中国科学

SCIENTIA SINICA

数学专辑(I)

1979

中国科学

一九七九年　　数学专辑(I)

编　辑	中国科学院 《中国科学》编辑委员会 北京朝阳门内大街137号
出　版	科学出版社 北京朝阳门内大街137号
印刷装订	中国科学院印刷厂
发　行	新华书店北京发行所 各地新华书店经售

一九七九年十月出版

印数: 道 1—20,420　报 1—35,350

统一书号: 13031·1049
本社书号: 1471·13—1

定价: 道林 2.70 元　报纸 1.80 元

中国科学

一九七九年　　数学专辑(I)

目　录

广义数及其应用 (I)

王成堂
(西北大学)

摘　要

本文在文献 [2] 的基础上引进广义数系统. 定义了以广义数为基础的广义函数(本质不同于 L. Schwartz 的分布), 研究了勒贝格积分的推广. 将这理论应用于分布, 便得到对 δ 函数等的自然理解. 对广义数应用于量子场论中, 也作了一些尝试性的工作.

在量子力学发展过程中, Dirac 首先提出 δ 函数, 开始仅是理解为一种特定的符号[1]. 然而这类函数在近代物理及数学领域中, 却日愈显示出其根本性的重要意义. 1950 年法国学者 L. Schwartz 提出了分布论则是把这类函数理解为基本空间的线性泛函, 以此来奠定其数学基础. 众所周知, 基本空间是由具一定数学性质的普通实变函数组成. 因此 Schwartz 的观点是一种简接以实数作为基础的观点: 在这里函数关系被泛函所代替.

1964 年作者[2] 曾引用 "ω_μ-列" 解决拓扑空间的 ω_μ-距离化问题.

设 ω_μ 为规则初始序数, 并设

$$x = (x_0, x_1, \cdots, x_\alpha, \cdots)$$

及

$$y = (y_0, y_1, \cdots y_\alpha, \cdots), \tag{1}$$

其中 x_α, y_α 均为实数, $\alpha < \omega_\mu$. 当存在某个 $\alpha_0 < \omega_\mu$ 合于下列条件时,

$$\begin{cases} \beta < \alpha_0 \text{ 时}, \ x_\beta = y_\beta, \\ x_{\alpha_0} < y_{\alpha_0}, \end{cases} \tag{2}$$

即 $x < y$. 文献 [2] 中曾定义 x 与 y 间的加减运算关系.

如记 $I_{\alpha_0} = \{x; \beta \neq \alpha_0 \text{ 时 } x_\beta = 0\}$, 于是容易看出 I_{α_0} 是与普通实数同构的(对一切运算). 称 I_{α_0} 为第 α_0 数区, 于是当 $\alpha < \beta$ 时, α 数区的每个非零元素对 β 数区而言均是(正、负)无限大; β 数区的每个元素对 α 数区而言均是无限小. 因此, 这里便将无限分了等级: 同一数区的数均与普通实数同构, 不同数区的数则是"不可通约的".

一、广义数的基本概念

这里研究下述形状的列: $x = (\cdots, x_{-m}, \cdots, x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots)$, m 与 n 均为自然数, 且只有有限个 m, 使 $x_{-m} \neq 0$. 定义几种运算:

1) 序及加减运算(见文献 [2]);

本文 1977 年 7 月 15 日收到, 1978 年 4 月收到修改稿.

2) 设 c 为实数，则定义 $cx = (\cdots, cx_{-m}, \cdots, cx_0, \cdots, cx_n, \cdots)$; 引用符号($k$ 数区的单位元) $1_{(k)}$:

$$1_{(k)} = (\cdots, 0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } k \text{ 位}}}{1}, 0, \cdots), \tag{3}$$

其中 k 可正、可负也可以是数 0. 于是

$$x = \sum_k x_k \times 1_{(k)}. \tag{4}$$

3) 定义乘法为:

$$1_{(m)} \times 1_{(n)} = 1_{(m+n)} \tag{5}$$

及

$$x \cdot y = \sum_k \sum_{m+n=k} (x_m \cdot y_n) \times 1_{(k)} \tag{6}$$

(m, n 及 k 均是整数).

4) 除法定义. 设 x, y 及 z 在上述 3) 意义下有关系

$$y \cdot z = x, \tag{7}$$

即说 z 是 x 除以 y 的商，记作

$$z = \frac{x}{y}. \tag{8}$$

容易验证，在上述运算定义下，列 x 之集便是一个有序域，而有关实数的一些基本算术公式现在仍然成立.

广义数的定义. 定义了上述运算的列 x 之集便称之为广义数系统，x 称作广义数.

每一数区 I_n (n 是整数) 与实数具有相同构造，而不同数区间的关系则是无限大与无限小的关系. 广义数系统是一有序域.

二、广 义 函 数

不难给出以广义数为基础的函数定义，这完全与普通实变函数的定义方式相同，因此勿需重述. 这样的函数，本文即称之为广义函数.

寻常所观察到的量只是普通实数，这相当于广义数的一个数区，恒约定是第 0 数区的数. 因此，普通实变函数则是定义于 I_0 的某集合 E，且于 I_0 取值的广义函数. 下边讨论广义函数的连续性.

实际改变量. 设 $x = \sum_n x_n \times 1_{(n)}$ 及 $x + \Delta x = \sum_n (x + \Delta x)_n \times 1_{(n)}$, 又设 m 为一固定整数. 如果当 $n < m$ 时恒有 $(x + \Delta x)_n = x_n$, 即称 $\Delta_m(x) = (x + \Delta x)_m - x_m$ 为 x 的实际 (m) 改变量. 以后凡出现符号 $\Delta_n(x)$, $\Delta_n(y)$ 时，不加声明，均指这种意义下的实际改变量.

定义 1. 设 $y = f(x)$ 是定义于 E 的广义函数，$x_0 \in E$ 而 m 与 n 为整数. 如对任意的正实数 $\varepsilon > 0$ 均有相应的实数 $\delta > 0$, 使之合于条件: $|\Delta_m(x_0)| < \delta$ (及 $x \in E$) 时,

$$|\Delta_n(y_0)| < \varepsilon, \tag{9}$$

即称 $f(x)$ (关于 E) 于 x_0 是准 (m, n) 连续的，其中 x_0 是广义数.

若 $m = n = 0$, 即得普通连续性概念；而当 $n < m = 0$ 时，说明即使函数取值 (平常

所说的) ∞ 仍可考虑其某种连续性.

对于准 (m, n) 连续性有下列初等定理.

定理 1. 在点 x_0，如果 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 准 (m, n) 连续，则 $f(x)=f_1(x)\pm f_2(x)$ 也准 (m, n) 连续.

定理 2. 在点 x_0，如果 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 各是准 (m, n_1) 与准 (m, n_2) 连续，那么 $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ 便是准 (m, n) 连续的. 其中 $n=\min\{n_1+n_2, n_1+k_2, n_2+k_1\}$，而 k_i 是使 $\{f_i(x_0)\}_k\neq 0$ 的最小标号 $k=k_i$.

定理 3. 在点 x_0，设 $f(x)$ 准 (m, n) 连续，并设存在正实数 $\delta>0$，使当 $|\Delta_m(x)|<\delta$ 时，$\{f(x)\}_n\neq 0$，而 $\{f(x)\}_k=0\ (k<n)$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 便是准 $(m, -n)$ 连续的. $\{f(x)\}_n$ 的意义为：$f(x)=\sum\limits_n \{f(x)\}_n\times 1_{(n)}$.

定理的证明从略.

定义 2. 设 $y=f(x)$ 为定义于 E 的广义函数，$x_0\in E$. m，n，$\Delta_m(x)$ 与 $\Delta_n(y)$ 等符号意义同上. 如果存在实数 S 合于条件：对任意实数 $\varepsilon>0$ 有实数 $\delta>0$，使当 $|\Delta_m(x_0)|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{\Delta_n(y_0)}{\Delta_m(x_0)}-S\right|<\varepsilon. \tag{10}$$

即称 $S\times 1_{(n-m)}$ 为 $y=f(x)$ 在点 x_0 (相对于集 E) 的 (m, n) 导数.

关于 (m, n) 导数一些初等性质的讨论在此从略.

三、广义函数的积分

不失一般性，可假定以下的函数 $y=f(x)$ 是定义于整个广义数系统上的，因为讨论积分时可于函数定义域外补值 0. 记 $E=\{x; f(x)\neq 0\}$，我们分以下两种情况及若干步定义积分.

1. 设 $x\in E$ 时，$x_{-m}=0$ 恒成立，$m=0, 1, 2, \cdots$.

为叙述清楚起见，可将 $y=f(x)$ 明显表为：

$$y=(\cdots, y_{-m}, \cdots, y_0, \cdots, y_n, \cdots), \tag{11}$$

其中 $y_k=y_k(x)=y_k[(\cdots, x_{-m}, \cdots, x_0, \cdots, x_n, \cdots)]$.

第一步. 记 $H^{(0)}$ 为满足下列条件 $(P)_0$ 的全部实数 x_0 之集：

$(P)_0$：设 $x=(\cdots, 0, \cdots, 0, x_0, \cdots, x_n, \cdots)$ 及 $y=f(x)=(\cdots, y_{-m}, \cdots, y_0, \cdots, y_n, \cdots)$，则

$$\begin{aligned}&(1)_0\quad y_{-m}=0;\ m>0.\\ &(2)_0\quad y_0 \text{仅与} x_0 \text{有关}\ y_0=y_0(x_0).\end{aligned} \tag*{$(12)_0$}$$

由 $f(x)$ 定义实变函数 $f^{(0)}(x_0)$ 为：

$$f^{(0)}(x_0)=\begin{cases} y_0, & \text{当}\quad x_0\in H^{(0)},\\ \infty & \text{或不确定,其它.}\end{cases} \tag*{$(13)_0$}$$

如果 $f^{(0)}(x_0)$ 是勒贝格可积的(自然此时 $(13)_0$ 式右端第二种情况的 x_0 便是线性勒贝格测度为零的集合)，积分值记作 $a^{(0)}$. 继续进行下列第二步.

第二步. 固定 x_0，并首先按下列条件定义实数 x_1 的集合 $H^{(1)}$：对 $x_1 \in H^{(1)}$ 恒有性质 $(P)_1$：当 $x = (\cdots, 0, \cdots, 0, x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ 时，

$$\begin{aligned}&(1)_1\quad y_{-n} = 0,\ n > 1;\\&(2)_1\quad y_{-1} \text{ 仅与 } x_1 \text{ 有关 } y_{-1} = y_{-1}(x_1).\end{aligned}\tag{12$_1$}$$

自然其中 $H^{(1)}$ 等则是随 x_0 改变的.

定义实变函数 $f^{(1)}_{(x_0)}(x_1)$ 为：

$$f^{(1)}_{(x_0)}(x_1) = \begin{cases} y_{-1}, & \text{当}\quad x_1 \in H^{(1)},\\ \infty & \text{或不确定，其它.}\end{cases}\tag{13$_1$}$$

如果函数 $f^{(1)}_{(x_0)}(x_1)$ 是勒贝格可积的（自然由式 $(13)_1$ 右端第二种情况的 x_1 构成线勒贝格测度为零的集），积分值（显见依赖于 x_0）记作 $a^{(1)}(x_0)$. 如果和数 $\sum\limits_{x_0} a^{(1)}(x_0)$ 有意义（从而至多只有可列个非零项），记此和为 $a^{(1)}$.

一般说来，假设 $a^{(0)}, \cdots, a^{(n-1)}$ 均已求出为有限数.

第 n 步. 首先固定 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$，记 $H^{(n)}$ 为满足下列条件的实数 x_n 之集：$x_n \in H^{(n)}$，则下列条件成立

$(P)_n$：$x = (\cdots, 0, \cdots, 0, x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ 时，

$$\begin{aligned}&(1)_n\quad y_{-m} = 0,\ m > n;\\&(2)_n\quad y_{-n} \text{ 仅依赖于 } x_n \qquad y_{-n} = y_{-n}(x_n),\end{aligned}\tag{12$_n$}$$

其中 $H^{(n)}$ 自然与 $(x_0, \cdots, x_{n-1})$ 有关.

定义实变函数 $f^{(n)}_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}(x_n)$ 如下：

$$f^{(n)}_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}(x_n) = \begin{cases} y_{-n}, & \text{当}\quad x_n \in H^{(n)} \text{ 时；}\\ \infty & \text{或不定，其它.}\end{cases}\tag{13$_n$}$$

如果该实变函数勒贝格可积，积分值便记作为 $a^{(n)}(x_0, \cdots, x_{n-1})$；如和数 $\sum\limits_{(x_0,\cdots,x_{n-1})} a^{(n)}(x_0, \cdots, x_{n-1})$ 有意义，此和即以符号 $a^{(n)}$ 记之.

定义 3. 如上述 $a^{(0)}, \cdots, a^{(n)}, \cdots$ 均存在且有限而且级数 $\sum\limits_n a^{(n)}$ 收敛，和为 a：$a = \sum\limits_n a^{(n)}$，便说广义函数 $f(x)$ 是 (GNL) 可积的，即

$$(GNL)\ \int f(x)dx = a.\tag{14}$$

2. 在不满足上述条件 1 的情况下，首先将 E 作如下分解：

$$E = \sum_k E_k,\tag{15}$$

其中

$$E_k = \{x; x \in E,\ x_{-k} \neq 0 \text{ 且 } n > k \text{ 时，} x_{-n} = 0\}.\tag{16}$$

积分定义过程仍分下述几步完成

第一步. 按上述第 1 小节的办法，首先定义广义函数 $f^{(0)}$：

$$f^{(0)}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当}\quad x \in E_0 \text{ 时，}\\ 0, & \text{对其它情况.}\end{cases}\tag{17}$$

设在上述第 1 小节的意义之下 $f^{(0)}(x)$ 是 (GNL) 可积的，积分值为 a_0.

第二步．作集合 E_1^*:

$$E_1^* = E_1 \times 1_{(1)} = \{x;\, x = x' \times 1_{(1)},\ 其中\ x' \in E_1\}. \tag{18}$$

于是 $x \in E_1^*$ 时，$x_{-n} = 0$，其中 $n > 0$．定义广义函数 $f^{(1)}(x)$ 如下：

$$f^{(1)}(x) = \begin{cases} f(x \times 1_{(-1)}) \times 1_{(-1)}, & x \in E_1^*\ 时, \\ 0, & 其它. \end{cases} \tag{19}$$

这相当于，伴随于将 E_1 右移一位的 E_1^*，将原来函数 $f(x)$ 左移一位，于是得到 $f^{(1)}(x)$．设 $f^{(1)}(x)$ 在上述第 1 节的意义下（GNL）可积，积分值记作 a_1．

用与上面类似的定义方法，假设 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 均已求出，为有限数，则有下列

定义 4. 若级数 $\sum\limits_n a_n$ 收敛，和为 a，则说广义函数是（GNL）可积的，仍用下式表示

$$(GNL)\ \int f(x)dx = a. \tag{20}$$

这里的积分值是只取实数．而在量子力学中有更广义的积分概念，如下公式所表示的那样[1]

$$\int \delta(a-x)dx\delta(x-b) = \delta(a-b) \tag{21}$$

由 (21) 式可见，左端积分绝不应是实数．另外，从纯数学观点看，既然已将实数扩充为广义数，将积分值也推广至一般广义数乃是自然的事情．以下所述的（G）积分则是把某种发散积分用广义数严格表达出来．为此，只须对前述定义加以适当修改就行．我们不准备详细罗列积分定义的全部过程，而是只指出其应修改之处．

1）$(12)_n$ 式可改为 ($n = 0, 1, 2, \cdots$):

$$y_{-m} = y_{-m}(x_n),\ m > n; \tag{$(12)'_n$}$$

2）$(13)_n$ 式改为：

$$f^{(n)}_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}(x_n) = \begin{cases} \sum\limits_{s\geqslant 0} [y_{-(n+s)} \times 1_{(-s)}], & 当\ x_n \in H^{(n)},\ 而\ x_{n-1} \bar{\in} H^{(n-1)}\ 时, \\ \infty\ 或不确定, & 其它. \end{cases} \tag{$(13)'_n$}$$

3）"$f^{(n)}_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}(x_n)$ 是勒贝格可积的"应一律改作"对每个 $s \geqslant 0$，$y_{-(n+s)}(x_n)$ 是勒贝格可积的"．

4）将 3) 中关于 $y_{-(n+s)}(x_n)$ 的勒贝格积分值记作 $a^{(n)}_{-s}(x_0, \cdots, x_{n-1})$，并将"$a^{(n)}(x_0, \cdots, x_{n-1})$"改作"$\sum\limits_{s\geqslant 0} [a^{(n)}_{-s}(x_0, \cdots, x_{n-1}) \times 1_{(-s)}]$"．

5）将"$a^{(n)} = \sum\limits_{x_0,\cdots,x_{n-1}} a^{(n)}(x_0,\cdots, x_{n-1})$"换作"$a^{(n)}_{-s} = \sum\limits_{x_0,\cdots,x_{n-1}} a^{(n)}_{-s}(x_0, \cdots, x_{n-1})$; $s = 0, 1, 2, \cdots$"．

6）将定义 3 换作

定义 3′. 若对每个 $s \geqslant 0$，$a^{(0)}_{-s}, a^{(1)}_{-s}, \cdots, a^{(n)}_{-s}, \cdots$ 均存在且级数 $\sum\limits_n a^{(n)}_{-s}$ 收敛，和数记为 a_{-s} 时只有有限个 s 使 $a_{-s} \neq 0$，则说 $f(x)$ 是（G）可积的，积分值为：

$$(G)\int f(x)dx = \sum_{s\geqslant 0} [a_{-s} \times 1_{(-s)}]. \tag{$(14)'$}$$

7）定义 4 的修改过程与上述完全相类似(从略)．

显然有下列定理成立

定理 4. 若广义函数 $f(x)$ 是 (GNL) 可积的,则 $f(x)$ 必是 (G) 可积,而且有

$$(\mathrm{G})\int f(x)dx=(GNL)\int f(x)dx. \tag{22}$$

另一方面,还可利用连续延拓的想法得下述定义

定义 5. 设 F 为某一 (GNL) 可积函数族, 且设按某种方式定义了一种收敛关系: $f_n\to f$, 其中 $f_n\in F$. 于是可定义 $(GNL)_F$ 积分如下:

1) 当 $f\in F$, 则取

$$(GNL)_F\int f(x)dx=(GNL)\int f(x)dx. \tag{23}$$

2) 设 $f\bar{\in} F$, 且当 $f_n\to f(f_n\in F)$ 时下列极限恒存在且等于常数 a, 则定义

$$(GNL)_F\int f(x)dx=\lim_{n\to\infty}(GNL)\int f_n(x)dx=a. \tag{24}$$

四、对 Schwartz 分布的应用

1. 关于 Dirac 的 δ 函数

按照 Schwartz 的观点,把满足下列条件

$$(\mathrm{D}):\begin{cases}1)\ \delta(x)=0,\ x\neq 0\text{ 时},\\ 2)\ \delta(0)=\infty,\\ 3)\ \text{对任意具紧支集且无限可导的函数 } f(x) \text{ 有 } \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)\end{cases}$$

的 δ 函数 $\delta(x)$ 理解为基本空间的线性泛函,泛函 $\widetilde{K}$ 由下式定义

$$\widetilde{K}(f)=f(0). \tag{25}$$

因此,上述条件 (D) 中 3) 的积分号便仅具有象征性的意义了. 从本文以下讨论明显看出, 普通(一元)实变函数是其定义域及值域均限于 I_0 的函数;而 δ 函数则是以一般广义数系统为定义及取值范围的函数,从而使得对 δ 函数的理解更加自然而且清楚. 为此, 设 $f_0(x_0)$ (注意此处脚标“0”表示取实数的意思) 为普通(无限可导的)实变函数, 我们将下式定义的广义函数 $f(x)$ 称为由 $f_0(x_0)$ 诱导的广义函数:

$$\begin{aligned}f(x)=f_0(x_0)+f_0'(x_0)\times\left[\sum_{m=1}^{\infty}x_m\times 1_{(m)}\right]+\cdots+\frac{1}{n!}f_0^{(n)}(x_0)\\ \times\left[\sum_{m=1}^{\infty}x_m\times 1_{(m)}\right]^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_0^{(n)}(x_0)\left[\sum_{m=1}^{\infty}x_m\times 1_{(m)}\right]^n.\end{aligned} \tag{26}$$

于是下列定理成立

定理 5. $f_0(x_0)$ 及 $f(x)$ 的意义如上, 则存在 (并不唯一) 广义函数 $g(x)$, $g(x)$ 是 (GNL) 可积的,且有

$$(GNL)\int f(x)g(x)dx=f_0(x_0)(=f(x_0)). \tag{27}$$

证. 任取一个无限可导(甚至还可假定它是具紧支集)的实变函数 $g^*(x_0)$, 它满足条

件：$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x_0)dx_0 = 1$（注意：凡 x 带下脚标的，如 x_0，x_1 等等均表示实变数的意思，因此 x_0 与 x_1 等将是通用的实变数的符号而无原则区别．此点今后将不再说明）．定义广义函数如下

$$g(x) = \begin{cases} g^*(x_1) \times 1_{(-1)}, & \text{当} \quad x = (\cdots, 0, \cdots, 0, x_1, x_2, \cdots), \\ 0, & \text{对其它 } x. \end{cases} \tag{28}$$

于是 $f(x)g(x)$ 显然由下式给出

$$f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) g^*(x_1)\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \times 1_{(m)}\right)^n\right] \times 1_{(-1)}, \text{当} \\ \qquad x = (\cdots, 0, \cdots, 0, x_1, x_2, \cdots) \text{时}, \\ 0, \quad \text{对其它的 } x. \end{cases} \tag{29}$$

注意到 $\{f(x)\cdot g(x)\}_{-n} = 0$，$n > 1$；及 $x_{-n} = 0$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ 及关系 $\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x_1)\,dx_1 = 1$．于是

$$(GNL)\int f(x)g(x) = (L)\int f(0)g^*(x_1)dx_1 = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x_1)dx_1 = f(0), \tag{30}$$

从而定理得证．

由上定理看来，$g(x)$ 是满足条件 (D) 的 δ 函数，(D) 之 3) 中的积分即 (GNL) 积分．不仅如此，关于前述公式 (21) 我们有下列

定理 6. 设 $a = (\cdots, 0, \cdots, 0, a_0, a_1, \cdots)$ 及 $b = (\cdots, 0, \cdots, 0, b_0, b_1, \cdots)$，并设 $g(x)$ 与 $\bar{g}(x)$ 是定理 5 中的两个 δ 函数，分别由 $g^*(x_0)$ 与 $\bar{g}^*(x_0)$ 所决定（假定二者均具紧支集的），则由下式

$$\tilde{g}(a-b) = (G)\int g(a-x)g(x-b)dx \tag{31}$$

所确定的函数 $\tilde{g}(x)$ 仍是满足定理 5 的 δ 函数．

证．分作下列几步．

1) $a_0 \neq b_0$ 时，(31) 式右端为 0．因为由 g 与 $\bar{g}$ 定义知道，此时对任意 x，$g(a-x)$ 与 $\bar{g}(x-b)$ 中至少有一为零．

2) 由此可设 $a_0 = b_0 = c_0$，则

$$g(a-x)\bar{g}(x-b) = \begin{cases} g^*(a_1-x_1)\cdot \bar{g}^*(x_1-b_1) \times 1_{(-2)}, \quad \text{当} \\ \quad x = (\cdots, 0, \cdots, 0, c_0, x_1, \cdots), \\ 0, \quad \text{对其它的 } x. \end{cases} \tag{32}$$

于是，按 (G) 积分定义，即有

$$\begin{aligned}(G)\int g(a-x)\bar{g}(x-b)dx &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} g^*(a_1-x_1)\bar{g}^*(x_1-b_1)dx_1\right] \times 1_{(-1)} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} g^*(-y)\bar{g}^*(y+\overline{a_1-b_1})dy\right] \times 1_{(-1)}.\end{aligned} \tag{33}$$

由 (33) 式可见，最后积分显然是 (a_1-b_1) 的函数，因此[见 (31) 式] $\tilde{g}(a-b)$ 确实是依赖于 $a-b$ 的广义函数．将 (33) 式最后一项记作 $\tilde{g}^*(a_1-b_1) \times 1_{(-1)}$，由于假定了 $g^*(x_0)$ 及 $\bar{g}^*(x_0)$ 均具紧支集，于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}^*(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g^*(-z)\bar{g}^*(z+y)dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}^*(z+y)dy\right]g^*(-z)dz = 1. \quad (34)$$

最后,由 (33) 式可见 (31) 式所定义的 $\tilde{g}(x)$ 为:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases}\tilde{g}^*(x_1)\times 1_{(-1)}, & 当 \quad x = (\cdots, 0, \cdots, 0, x_1, x_2, \cdots),\\ 0, & 其它.\end{cases} \quad (35)$$

由(35)式及定理 5 及其证明可见 $\tilde{g}(x)$ 确实是 δ 函数(而且 $\tilde{g}^*(x_1)$ 具紧支集).

由定理 6 即得 (21) 式. 不仅如此,利用 (G) 积分还能证明习见的导数公式,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = -f'(0), \quad (36)$$

为此,有下述定理

定理 7. $f_0(x_0)$, $f(x)$ 及 $g(x)$ 的意义同于定理 5, $g^*(x_0)$ 且是具紧支集的. 于是

$$(G)\int f(x)g'(x)dx = -f_0'(x_0), \quad (37)$$

其中 $g'(x)$ 表示广义函数 $g(x)$ 的 $(1, -1)$ 导数.

证. 由定义 2 可见

$$g'(x) = \begin{cases}g^{*\prime}(x_1)\times 1_{(-2)}, & 当 \quad x = (\cdots, 0, \cdots, 0, x_1, x_2, \cdots),\\ 0, & 对其它\ x.\end{cases} \quad (38)$$

因此[由 (26) 式]有

$$f(x)g'(x) = \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)g^{*\prime}(x_1)\left(\sum_{m=1}^{\infty}x_m\times 1_{(m)}\right)^n\right]\times 1_{(-2)}, \ 当\\ \qquad x = (\cdots, 0, \cdots, 0, x_1, x_2, \cdots),\\ 0, \quad 其它.\end{cases} \quad (39)$$

因此可对 (37) 式左端的 (G) 积分计算如下:

1) 当 $m > 1$ 时, $a_{-m} = 0$, 显然.

2) 计算 a_{-1}:

$$a_{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)g^{*\prime}(x_1)dx_1 = f(0)\cdot g^*(x_1)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

3) 计算 a_0:

$$a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f'(0)g^{*\prime}(x_1)x_1dx_1 = f'(0)\int_{-\infty}^{\infty} g^{*\prime}(x_1)x_1dx_1 = -f_0'(0)(= -f'(0)). \quad (40)$$

4) 当 $m \geqslant 1$ 时, $a_m = 0$. 显然.

由 1)—4) 即得定理 7 的证明.

2. 对一般 Schwartz 分布的应用

引理 1. 设 $f_1(x)$, $\cdots$, $f_k(x)$ 为一列线性独立的普通连续实变函数, 则存在一列点(实数) $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$, $\cdots$(可简记作为 $\{x_k^{(n)}\}$, 其中 $k \leqslant n$, $n = 1, 2, \cdots$), 使对任意 n 均有

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1^{(n)}) & f_2(x_1^{(n)})\cdots f_n(x_1^{(n)})\\ f_1(x_2^{(n)}) & f_2(x_2^{(n)})\cdots f_n(x_2^{(n)})\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_1(x_n^{(n)}) & f_2(x_n^{(n)})\cdots f_n(x_n^{(n)})\end{vmatrix} \neq 0, \quad (41)$$

其中当 $n \neq n'$ 或 $k \neq k'$ 时，$x_k^{(n)} \neq x_{k'}^{(n')}$.

证．从略．

在基本空间内 $\varphi_n \to \varphi$ 的意义是：

1）存在一有限开区间，在其外部所有 φ_n 及 φ 均为零．

2）在这区间上，k 阶导数序列 $\varphi_n^{(k)}$ 一致收敛于 $\varphi^{(k)}(k=0, 1, 2, \cdots)$.

可以证明，基本空间是可分的(这里不证)．即存在于基本空间稠密的可列个元素(每一元素实际是一实变函数)所组成之集 F.

定理 8. 设 $\widetilde{K}$ 是定义于基本空间的分布，F 的意义如上．于是存在一广义函数 $K(x)$，使当 $f_0(x_0) \in F$ 时，

$$(GNL) \int K(x) f(x) dx = \widetilde{K}(f_0), \tag{42}$$

式中 $f(x)$ 与 $f_0(x_0)$ 的关系见(26)式．

证．为了与上节符号统一起见，F 中元素(均是实变函数)设为 $f_{01}(x_0), \cdots, f_{0n}(x_0), \cdots$，其中角标“0”仍表示“实变数”的意思．据引理知，存在一列互异实数 $\{x_{0m}^{(n)}\}$，$m \leqslant n$，$n = 1, 2, \cdots$，满足(40)式的条件．

1）由于 $f_{01}(x_{01}^{(1)}) \neq 0$，故必存在实数 $C_1^{(0)}$ 合于：

$$C_1^{(0)} \cdot f_{01}(x_{01}^{(1)}) = \widetilde{K}(f_{01}). \tag{43}$$

2)由于 $n=2$ 时(41)式成立，下列方程组便是可解的

$$\begin{cases} C_1^{(1)} \cdot f_{01}(x_{01}^{(2)}) + C_2^{(1)} \cdot f_{01}(x_{02}^{(2)}) = 0, \\ C_1^{(1)} \cdot f_{02}(x_{01}^{(2)}) + C_2^{(1)} \cdot f_{02}(x_{02}^{(2)}) = \widetilde{K}(f_{02}) - C_1^{(0)} \cdot f_{02}(x_{01}^{(1)}), \end{cases} \tag{44}$$

由(44)式可解出 $C_1^{(1)}$ 及 $C_2^{(1)}$.

3）在一般情况下，设 $C_k^{(m)}$ 已经依次求出，其中 $k \leqslant m+1$，$m \leqslant m_0$ (m_0 为某一定数)，那么由于 $n = m_0 + 1$ 时(41)式成立，可由下列方程组解出 $C_k^{(m_0+1)}$，$k \leqslant m_0 + 2$：

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m_0+2} C_k^{(m_0+1)} f_{0s}(x_{0k}^{(m_0+2)}) = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, m_0+1), \\ \sum_{k=1}^{m_0+2} C_k^{(m_0+1)} f_{0,m_0+2}(x_{0k}^{(m_0+2)}) = \widetilde{K}(f_{0,m_0+2}) - \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{k=1}^{m+1} f_{0,m_0+2}(x_k^{(m+1)}). \end{cases} \tag{45}$$

取一可导无限次且具紧支集的实变函数 $g^*(x_0)$，使之满足 $\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x_0) dx_0 = 1$．于是广义函数 $K(x)$ 便可由下式定出．

$$K(x) = \begin{cases} C_k^{(m)} g^*(x_{m+1}) \times 1_{[-(m+1)]},\ m \geqslant 0, \quad \text{当} \\ \quad x = (\cdots, 0, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } 0 \text{ 位}}}{x_k^{(m+1)}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } 1 \text{ 位}}}{x_k^{(m+1)}}, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } m \text{ 位}}}{x_k^{(m+1)}}, x_{m+1}, \cdots), \\ 0, \quad \text{对其它的 } x. \end{cases} \tag{46}$$

从(GNL)积分定义及(44)式可验证这样定义的广义函数 $K(x)$ 满足定理条件[(42)式]．从而定理证毕．

从上定理的 F 出发，并考虑函数族 $K \cdot F = \{K \cdot \varphi;\ \varphi \in F\}$ (为书写简单，这里把实变函数 φ 及其诱导的广义函数用同一符号 φ 表示)．可证下列定理(证明从略)．

定理 9. $K(x)$ 由定理 8 决定，则对基本空间的任一元 φ 下式成立。

$$(GNL)_{K\cdot F}\int K(x)\varphi(x)dx = \widetilde{K}(\varphi). \qquad (47)$$

而且 (47) 中的 F 还可取作 $\{p_{n,r}(x)\}$，其中 $p_{n,r}(x) = \tilde{p}_n(x)\cdot\exp\left\{-\dfrac{1}{(x^2-r^2)^2}\right\}$，$r$ 为(取一切的)有理数，而 $\tilde{p}_n(x)$ 在 $(-r, r)$ 上为有理系数多项式在 $(-r, r)$ 的外部恒等于 0。

附 注

1.本文写成后，发现 Laugwitz 曾对数的扩充作过不少工作。他于 1968 年引进广义幂级数概念[6]，但未以此为基础研究分布。本文基本意义在于用广义数来研究 δ 函数及 Schwartz 的一般分布。从代数结构讲广义数同构于广义幂级数的子域，但本文重点在第三及第四节。感谢李邦河同志指出这一点，康多寿同志也指出了一些有关文献[3-6]。

2.广义数应用到量子场论的讨论，见作者的文章"广义数及其应用 (II)"(西北大学自然科学学报，1979 年第 1 期)。粗略讲，将量子场论中对易关系 $\{a^*_\zeta, a_{\zeta'}\} = \{b^*_\zeta, b_{\zeta'}\} = \delta_{\zeta,\zeta'}$ 改作 $\{a^*_{\zeta'}, a_\zeta\} = \{b^*_\zeta, b_{\zeta'}\} = \delta_{\zeta,\zeta'}\times 1_{(1)}$，粒子数算符取作 $N^{(+)}_\zeta = a^*_\zeta a_\zeta \times 1_{(-1)}$，$N^{(-)} = b^*_\zeta b_\zeta\times 1_{(-1)}$，并取过渡方程$(x\times A^{(1)})\times 1_{(1)} = x + \delta_{(0)}$(式中 $A^{(1)}$ 是发散表达式，$\delta_{(0)}$ 是无限小量)，即能将 Dirac 关于真空情态的假定用广义数严格表达出来。作者且对一般重整化方案作出类似的尝试性考虑。根据上述考虑，说明 $E_{(真空)}$ 等等在实数范围内不是无限大，相反是无限小，从而完全附合于实验结果。

3.若把 $H^{(n)}$ 中性质 $(P)_n$ 的条件 2) 取消，则函数 $f^{(n)}_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}$ 将依赖于 $x_n, x_{n+1},\cdots$，此时可积条件若换作："对于固定的 $x_{n+1},\cdots$，设 $f^{(n)}_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}$ 是 L 可积的(以 x_n 为自变量的实函数)，且设其积分值并不随 $x_{n+1},\cdots$ 不同而异，该积分值仍记作 $a^{(n)}(x_0,\cdots,x_{n-1})$。" 这样得的积分定义就比原来的为广。关于 (G) 积分也可同样采取这一更广的定义方式，如果这样，则下列定理成立。

定理 10. 设 $f_0(x_0)$, $f(x)$, $g(x)$ 的意义同上，以 $g^{(n)}(x)$ 表 n 阶的 $(1,-1)$ 导数。于是当 $f^{(i)}(0) = 0$ $(i\leqslant n-1)$ 时：

$$(G)\int f(x)g^{(n)}(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(0). \qquad (48)$$

作者衷心感谢江泽涵、程民德、关肇直教授对本文的关心和指导。

参 考 文 献

[1] Dirac, P. A. M., 量子力学原理(中译本), 科学出版社, 1965.
[2] 王戍堂, ω_μ -可加的拓扑空间, 数学学报, **14** (1964), 5, 619—626.
王戍堂 (Wang Shu-Tang), Remarks on $\omega\mu$-additive Spaces, *Fund. Math.*, 55(1964), 101—112.
[3] Schmeiden, C. & Laugwitz, D., Eine Erweiterung der infinitesimalrechung, *Math. Zeits.*, **69** (1958), 1—39.
[4] Laugwitz, D., Anwendungen unendlichkleiner Zahlen, I, *J. für die reine und Angewandte Math.*, **207**(1961), 53—60.
[5] ——————, Anwendungen unendlichkleiner Zahlen, II, *ibid.*, **208**(1961), 22—34.
[6] ——————, Eine nichtarchimidische Erweiterung anordeneter Körper, *Math. Nachr.*, **37** (1968), 225—236.

GENERALIZED NUMBER SYSTEM AND ITS APPLICATIONS (I)

WANG SHUTANG (王戍堂)
(*Northwest University, Xi'an*)

ABSTRACT

This is a further study of the work published in [2]. A generalized number system is established. The generalized functions denote the functions with generalized number system as their domain and range space which are different essentially from the Schwartz distributions. For such functions we have defined (GNL) and (G) integrals which can be considered as the generalization of the Lebesgue integral for real functions. Dirac δ function can be naturally represented by our generalized functions. This representation is more straightforward than the Schwartz distribution theory. Moreover, each distribution can be described by a generalized function in a natural way.

In another paper entitled "Generalized number system and its applications (II)", (*Acta Natur. Sci.,* Nw. Univ., 1979, No. 1). We consider the applications of GNS (Generalized number system) to the quantum field theory. Using GNS, we can supply a tentative mathematical model to the renormalization theory, where the commute relation $\{a^*_{\zeta'}, a_\zeta\} = \delta_{\zeta,\zeta'}$ should be replaced by $\{a^*_{\zeta'}, a_\zeta\} = \delta_{\zeta,\zeta'} \times \mathbf{1}_{(1)}$.

单个守恒律解的大范围定性研究(I)

李邦河　王靖华
(中国科学院数学研究所)

摘　要

本文应用突变理论研究方程 $u_t+f(u)_x=0$ 的解的性质，得到了比文献[4]中的第二范畴集更大，但有相似的性质，且用具体的解析条件给出的 $\mathscr{S}(R)$ 中的集；给出了激波条数的精确的上界、下界；算出了 t 充分大时激波的段数和渐近线；特别是对激波的大范围分布得到了一个清晰的图象.

我们知道，Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}=0,\ f(u)\in C^\infty,\ f''(u)\geqslant\varepsilon>0 & (1)\\ u(x,0)=\varnothing(x), & (2)\end{cases}$$

即使初值 $\phi(x)$ 是光滑的，一般在 $H=R\times(0,\infty)$ 上也不存在古典意义下的解. 但只要 $\phi(x)$ 是有界可测的，在H上广义解就存在. 偏微分方程解的定性研究应该是其适定性问题解决后必不可少的课题，它在理论上和实际上的意义是不容置疑的. 可惜由于其对象的复杂性等原因至今成果甚少. 一些作者如 Hopf[1]，Lax[2]，Олейник[3] 在给出存在性定理的同时，对解进行了某些研究. 继他们之后，Schaeffer[4] 使用可微映象的奇点理论，证明了当 $\phi(x)$ 属于 $\mathscr{S}(R)$ 的某一第二范畴集合时，Cauchy 问题(1)，(2)的解是分片光滑的，且激波的条数在H上是有限的. 本文证明了当 $\phi(x)$ 属于一个比文献[4]中更大的第二范畴集合时，上述结果仍成立. 并且对 $\phi(x)$ 是否属于这一集合给出了具体的，易于判定的解析条件. 此外，我们还研究了在H上激波的条数，得到了精确的上界和下界；弄清了在某些条件下 $(x,t)\in H$ 作为激波形成点的充要条件；研究了当 t 充分大时，激波的段数和它的渐近线. 并且对解的大范围分布得到了一个比较清晰的拓扑图象，即H被 $t=0$ 出发的某些特征线分成互不影响的区域，在每个区域内激波形成一个连通分支，并且每个连通分支都是一个道路连通分支，连通分支的个数由 $\phi(x)$ 完全决定而与 $f(u)$ 无关.

对于解的局部结构的研究，本文作者应用 Riemann-Hugoniot 突变到更加复杂的情况；同时通过考察函数

$$F(x,t,u)=t(ua(u)-f(u))+\Phi(x-a(u)t),$$
$$a(u)=f'(u),\Phi(y)=\int_0^y\phi(x)dx \tag{3}$$

在方程(1)的整段特征线上，取极值的情况，找到了对该守恒律解的大范围定性研究较为有效的方法. 在使用 Thom 突变理论的范围内，本文研究的初值类在某种意义上是最广泛的.

本文 1977 年 7 月 29 日收到.

一、解的局部结构

Schaeffer[4] 研究了 $(x,t)\in H$，使得 $F(x,t,u)$ 分别有不大于三个正常最小点或一个退化最小点时，(x,t) 附近解的结构．本节分析了当 $(x,t)\in H$，使得 $F(x,t,u)$ 分别有 k 个正常最小点或两个退化最小点时，(x,t) 附近解的结构（引理 3, 5）．利用这两个引理中使用的方法，可以得到当 $(x,t)\in H$ 使得 $F(x,t,u)$ 有 k 个正常最小点和 l 个退化最小点时 (x,t) 附近解的结构，其中 k 与 l 是任意自然数．

引理 1. 若 $\phi(x)$ 是有界 C^∞ 函数且 $L=\varnothing$，其中 $L=\{x: (a\circ\phi(x))'<0,\ (a\circ\phi(x))''=0,\ (a\circ\phi(x))'''=0,\ x\in R\}$，则对 $H=R\times(0,\infty)$ 上任一紧集 B，$\{(u,x,t): F_u(x,t,u)=F_{uu}(x,t,u)=F_{uuu}(x,t,u)=0,\ F_{uuuu}(x,t,u)>0,\ (x,t)\in B\}$ 是有限集．

证．若存在 (x,t,u)，使

$$\begin{cases}F_u(x,t,u)=0,\ F_{uu}(x,t,u)=0,\\ F_{uuu}(x,t,u)=0,\ F_{uuuu}(x,t,u)>0,\end{cases}\tag{4}$$

则对 $x_0=x-a(u)t$，有

$$\begin{cases}a\circ\phi(x_0)=0,\ (a\circ\phi(x_0))'=-\dfrac{1}{t},\\ (a\circ\phi(x_0))''=0,\ (a\circ\phi(x_0))'''>0.\end{cases}\tag{5}$$

反之，若存在 x_0，使

$$\begin{cases}(a\circ\phi(x_0))'<0,\ (a\circ\phi(x_0))''=0,\\ (a\circ\phi(x_0))'''>0,\end{cases}\tag{6}$$

则对

$$u=\phi(x_0),\ t=-((a\circ\phi(x_0))')^{-1},\ x=x_0-(a\circ\phi(x_0))\cdot((a\circ\phi(x_0))')^{-1}\tag{7}$$

有 (4) 式成立．即 (7) 式确立了使 (4) 式成立的 $(x,t,u)\in H\times R$ 与使 (6) 式成立的 $x_0\in R$ 之间的 1-1 对应关系．

若对某紧集 B，$\{(x_\lambda,t_\lambda,u_\lambda),\lambda\in\Lambda: F_u(x_\lambda,t_\lambda,u_\lambda)=F_{uu}(x_\lambda,t_\lambda,u_\lambda)=F_{uuu}(x_\lambda,t_\lambda,u_\lambda)=0,\ F_{uuuu}(x_\lambda,t_\lambda,u_\lambda)>0,\ (x_\lambda,t_\lambda)\in B\}$ 是无限集，则对应的 $\{x_{0\lambda}=x_\lambda-a(u_\lambda)t_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$ 必为 R 上某一紧集上的无限集．该无限集的聚点 x^* 上必有 $(a\circ\phi(x^*))'<0$，$(a\circ\phi(x^*))''=0$，$(a\circ\phi(x^*))'''=0$，即 $x^*\in L$，与 $L=\varnothing$ 的假设矛盾．

注． 从引理的证明中可以看出，$L=\varnothing$ 与方程组

$$\begin{cases}F_u(x,t,u)=0\\ F_{uu}(x,t,u)=0\\ F_{uuu}(x,t,u)=0\\ F_{uuuu}(x,t,u)=0\end{cases}$$

在 $H\times R$ 上无解是等价的．

引理 2. 若 $\phi(x)$ 是有界 C^∞ 函数且 $L=\varnothing$，则对任意 $(x,t)\in H$，使 $F(x,t,u)$ 取相对极小值的 u 的数目有限．若 $M=\{x_0: (a\circ\phi(x_0))'<0,\ (a\circ\phi(x_0))''=0,\ (a\circ\phi(x_0))'''>0,\ x_0\in R\}$，$M$ 的点数为 m，则对任意 $(x,t)\in H$，使 $F(x,t,u)$ 取相对极小值的 u 的数目 $\leqslant m+1$．

证．我们称使 $F(x,t,u)$ 取相对极（最）小的值 u 或函数 $u(x,t)$ 为 $F(x,t,u)$ 的相

对极(最)小点或函数.由于当 $u\to\pm\infty$ 时,有 $F(x,t,u)\to+\infty$,故 $F(x,t,u)$ 的相对极小点和最小点都是

$$F_u(x,t,u)=0 \tag{8}$$

的解.

当 $F(x,t,u)$ 的相对极小点是离散集合时,若 $u_1<u_3$ 是 F 的两相对极小点,则存在 u_2 满足 $u_1<u_2<u_3$,使 F 在 u_2 取相对极大. 由(7)式知,$u_i=\phi(x-a(u_i)t)$,$i=1,2,3$. 利用 f 的凸性知,$x_{01}=x-a(u_1)t>x_{02}=x-a(u_2)t>x_{03}=x-a(u_3)t$. 由(5)式知,$1+t(a\circ\phi(x_{0i}))'\geqslant0, i=1,3$,$1+t(a\circ\phi(x_{02}))'\leqslant0$. 在 (x_{03},x_{01}) 上至少存在一点 x_0 使 $(a\circ\phi(x_0))'<\dfrac{-1}{t}$,$(a\circ\phi(x_0))''=0$,$(a\circ\phi(x_0))'''>0$. 若 $F(x,t,u)$ 的相对极小点数目无限,上述性质的 x_0 在 $t=0$ 的直线上的某紧集上必无限,其聚点必属于 L,与 $L=\varnothing$ 矛盾. 当M的点数为m时,易知 $F(x,t,u)$ 的相对极小点数目 $\leqslant m+1$.

若 $F(x,t,u)$ 的相对极小点不是离散的,则由于相对极小点集是闭集,必存在区间 $[u_a,u_b]$,$(u_a<u_b)$,使任何 $u\in[u_a,u_b]$ 都是 $F(x,t,u)$ 的极对极小点,则 $\{x_0:x_0=x-a(u)t,u\in(u_a,u_b)\}\subset L$,与 $L=\varnothing$ 矛盾,引理 2 得证.

引理 3. 若 $\phi(x)$ 是有界 C^∞ 函数,存在 $u_1<u_2<\cdots u_k$,使 $F(x_0,t_0,u)$ 在且仅在 $u_i(i=1,2,\cdots k)$ 取最小值,且 $\left.\dfrac{\partial^2F(x_0,t_0,u)}{\partial u^2}\right|_{u=u_i}>0\ (i=1,2,\cdots k)$,则存在 (x_0,t_0) 的一邻域 Q,使有一段由 (x_0,t_0) 发出的激波 $x=x_{k,1}(t)$;有 $(k-1)$ 段中止于 (x_0,t_0) 的激波 $x=x_{i+1,i}(t)(i=1,\cdots k-1)$. $F(x,t,u)$ 的最小函数 $u(x,t)$ 在 $Q\Big\backslash\left(\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k-1}x_{i+1,i}(t)\right)\cup x_{k,1}(t)\cup(x_0,t_0)\right)$ 上是光滑的.

证. 由 $F_{uu}(x_0,t_0,u)|_{u=u_i}>0$,利用隐函数定理知存在唯一的一组(8)的解 $u_i(x,t)\in Q_i(u_i$ 的邻域$)$,定义在 (x_0,t_0) 的某邻域 $\tilde{Q}$ 内.

由于(8)式仅在 $J=\{u,|u|\leqslant M\}$ 上有解,其中 $M=\sup\limits_y|\phi(y)|$,故存在 $\delta>0$,使

$$F(x_0,t_0,u)\geqslant F(x_0,t_0,u_i)+\delta,\quad i=1,\cdots k,\ u\in J\backslash(Q_1\cup\cdots\cup Q_k).$$

从 $F(x,t,u)$ 在 $\tilde{Q}\times(J\backslash(Q_1\cup\cdots\cup Q_k))$ 上连续,知存在 (x_0,t_0) 的邻域 Q,使 $F(x,t,u)\geqslant F(x,t,u_i(x,t))+\dfrac{\delta}{2}$,$i=1,\cdots,k$,$u\in J\backslash(Q_1\cup\cdots\cup Q_k)$,$(x,t)\in Q$.故当 $(x,t)\in Q$ 时,$F(x,t,u)$ 仅在 $u_1(x,t),\cdots,u_k(x,t)$ 中某几个上取最小.

若 $F(x,t,u)$ 仅在某一 $u_i(x,t)$ 取最小,则由文献[4]的引理 1.1 知,存在 (x,t) 的邻域 U,使 $F(x,t,u)$ 在 U 内仅以 $u_i(x,t)$ 为最小函数,且 $u_i(x,t)$ 是光滑的.

若 $F(x,t,u)$ 仅在某两个 $u_i(x,t)$,$u_j(x,t)$ 取最小,即

$$\psi_{i,j}(x,t)=F(x,t,u_i(x,t))-F(x,t,u_j(x,t))=0, \tag{9}$$

$$\psi_{lj}(x,t)>0,\qquad l\neq i,\ l\neq j. \tag{10}$$

利用

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_{i,j}(x,t)|_{(x_0,t_0)}=u_i-u_j\neq0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_{i,j}(x,t)=u_i(x,t)-u_j(x,t),\ \frac{\partial}{\partial t}\psi_{i,j}(x,t)=-f(u_i(x,t))+f(u_j(x,t)), \tag{12}$$