排列与组合

PERMUTATIONS AND COMBINATIONS

魏庚人 编著

$$P_n^r = C_n^r \cdot r!$$

陕西科学技术出版社

排列与组合

魏庚人 编著

陕西科学技术出版社

内容提要

本书在中学教材的基础上，补充了一些定理、公式及方法等。在证明、计算及解题方面，作了较详细的论述；还举了大量的例题和习题，分门别类，予以解决。既可开拓学生的思路，又可发展学生分析问题和解决问题的能力。本书可作为中学师生的参考用书。

排列与组合
魏 庚 人 编著
陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行 国营五二三厂印刷
开本787×1092 1/32 印张4 字数81,100
1982年7月第1版 1982年7月第1次印刷
印数1—20,000
统一书号：7202·47 定价：0.30元

后　记

我在写这本书的过程中，参考并采用了《数学通报》、《武汉数学通讯》中有关文章的部分内容，同时也参阅了有关的外文书籍，值此向各著作者表示诚挚的谢意。

魏庚人

一九八一年九月

于陕西师范大学

出版说明

为了提高教学质量，根据教育部教学大纲的要求和现行教材，我们组织编写了一套中学数、理、化教学参考读物，陆续出版。

目　　录

第一章　相异元素不许重复的排列

第二章　相异元素不许重复的组合

第三章　相异元素允许重复的排列

第四章　相异元素允许重复的组合

第五章 不尽相异元素的排列

第六章 不尽相异元素的组合

第七章 问 题 类 解

第一章　相异元素不许重复的排列

第一节　两个基本原理

1.1　加法原理

设完成一件事有 r 种方式，第一种方式中有 n_1 个方法，第二种方式中有 n_2 个方法，…，第 r 种方式中有 n_r 个方法。这些方法都不相同，只要用其中的任何一种方法，都可以把这件事完成，则完成这件事共有

$$n_1+n_2+\cdots+n_r$$

种不同方法。

例　有不同的数学书 5 本，物理书 4 本，化学书 3 本，从中任取一本，共有 $5+4+3=12$ 种方法。

这条基本原理叫做加法原理。

1.2　乘法原理

设完成一事分 r 个步骤，第一步有 n_1 种方法，第二步有 n_2 种方法，…，第 r 步有 n_r 种方法，各步骤连续完成，这件事才算完成，则完成这件事共有

$$n_1\ n_2\cdots n_r$$

种不同的方法。

例　甲村到乙村有 3 条路，乙村到丙村有 2 条路，丙村到丁村有 4 条路，则由甲村经乙村、丙村到丁村，有

$$3\times 2\times 4=24$$

条路。

这条基本原理叫做乘法原理。

一件事分几种方法独立完成，求总数用加法原理。一件事分几个步骤连续完成，求总数用乘法原理。这两条原理，是排列组合的基础。

第二节 相异元素不许重复的排列

2.1 排列的定义

从 n 个元素里，每次取 r 个元素，按顺序排成一列，叫做从 n 个元素里每次取出 r 个元素的排列。这样得出排列的总数叫做排列数，记为P_n^r，其中 $1\leqslant r\leqslant n$，有些书中，把排列数的符号记为 ${}^nP_r$，${}_nP_r$，P_r^n，$P_{n,r}$，$(n)_r$，A_n^r。

例 从 a，b，c，d 四个字母中，每次取出三个字母的排列为

$$\begin{array}{cccccc} abc & abd & acb & acd & adb & adc \\ bac & bad & bca & bcd & bda & bdc \\ cab & cad & cba & cbd & cda & cdb \\ dab & dac & dba & dbc & dca & dcb \end{array}$$

共 24 种，记为 $P_4^3=24$。

从 n 个元素里，每次取出 n 个元素的排列叫做全排列，全排列数用 P_n 表示。

例 张、王、李三个学生赛跑，其成绩可能为

张王李，张李王，王张李，王李张，李张王，李王张。其中左中右的位置，表示第一二三名。共有 6 种排列法，记

为 $P_3=6$。

2.2 排列的公式

n 个相异元素不许重复的 r 元排列（$1\leqslant r\leqslant n$）

公式 $P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$。

证明1 作 n 个元素的 r 元排列时，可以从 n 个元素中，任择其一为第一个元素；又在其余的 $n-1$ 个元素中，任择其一为第二个元素；又在其余的 $n-2$ 个元素中，任择其一为第三个元素，照这样取法，一直到剩下的 $n-r+1$ 元素中，任择其一为第 r 个元素，按先后顺序排列起来，就得出所有的 r 元排列. 根据乘法原理，可知从 n 个元素里取 r 个元素的排列数为

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

证明 2 设 n 个元素为 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n。以 a_1 为首的有 P_{n-1}^{r-1} 种排列，以 a_2 为首的也有 P_{n-1}^{r-1} 种排列，一直到以 a_n 为首的也有 P_{n-1}^{r-1} 种排列. 根据加法原理，可知把这些排列数加起来，其和就是所求的排列数。因此得出

$$P_n^r=nP_{n-1}^{r-1},$$

同理，

$$P_{n-1}^{r-1}=(n-1)P_{n-2}^{r-2},$$

$$P_{n-2}^{r-2}=(n-2)P_{n-3}^{r-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{n-r+2}^{2}=(n-r+2)P_{n-r+1}^{1}.$$

以上各式左右分别相乘，并消去两边的相同因子，得

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)P_{n-r+1}^{1}.$$

其中 P_{n-r+1}^{1} 显然等于 $n-r+1$。

$\therefore\quad P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$。

在公式中，当 $r=n$ 时，得全排列公式

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

全排列数用 $n!$（或 $\lfloor\underline{n}$）来表示，读为阶乘 n，或 n 的阶乘.

把公式乘以并除以 $(n-r)!$，公式变形为

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

在这个公式中，令 $r=n$，

得 $$n! = \frac{n!}{0!}$$

为了使这个式子有意义，

我们规定 $0! = 1$.

在这个公式中，令 $r=0$，

得 $$P_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1.$$

我们规定

$P_n^0 = 1$.

例1 设某铁路全线共有 20 个车站，问全线共需客车票多少种？

解 共需票数即从 20 个元素中取 2 个元素的排列数，如排列中甲乙、乙甲两种，理解为由甲站到乙站与由乙站到甲站两种客票，所以共有

$$P_{20}^2 = 20\times 19 = 380$$

种客票.

例 2 有红黄绿三种颜色的旗子各一面，把它们插在十二点中三个点上，有多少种不同的插法？

解 把三面旗子固定其顺序为红黄绿，然后算出从十二个点中每次取三个点的排列数

$$P_{12}^3 = 12\cdot 11\cdot 10 = 1320.$$

使每种排列与红黄绿三面旗子对应，所以共有 1320 种插旗方法.

例 3 父母子女 6 人并坐照相，如果父母必须坐在中

间，有多少种坐法？

解 父母占中间有 2! =2 种方法. 当父母已就坐后，子女有$P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 种坐法. 据乘法原理，共有

$$2\times24=48$$

种坐法.

2.3 n个相异元素取一个或多个的排列总数

n 个相异元素取一个或多个的排列总数，只有未简化的公式：

$$P_n^1+P_n^2+P_n^3+\cdots+P_n^n.$$

例 颜色不同的四面旗子，或单出或几面旗子纵列，可作出多少种不同的信号？

解 $P_4^1+P_4^2+P_4^3+P_4^4=4+12+24+24=64$.
共有 64 种不同信号.

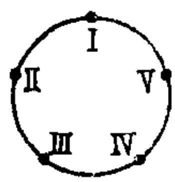
第三节 相异元素不许重复的环形排列

3.1 环形排列的定义

把 n 个相异元素围成一个圆形（或封闭形）的排列，叫做环形排列，以前讲的排列，叫做线形排列.

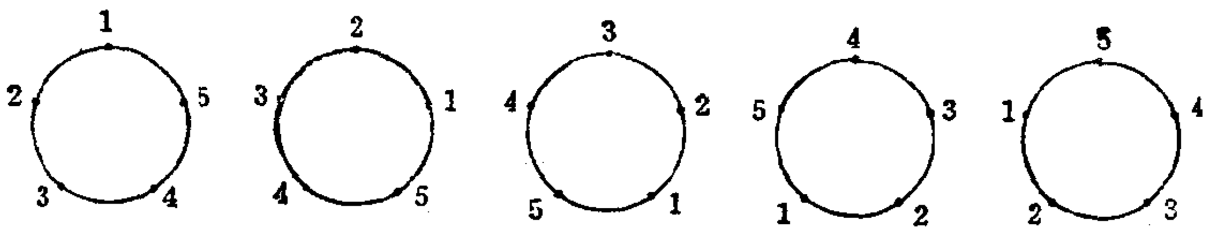
为了证明环形排列公式，先用两个具体例子，说明于下：

五个椅子，其编号为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ. 把它们摆在一个圆周上. 另有 5 人，其编号为 1，2，3，4，5. 则其排列数为 5! = 120. 其中有五个排列



12345, 23451, 34512, 45123, 51234.

把这五个排列的人，依次坐在五个椅子Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ上，如图：



这五种环形排列，虽然每人每次坐的椅子不同，但彼此间的相互位置相同，左右邻也相同。在环形排列中，这五种只算作一种。

3.2　环形排列的四个公式

（1）n 个相异元素的环形全排列（$n>1$）

公式　　$(n-1)!$

证明 1　n 个相异元素的 n 元线形排列数为 $n!$，使其每个排列顺序不变，围成环形。首尾相接，就得出 $n!$ 个环形排列。但这些排列中，虽然各元素的席位不相同，但元素间的顺序相同，且彼此间的相互位置关系也相同，这样的只能算作一种，因而 $n!$ 个排列中，有 n 个是算作一种的，所以环形排列数为

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

证明 2　因为一个环形排列的所有元素沿圆周依次移动席位，n 个元素间的相互位置并未改变，因此，先假定一个元素的位置固定不动，而后把其余的 $n-1$ 个元素进行排列，即得全部环形排列数，所以 n 个相异元素的 n 元环形排列数为

$$(n-1)!$$

例1　8人围圆桌而坐，有 $7! = 5040$ 种排列法。

例2　四个中国青年与四个朝鲜青年围圆桌而坐，为了增进友谊，同国人不许相邻，共有多少种坐法？

解　四个朝鲜青年先坐，有 $3!$ 种坐法，4个中国青年后坐，有 $4!$ 种坐法。据乘法原理，共有

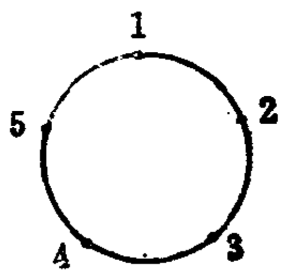
$$3!4! = 6 \times 24 = 144$$

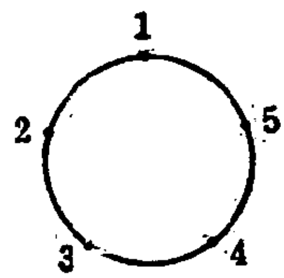
种坐法。

（2）不论顺逆方向（见以下说明）时，n（$n>1$）个相异元素的 n 元环形排列有

公式　$$\frac{1}{2}(n-1)!$$

说明　依顺时针方向来说，左图为12345，右图为15432。如果对"人"而论，就作为两种不同的环形排列。但对"物"而论，认为二者相同，只能作为一种环形排列，因为把右图挂起来，从背面看，右图就成了左图。





左图，顺时针方向的排列为12345，右图，逆时针方向的排列亦为12345，这两种只能作为一种。这种情况，称为不论顺逆方向的排列。

证明　因为不论顺逆方向，凡两个排列的元素顺序一致，而顺逆反向者，只能作为一种，所以环形排列数是 $(n-1)!$ 的一半，即

$$\frac{1}{2}(n-1)!$$

例 3 颜色不同的 7 个玻璃球，可串成$\frac{6!}{2}=360$种不同的项链。

（3）n 个相异元素的 r 元环形排列（$1<r\leqslant n$）

公式 $$\frac{P_n^r}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}$$

（4）不论顺逆方向时，n 个相异元素的 r 元环形排列（$1<r\leqslant n$）

公式 $$\frac{P_n^r}{2r}=\frac{n!}{2r(n-r)!}.$$

注 （1）与（3）的公式，与顺逆方向有关，关于"人"的环形排列用它们。（2）与（4）的公式，与顺逆方向无关，关于"物"的环形排列用它们。

第四节 附条件的全排列

有些附条件的全排列问题，可用行列式来解决，以下分三种情况来谈：

4.1 满位排列

n 个相异元素的全排列数为 $n!$，n 阶行列式展开后，其项数亦为 $n!$，我们利用这个关系，以解决 n 元全排列问题。

我们以四个元素 a_1，a_2，a_3，a_4 为例，其全排列数为 $4!=24$，即

$$\begin{array}{lll} a_1a_2a_3a_4 & a_1a_2a_4a_3 & a_1a_3a_2a_4\cdots a_1a_4a_3a_2 \\ a_2a_1a_3a_4 & a_2a_1a_4a_3 & a_2a_3a_1a_4\cdots a_2a_4a_3a_1 \\ a_3a_1a_2a_4 & a_3a_1a_4a_2 & a_3a_2a_1a_4\cdots a_3a_4a_2a_1 \end{array}$$