\mathscr{M},$$

那末就记作

$$(2)\qquad f(x)=O(\phi(x))\quad 或\quad f=O(\phi),\quad x\in\mathscr{M},$$

或

$$(3)\qquad f(x)\ll\phi(x)\quad 或\quad f\ll\phi,\ x\in\mathscr{M},$$

常数A称为符号O(或$\ll$)所包含的常数，简称O(或$\ll$)常数．

显然，这两个符号是不等式的缩写．当$\phi(x)\equiv1$时，这两个符号表明$|f(x)|$在集合$\mathscr{M}$上有界．一般说来，这表明

了 $|f(x)|$ 在集合 $\mathscr{M}$ 上的数量阶不超过 $\phi(x)$ 的数量阶. 例如:

(4) $$\sin(ax+b)=O(1),\quad \sin(ax+b)\ll 1,$$
$$-\infty<x<+\infty.$$

(5) $$\sin x=O(|x|),\ \sin x\ll|x|,\quad |x|\leqslant\frac{1}{2}.$$

(6) $$1-\cos x=O(x^2),\ 1-\cos x\ll x^2,\quad |x|\leqslant\frac{1}{2}.$$

设 $b\geqslant a>0$, 则有

(7) $$x^a=O(x^b),\quad x^a\ll x^b,\quad x\geqslant 1.$$

(8) $$x^b=O(x^a),\quad x^b\ll x^a,\quad 0\leqslant x<1.$$

(9) $$\frac{x}{(x-1)^2}=O(|x|),\ \frac{x}{(x-1)^2}\ll|x|,\quad |x|\leqslant\frac{1}{2}.$$

(10) $$\frac{x}{(x-1)^2}=O\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right),\ \frac{x}{(x-1)^2}\ll\frac{1}{(x-1)^2},$$
$$|x-1|\leqslant\frac{1}{2},\ x\neq 1.$$

(11) $$\frac{x}{(x-1)^2}=O\left(\frac{1}{|x|}\right),\ \frac{x}{(x-1)^2}\ll\frac{1}{|x|},$$
$$|x-1|\geqslant\frac{1}{2}.$$

最后三个例子表明,同一个函数在不同的集合上(实际上是在不同的点附近: $x=0$, $x=1$, $x=\infty$),它的数量阶是不同的.所以, 可以说这两个符号是用来刻划函数在一个点的邻近的变化的数量阶的(包括有界、无界、无穷小、无穷大).

对任意固定的正数 δ, 有

(12) $$x=O(x^2),\quad |x|\geqslant\delta,$$

因为可取 $A=1/\delta$. 但是

(13) $$x=O(x^2),\quad |x|\leqslant 1,$$

不成立，这是因为在 $x=0$ 处，x^2 是二阶无穷小，而 x 只是一阶无穷小．这例子也表明常数 A 和所考虑的定义域 $\mathscr{M}$ 是有关的．

有时候函数 $f(x)$ 可依赖于某一参数 λ(或几个参数)，这时常数 A 可能依赖于参数 λ，也可能不依赖于参数 λ．有时这一点必须明确指出．例如：式(4)中的例子，函数依赖于两个参数 a 和 b，但常数 A 可取作 1 而与参数无关．但若考虑 $\sin ax$，$-\infty<a<\infty$，我们有

$$\sin ax=O(|x|),\quad |x|\leqslant\frac{1}{2}, \tag{14}$$

这时可取 $A=|a|$，但不能取 A 为某一常数．这时，我们就说式(14)中的 O 常数与参数 a 有关．但若取 $\phi(x)=|ax|$，则

$$\sin ax=O(|ax|)$$

中的 O 常数就与参数 a 无关．

符号 O 和 $\ll$ 有两个简单有用的运算法则．设

$$f_1(x)=O(\phi_1(x)),\ f_1(x)\ll\phi_1(x),\ x\in\mathscr{M}, \tag{15}$$

及

$$f_2(x)=O(\phi_2(x)),\ f_2(x)\ll\phi_2(x),\ x\in\mathscr{M}, \tag{16}$$

则有

$$f_1(x)+f_2(x)=O(\phi_1(x)+\phi_2(x)),\ x\in\mathscr{M}, \tag{17}$$

$$f_1(x)+f_2(x)\ll\phi_1(x)+\phi_2(x),\ x\in\mathscr{M}, \tag{17$'$}$$

及

$$f_1(x)f_2(x)=O(\phi_1(x)\phi_2(x)),\ x\in\mathscr{M}, \tag{18}$$

$$f_1(x)f_2(x)\ll\phi_1(x)\phi_2(x),\ x\in\mathscr{M}. \tag{18$'$}$$

以上证明留给读者．在作这些运算时，不难发现符号“$\ll$”用起来要比符号“O”方便，因为这类似于不等式的运算法则．下面举例说明其应用．

由式(5)、(6)和(8)，利用法则(17)′，可得

(19) $$e^{ix}-1$$
$$=(\cos x-1)+i\sin x\ll|x|^2+|x|\ll|x|+|x|\ll|x|,$$
$$|x|\leqslant\frac{1}{2}.$$

由式(7)，利用法则(17)′，可得

(20) $$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$\ll|x|^n+|x|^{n-1}+\cdots+|x|+1$$
$$\ll|x|^n+|x|^n+\cdots+|x|^n=n|x|^n\ll|x|^n,$$
$$|x|\geqslant1.$$

这里的 $\ll$ 常数和系数 $a_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 及次数 n 有关。

由式(20)可得

$$|x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0|\geqslant|x|^m-A|x|^{m-1},$$
$$|x|\geqslant1,$$

其中常数 A 和系数 b_i 及次数 m 有关。所以当 $|x|$ 充分大时，即 $|x|\geqslant x_0=x_0(A)$ 时，有

$$|x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0|\geqslant\frac{1}{2}|x|^m,\quad |x|\geqslant x_0.$$

这样就证明了

(21) $$(x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0)^{-1}\ll|x|^{-m},$$
$$|x|\geqslant x_0.$$

由式(20)及(21)，利用法则(18)′，即得

(22) $$\frac{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}\ll|x|^{n-m},\ |x|\geqslant x_0.$$

这里我们可以取 x_0 和这两个多项式的系数和次数有关，而 $\ll$ 常数和这些参数无关。(为什么？)

在数论中，我们往往并不需要知道一个函数的精确性状，而只要知道它的数量阶是否不超过某一简单函数的数量阶。