

排列与组合

PERMUTATIONS AND COMBINATIONS

吴庚人 编著

$$P_n^r = C_n^r \cdot r!$$

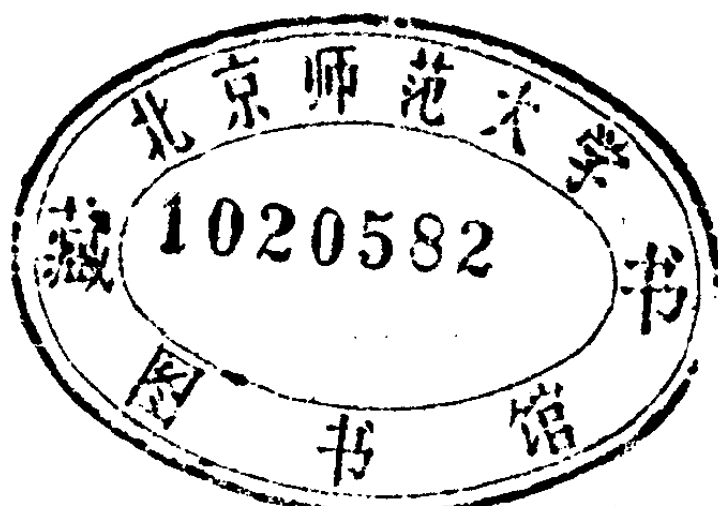
陕西科学技术出版社

排列与组合

魏庚人 编著

JY1153111

理科圖書



陕西科学技术出版社

内 容 提 要

本书在中学教材的基础上，补充了一些定理、公式及方法等。在证明、计算及解题方面，作了较详细的论述；还举了大量的例题和习题，分门别类，予以解决。既可开拓学生的思路，又可发展学生分析问题和解决问题的能力。本书可作为中学师生的参考用书。

· 排 列 与 组 合

魏 庚 人 编 著

陕 西 科 学 技 术 出 版 社 出 版

(西安北大街 131 号)

陕 西 省 经 济 科 学 出 版 社 发 行 国 营 五 二 三 厂 印 刷

开 本 787 × 1092 1/32 印 张 4 字 数 81,100

1982 年 7 月 第 1 版 1982 年 7 月 第 1 次 印 刷

印 数 1—20,000

统 一 书 号：7202 · 47 定 价：0.30 元

后 记

我在写这本书的过程中，参考并采用了《数学通报》、《武汉数学通讯》中有关文章的部分内容，同时也参阅了有关的外文书籍，值此向各著作者表示诚挚的谢意。

魏 庚 人

一九八一年九月

于陕西师范大学

出版说明

为了提高教学质量，根据教育部教学大纲的要求和现行教材，我们组织编写了一套中学数、理、化教学参考读物，陆续出版。

目 录

第一章 相异元素不许重复的排列

第一节	两个基本原理	(1)
1.1	加法原理	(1)
1.2	乘法原理	(1)
第二节	相异元素不许重复的排列	(2)
2.1	排列的定义	(2)
2.2	排列的公式	(3)
2.3	n 个相异元素取一个或多个的排列总数	(5)
第三节	相异元素不许重复的环形排列	(5)
3.1	环形排列的定义	(5)
3.2	环形排列的四个公式	(6)
第四节	附条件的全排列	(8)
4.1	满位排列	(8)
4.2	缺位排列	(10)
4.3	多位排列	(13)
习题一	(14)

第二章 相异元素不许重复的组合

第一节	相异元素不许重复的组合	(22)
1.1	组合的定义	(22)
1.2	组合的公式	(22)
1.3	组合的两个性质	(25)

1.4	n 个相异元素取一个或多个的组合总数	(25)
第二节	C_n^r 的最大值	(26)
第三节	附条件的组合	(29)
第四节	二项式定理	(32)
4.1	二项式定理	(32)
4.2	杨辉三角	(32)
4.3	例 题	(33)
习题二		(34)

第三章 相异元素允许重复的排列

第一节	相异元素允许重复的排列	(40)
1.1	n 个相异元素允许重复的 r 元排列公式	(40)
1.2	n 个相异元素取一个或多个的 重复排列总数	(41)
习题三		(41)

第四章 相异元素允许重复的组合

第一节	n 个相异元素允许重复的 r 元组合	(43)
第二节	四个定理	(45)
2.1	n 元 r 次齐次多项式标准式的项数	(45)
2.2	n 元 r 次多项式标准式的项数	(45)
2.3	n 元 r 次与 r 元 n 次两个多项式 标准式的项数关系	(46)
2.4	n 个相异元素取一个或多个的 重复组合总数	(46)
习题四		(46)

第五章 不尽相异元素的排列

第一节	n 个不尽相异元素的全排列	(48)
第二节	n 个不尽相异元素的 r 元排列	(49)
2.1	n 个不尽相异元素的 r 元排列	(49)
2.2	n 个不尽相异元素取一个或多个的 排列总数	(50)
2.3	$\alpha + \beta$ 个元素中, 有 α 个相同元素的 r 元排列	(51)
第三节	不尽相异元素的环形排列	(52)
第四节	多项式定理	(56)
4.1	多项式定理	(56)
4.2	$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots)^n$ 的展开式	(57)
习题五	(59)

第六章 不尽相异元素的组合

第一节	n 个不尽相异元素的 r 元组合	(62)
1.1	n 个不尽相异元素的 r 元组合数的求法	(62)
1.2	$\alpha + \beta$ 个元素中, 有 α 个相同元素的 r 元组合	(63)
1.3	n 个不尽相异元素取一个或多个的 组合总数	(65)
习题六	(66)

第七章 问题类解

第一节	排列组合的主要公式	(68)
-----	-----------------	------

1.1	线形排列	(68)
1.2	环形排列	(69)
1.3	组 合	(70)
第二节	数字问题	(71)
第三节	分组问题	(72)
第四节	位置问题	(76)
第五节	夫妻围桌的坐法问题	(79)
习题七		(82)
第六节	几何问题	(88)
6.1	用排列组合方法解决的几何问题	(88)
6.2	用递推法解决的几何问题	(94)
习题八		(97)

第八章 关于排列组合的恒等式

第一节	基本恒等式	(102)
第二节	关于组合的恒等式	(103)
第三节	关于排列的恒等式	(105)
第四节	关于重复组合的恒等式	(108)
第五节	排列与组合的母函数	(110)
5.1	组合的母函数	(110)
5.2	排列的母函数	(112)

第九章 方程选解

附录	阶乘表	(120)
----	-----	-------

后 记

第一章 相异元素不许重复的排列

第一节 两个基本原理

1.1 加法原理

设完成一件事有 r 种方式，第一种方式中有 n_1 个方法，第二种方式中有 n_2 个方法， \dots ，第 r 种方式中有 n_r 个方法。这些方法都不相同，只要用其中的任何一种方法，都可以把这件事完成，则完成这件事共有

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

种不同方法。

例 有不同的数学书 5 本，物理书 4 本，化学书 3 本，从中任取一本，共有 $5 + 4 + 3 = 12$ 种方法。

这条基本原理叫做加法原理。

1.2 乘法原理

设完成一事分 r 个步骤，第一步有 n_1 种方法，第二步有 n_2 种方法， \dots ，第 r 步有 n_r 种方法，各步骤连续完成，这件事才算完成，则完成这件事共有

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$$

种不同的方法。

例 甲村到乙村有 3 条路，乙村到丙村有 2 条路，丙村到丁村有 4 条路，则由甲村经乙村、丙村到丁村，有

$$3 \times 2 \times 4 = 24$$

条路。

这条基本原理叫做乘法原理。

一件事分几种方法独立完成，求总数用加法原理。一件事分几个步骤连续完成，求总数用乘法原理。这两条原理，是排列组合的基础。

第二节 相异元素不许重复的排列

2.1 排列的定义

从 n 个元素里，每次取 r 个元素，按顺序排成一列，叫做从 n 个元素里每次取出 r 个元素的排列。这样得出排列的总数叫做排列数，记为 P_r^n ，其中 $1 \leq r \leq n$ ，有些书中，把排列数的符号记为 ${}^n P_r$ ， ${}_n P_r$ ， P_r^n ， $P_{n,r}$ ， $(n)_r$ ， A_r^n 。

例 从 a, b, c, d 四个字母中，每次取出三个字母的排列为

$abc \quad abd \quad acb \quad acd \quad adb \quad adc$
 $bac \quad bad \quad bca \quad bcd \quad bda \quad bdc$
 $cab \quad cad \quad cba \quad cbd \quad cda \quad cdb$
 $dab \quad dac \quad dba \quad dbc \quad dca \quad dcb$

共 24 种，记为 $P_3^4 = 24$ 。

从 n 个元素里，每次取出 n 个元素的排列叫做全排列，全排列数用 P_n 表示。

例 张、王、李三个学生赛跑，其成绩可能为

张王李，张李王，王张李，王李张，李张王，李王张。
其中左中右的位置，表示第一二三名。共有 6 种排列法，记

为 $P_3 = 6$.

2.2 排列的公式

n 个相异元素不许重复的 r 元排列 ($1 \leq r \leq n$)

公式 $P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

证明1 作 n 个元素的 r 元排列时, 可以从 n 个元素中, 任择其一为第一个元素; 又在其余的 $n-1$ 个元素中, 任择其一为第二个元素; 又在其余的 $n-2$ 个元素中, 任择其一为第三个元素, 照这样取法, 一直到剩下的 $n-r+1$ 元素中, 任择其一为第 r 个元素, 按先后顺序排列起来, 就得出所有的 r 元排列. 根据乘法原理, 可知从 n 个元素里取 r 个元素的排列数为

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

证明2 设 n 个元素为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. 以 a_1 为首的有 P_{n-1}^{r-1} 种排列, 以 a_2 为首的也有 P_{n-1}^{r-1} 种排列, 一直到以 a_n 为首的也有 P_{n-1}^{r-1} 种排列. 根据加法原理, 可知把这些排列数加起来, 其和就是所求的排列数. 因此得出

$$P_n^r = nP_{n-1}^{r-1},$$

同理,

$$P_{n-1}^{r-1} = (n-1)P_{n-2}^{r-2},$$

$$P_{n-2}^{r-2} = (n-2)P_{n-3}^{r-3},$$

.....

$$P_{n-r+2}^2 = (n-r+2)P_{n-r+1}^1.$$

以上各式左右分别相乘, 并消去两边的相同因子, 得

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)P_{n-r+1}^1.$$

其中 P_{n-r+1}^1 显然等于 $n-r+1$.

$$\therefore P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

在公式中, 当 $r = n$ 时, 得全排列公式

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

全排列数用 $n!$ (或 \underline{n}) 来表示, 读为阶乘 n , 或 n 的阶乘.

把公式乘以并除以 $(n-r)!$, 公式变形为

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

<p>在这个公式中, 令 $r = n$,</p> <p>得 $n! = \frac{n!}{0!}$</p> <p>为了使这个式子有意义, 我们规定 $0! = 1$.</p>	<p>在这个公式中, 令 $r = 0$,</p> <p>得 $P_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$.</p> <p>我们规定 $P_n^0 = 1$.</p>
--	---

例1 设某铁路全线共有 20 个车站, 问全线共需客车票多少种?

解 共需票数即从 20 个元素中取 2 个元素的排列数, 如排列中甲乙、乙甲两种, 理解为由甲站到乙站与由乙站到甲站两种客票, 所以共有

$$P_{20}^2 = 20 \times 19 = 380$$

种客票.

例2 有红黄绿三种颜色的旗子各一面, 把它们插在十二点中三个点上, 有多少种不同的插法?

解 把三面旗子固定其顺序为红黄绿, 然后算出从十二个点中每次取三个点的排列数

$$P_{12}^3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320.$$

使每种排列与红黄绿三面旗子对应, 所以共有 1320 种插旗方法.

例3 父母子女 6 人并坐照相, 如果父母必须坐在中

间，有多少种坐法？

解 父母占中间有 $2! = 2$ 种方法。当父母已就坐后，子女有 $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ 种坐法。据乘法原理，共有

$$2 \times 24 = 48$$

种坐法。

2.3 n 个相异元素取一个或多个的排列总数

n 个相异元素取一个或多个的排列总数，只有未简化的公式：

$$P_n^1 + P_n^2 + P_n^3 + \cdots + P_n^n.$$

例 颜色不同的四面旗子，或单出或几面旗子纵列，可作出多少种不同的信号？

解 $P_4^1 + P_4^2 + P_4^3 + P_4^4 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64.$

共有 64 种不同信号。

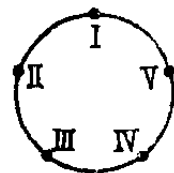
第三节 相异元素不许重复的环形排列

3.1 环形排列的定义

把 n 个相异元素围成一个圆形（或封闭形）的排列，叫做环形排列，以前讲的排列，叫做线形排列。

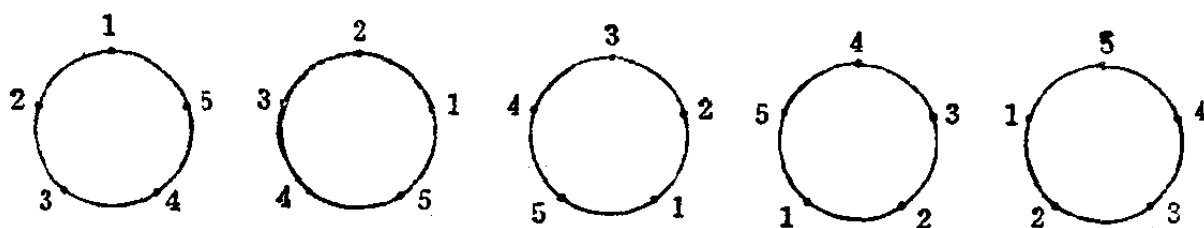
为了证明环形排列公式，先用两个具体例子，说明于下：

五个椅子，其编号为 I, II, III, IV, V. 把它们摆在一个圆周上。另有 5 人，其编号为 1, 2, 3, 4, 5. 则其排列数为 $5! = 120$. 其中有五个排列



$$12345, \quad 23451, \quad 34512, \quad 45123, \quad 51234.$$

把这五个排列的人，依次坐在五个椅子 I, II, III, IV, V 上，如图：



这五种环形排列，虽然每人每次坐的椅子不同，但彼此间的相互位置相同，左右邻也相同。在环形排列中，这五种只算作一种。

3.2 环形排列的四个公式

(1) n 个相异元素的环形全排列 ($n > 1$)

公式 $(n-1)!$

证明 1 n 个相异元素的 n 元线形排列数为 $n!$ ，使其每个排列顺序不变，围成环形。首尾相接，就得出 $n!$ 个环形排列。但这些排列中，虽然各元素的席位不相同，但元素间的顺序相同，且彼此间的相互位置关系也相同，这样的只能算作一种，因而 $n!$ 个排列中，有 n 个是算作一种的，所以环形排列数为

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

证明 2 因为一个环形排列的所有元素沿圆周依次移动席位， n 个元素间的相互位置并未改变，因此，先假定一个元素的位置固定不动，而后把其余的 $n-1$ 个元素进行排列，即得全部环形排列数，所以 n 个相异元素的 n 元环形排列数为

$$(n-1)!$$

例1 8人围圆桌而坐，有 $7! = 5040$ 种排列法。

例2 四个中国青年与四个朝鲜青年围圆桌而坐，为了增进友谊，同国人不许相邻，共有多少种坐法？

解 四个朝鲜青年先坐，有 $3!$ 种坐法，4个中国青年后坐，有 $4!$ 种坐法。据乘法原理，共有

$$3!4! = 6 \times 24 = 144$$

种坐法。

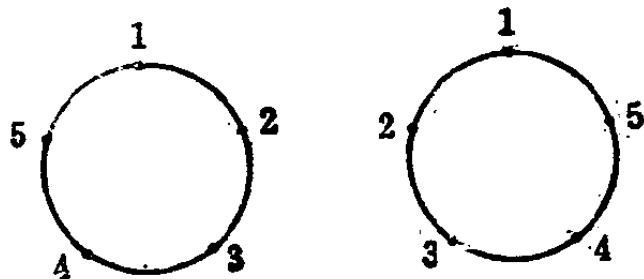
(2) 不论顺逆方向（见以下说明）时， n ($n > 1$) 个相异元素的 n 元环形排列有

公式 $\frac{1}{2}(n-1)!$

说明 依顺时针方向来说，左图为 12345，右图为 15432。

如果对“人”而论，就作为两种不同的环形排列。

但对“物”而论，认为二者相同，只能作为一种环形排列，因为把右图挂起



来，从背面看，右图就成了左图。

左图，顺时针方向的排列为 12345，右图，逆时针方向的排列亦为 12345，这两种只能作为一种。这种情况，称为不论顺逆方向的排列。

证明 因为不论顺逆方向，凡两个排列的元素顺序一致，而顺逆反向者，只能作为一种，所以环形排列数是 $(n-1)!$ 的一半，即

$$\frac{1}{2}(n-1)!$$

例 3 颜色不同的 7 个玻璃球，可串成 $\frac{6!}{2} = 360$ 种不同的项链。

(3) n 个相异元素的 r 元环形排列 ($1 < r \leq n$)

公式
$$\frac{P_n^r}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}$$

(4) 不论顺逆方向时， n 个相异元素的 r 元环形排列 ($1 < r \leq n$)

公式
$$\frac{P_n^r}{2r} = \frac{n!}{2r(n-r)!} \cdot$$

注 (1) 与 (3) 的公式，与顺逆方向有关，关于“人”的环形排列用它们。(2) 与 (4) 的公式，与顺逆方向无关，关于“物”的环形排列用它们。

第四节 附条件的全排列

有些附条件的全排列问题，可用行列式来解决，以下分三种情况来谈：

4.1 满位排列

n 个相异元素的全排列数为 $n!$ ， n 阶行列式展开后，其项数亦为 $n!$ ，我们利用这个关系，以解决 n 元全排列问题。

我们以四个元素 a_1, a_2, a_3, a_4 为例，其全排列数为 $4! = 24$ ，即

$$\begin{array}{lll} a_1 a_2 a_3 a_4 & a_1 a_2 a_4 a_3 & a_1 a_3 a_2 a_4 \cdots a_1 a_4 a_3 a_2 \\ a_2 a_1 a_3 a_4 & a_2 a_1 a_4 a_3 & a_2 a_3 a_1 a_4 \cdots a_2 a_4 a_3 a_1 \\ a_3 a_1 a_2 a_4 & a_3 a_1 a_4 a_2 & a_3 a_2 a_1 a_4 \cdots a_3 a_4 a_2 a_1 \end{array}$$