高等学校试用教材

高等数学

（修 订 版）

上 册

路见可 熊全淹 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高 等 数 学

（修 订 版）

上 册

路见可 熊全淹 编

人民教育出版社

本书是为高等学校理科化学专业编写的"高等数学"试用教材，全书分上、下册出版．上册包括解析几何与一元函数的微积分学．下册包括无穷级数，多元函数的微积分学与微分方程等．书中叙述比较详细，便于学生自学复习，也编入一部分可供选择学习的材料，以满足不同学生的需要．为了使师生方便，书中并附有一些基本习题．

本书可供综合大学、师范学院化学专业作为试用教材，也可供工科院校有关专业使用．

高等学校试用教材

高 等 数 学

（修订版）

上 册

路见可 熊全淹 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 14 字数 335,000

1965 年 6 月第 1 版 1980 年 2 月第 2 版

1980 年 12月第 2 次印刷

印数 4,001—9,000

书号 13012·0439 定价 1.05 元

序　　言

本书最初是在 1956—1957 年根据综合大学化学专业的数学教学需要编写的，中间修改过几次，最后以 240 学时为标准改编而成.

这里编写的材料比教学要求多一些，这些多出的部分都用“小字”排印，而“大字”部分都是按教学要求编写的，自成系统．这样，我们认为既便于教学，又便于根据学生特点，因材施教．我们还编进了一些最基本的习题，在教学中可以根据具体情况，适当增减.

关于极限中的“ε-N”，“ε-δ”方法，虽然不必要求学生熟练运用，但为了使学生较清楚、正确地理解极限、连续概念，仍把这一部分教材写得比较详细．另外，我们把向量代数放在空间解析几何后面，在空间解析几何中不引用向量，我们认为这样做学生较易接受．必要时也可考虑删去向量代数这一章.

在编写时希望做到便于学生自学和复习，因此许多地方写得较详细，这样，篇幅就显得大一些.

在教学中，各章的顺序可以根据需要进行更动，譬如空间解析几何，向量代数可以放到多元函数的微分学之前，又如级数与函数展开可以放到重积分之后等等.

考虑到工科各专业的“高等数学”教学内容与化学专业的基本相同，所以我们认为本书也可作为这些专业的教材或参考书，在编写时我们已注意到这点.

由于我们的水平限制，错误和不妥之处在所难免，特别是我们对于“少而精”的精神体会不深，对教材的处理也不一定恰当．希望广大师生和读者惠予指正.

编　者

1965 年 元 月

再 版 序 言

本书出版后得到各方支持，并提出不少改进意见，根据广大师生意见，我们作了一次修订．改写了某些段落，在个别地方增补了一些内容，也添加了一些例题，对于习题答案中的错误也作了修订，使更适于教学或自学．此外在下册将增添一章“场论简介”，其他内容基本不变．这样，本书就可作为理科化学专业的试用教材，也可作为工科各专业的试用教材或参考书．

我们热切希望广大使用本书的同志，对本书进一步提出意见，供今后改进．

编 者

1979 年 元 月

目　录

第一篇　解析几何

第二篇　数学分析

第一篇 解析几何

第一章 行 列 式

§1.1 行列式的定义

解析几何是要运用代数方法来研究几何问题，因此在学习解析几何之前，我们首先要初步熟悉一些代数知识．这章我们简要地介绍中学里曾经见过的一种代数工具——行列式，它不仅在学习解析几何及数学的其他部门时要用到，而且在力学及其他科学分支中也是常用的一种工具．

首先我们来求解二元一次方程组

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=k_1, \\ a_2x+b_2y=k_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

为了消去 y，可在前一式中遍乘 b_2，后一式中遍乘 b_1，然后相减，即得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=k_1b_2-k_2b_1.$$

同样，消去 x，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1k_2-a_2k_1.$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，则得

$$x=\frac{k_1b_2-k_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{a_1k_2-a_2k_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{2}$$

为了便于记忆这结果，我们采用以下的记号：设 a,b,c,d 是任意四个数，把它们排成正方形，规定

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc. \tag{3}$$

这式左边的记号，称作**二阶行列式**．a，b，c，d 叫做它的**元**，横排叫做**行**，纵排叫做**列**．因此行列式就是把它的元按照一定方式运算(左上、右下二元乘积与左下、右上二元乘积的差)的结果，这结果我们叫做**行列式的值**，所以行列式的值也是一个数．

这样，方程组(1)的解(2)，就可用行列式记作

$$x=\frac{\begin{vmatrix}k_1 & b_1\\ k_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & k_1\\ a_2 & k_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}. \tag{4}$$

当然这里已假定$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$．它是 x, y 的分母中公共的行列式，我们称它为方程组 (1) 的**系数行列式**．x 的分子行列式是由系数行列式中把相应于 x 系数的列 (第一列) 改作方程组(1)中右边常数列 k_1, k_2 的结果，y 的分子行列式则是把相应于 y 的系数的列(第二列)改作常数列 k_1，k_2 的结果．这样，方程组(1)的解便很容易记忆了．

例 1. 求解方程组

$$\left.\begin{aligned}3x-5y&=4,\\ x+2y&=-3.\end{aligned}\right\}$$

解 由公式(4)，得

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & -5\\ -3 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -5\\ 1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{8-15}{6+5}=-\frac{7}{11},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}}{11}=\frac{-9-4}{11}=-\frac{13}{11}.$$

现在我们来求解三元一次方程组

$$
\left.\begin{aligned}
a_1x+b_1y+c_1z=k_1,\\
a_2x+b_2y+c_2z=k_2,\\
a_3x+b_3y+c_3z=k_3.
\end{aligned}\right\} \tag{5}
$$

为了解出 x，我们可以这样来做：先在后两方程中，暂时把 x 当作已知，求出 y,z，然后代入第一式中，最后解出 x. 把后面两式写成

$$
\begin{aligned}
b_2y+c_2z=k_2-a_2x,\\
b_3y+c_3z=k_3-a_3x.
\end{aligned}
$$

由(4)式，得

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y &= \begin{vmatrix} k_2-a_2x & c_2 \\ k_3-a_3x & c_3 \end{vmatrix} = (k_2-a_2x)c_3-(k_3-a_3x)c_2 \\
&= (k_2c_3-k_3c_2)-(a_2c_3-a_3c_2)x \\
&= \begin{vmatrix} k_2 & c_2 \\ k_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z &= \begin{vmatrix} b_2 & k_2-a_2x \\ b_3 & k_3-a_3x \end{vmatrix} = b_2(k_3-a_3x)-b_3(k_2-a_2x) \\
&= -(k_2b_3-k_3b_2)+(a_2b_3-a_3b_2)x \\
&= -\begin{vmatrix} k_2 & b_2 \\ k_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x.
\end{aligned}
$$

(这里我们宁可不把$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$移作右边的分母，因为它不一定异于零.）在(5)的第一式中，遍乘$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，并把上面二式代入，整理后，得

$$
\begin{aligned}
&\left(a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)x \\
&= k_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} k_2 & c_2 \\ k_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} k_2 & b_2 \\ k_3 & b_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

这里 x 的系数是由九个数 $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$ 按照一定法则计算出来的结果. 与前面一样，我们用**三阶行列式**来记这个结果:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

或者，把右边的二阶行列式都计算出来，就得到三阶行列式的计算方法如下:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2. \quad (8)$$

注意到(6)式右边与左边 x 的系数形式一样，只是把其中的 a_1, a_2, a_3 分别换成了 k_1, k_2, k_3. 因此，用行列式的记法，(6)式就可写成

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

这里左边的行列式是由方程组(5)的系数组成的，叫做(5)的系数行列式. 如果它不等于零，最后便求得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

显然，分子行列式就是系数行列式中把相应于 x 系数的第一列 a_1, a_2, a_3 换作右边常数列 k_1, k_2, k_3 的结果.

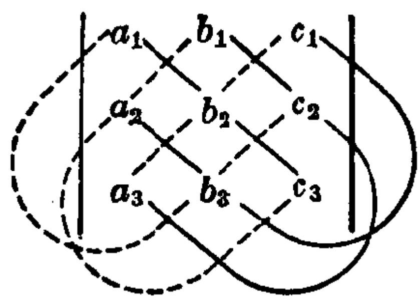
同样可算出 y, z. 我们不再具体运算了，只把结果(连同前式)写在下面:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}k_1 & b_1 & c_1\\ k_2 & b_2 & c_2\\ k_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & k_1 & c_1\\ a_2 & k_2 & c_2\\ a_3 & k_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\ z=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & k_1\\ a_2 & b_2 & k_2\\ a_3 & b_3 & k_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}. \quad (9)$$

这里右边的分母行列式都是(5)的系数行列式，而分子行列式就是把相应于这一未知数系数的列改为常数列 k_1, k_2, k_3.

这样，解三元一次方程组的问题就成为计算一些三阶行列式的问题了.

三阶行列式的值可以根据公式(8)来计算，当然也可用(7)式来计算——(7)式常常称作把三阶行列式按第一行展开的公式. 公式(8)可以这样来记忆：在右图中，把在实线上的三个元连乘，然后三项相加；再把在虚线上的三个元连乘，相加；最后把两个结果相减即得. 读者不妨与(8)式核对，结果的确一致.



例 2.

$$\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0\\ b_1 & b_2 & 0\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3,\qquad \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & 0\\ c_1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-a_3b_2c_1.$$

例 3.

$$\begin{vmatrix}a & 1 & a\\ -1 & a & 1\\ a & -1 & a\end{vmatrix}=a^3+(-1)^2a+a\cdot 1^2-a^3-1\cdot(-1)\cdot a-a(-1)\cdot 1$$

$$=a^3+a+a-a^3+a+a=4a.$$

例 4. 解联立方程组

$$\left.\begin{array}{l}2x-y+z=2,\\3x+2y+2z=-2,\\x-2y+z=1.\end{array}\right\}$$

解

$$\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&2\\1&-2&1\end{vmatrix}=4-6-2-2+8+3=5,$$

因此

$$x=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2&-1&1\\-2&2&2\\1&-2&1\end{vmatrix}=\frac{1}{5}(4+4-2-2+8-2)=2,$$

$$y=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2&2&1\\3&-2&2\\1&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{5}(-4+3+4+2-4-6)=-1,$$

$$z=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2&-1&2\\3&2&-2\\1&-2&1\end{vmatrix}=\frac{1}{5}(4-12+2-4-8+3)=-3.$$

如果研究更多个元的一次方程组，那就需要更高阶行列式. 但这也不困难. 一般 n 阶行列式可以仿照(7)用 $n-1$ 阶行列式来定义，譬如四阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\\a_4&b_4&c_4&d_4\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2&d_2\\b_3&c_3&d_3\\b_4&c_4&d_4\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2&c_2&d_2\\a_3&c_3&d_3\\a_4&c_4&d_4\end{vmatrix}$$

$$+c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\\a_4&b_4&d_4\end{vmatrix}-d_1\begin{vmatrix}a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\\a_4&b_4&c_4\end{vmatrix}.$$

例 5.

$$\begin{vmatrix}1&2&5&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&-1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2\\-1&-1&0\\2&-1&5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1&2\\3&-1&0\\1&-1&5\end{vmatrix}$$

$$+5\begin{vmatrix}1&0&2\\3&-1&0\\1&2&5\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1&0&1\\3&-1&-1\\1&2&-1\end{vmatrix}$$

$$=11-2\times(-24)+5\times9-4\times10$$

$$=64.$$

要注意的是，四阶及四阶以上的行列式不能象二阶、三阶的那样可以用上面画对角线的方法来计算. 这很显然，因为根据定义，四阶行列式有 24 项而画对角线则只有 8 项.

习　　题

1. 计算下列各行列式

(i) $\begin{vmatrix}1&-3\\2&4\end{vmatrix}$；　　(ii) $\begin{vmatrix}\sin a&-\sin a\\\sin b&\sin b\end{vmatrix}$；

(iii) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$；　　(iv) $\begin{vmatrix}0&a&0\\b&e&c\\0&d&0\end{vmatrix}$；

(v) $\begin{vmatrix}7&1&1&2\\-13&1&-1&-4\\0&0&0&-1\\-5&-5&0&-3\end{vmatrix}$；(vi) $\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}$.

答：(i) 10；(ii) $2\sin a\sin b$；(iii) 18；(iv) 0；(v) 40；(vi) 74.

2. 解下列方程组

(i) $\left.\begin{aligned}3x-5y&=13,\\2x+7y&=81;\end{aligned}\right\}$　　(ii) $\left.\begin{aligned}2x_1-4x_2+x_3&=1,\\x_1-5x_2+3x_3&=2,\\x_1-x_2+x_3&=-1.\end{aligned}\right\}$

答：(i) $x=16, y=7$； (ii) $x_1=-\frac{11}{8}, x_2=-\frac{9}{8}, x_3=-\frac{6}{8}$.

§1.2 行列式的性质

我们已经知道如何利用行列式来求解一次（或称线性）方程组，因此怎样更简捷地计算行列式就有很大的实际意义. 在这一节中，我们要来说明行列式的一些简单性质. 运用这些性质，往往可以使行列式的计算大为简化. 下面我们只限于讨论三阶行列式(对于二阶行列式，这些性质更加清楚)，对于四阶以及更高阶行列式这些性质仍然成立.

性质 1. 把行列式的行和列互换，行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

由于这个原因，所以行列式的有关行的性质对于列也成立，反过来也是如此.

性质 2. 把行列式中任意两行(或两列)对调，行列式只变号. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

性质 3. 如果行列式的某行(或列)中各元有公因子，则可以把它提出来. 例如

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质 4. 如果行列式的某行(或列)中各元都是写成二数的和,

则行列式可以如下法拆成二个行列式的和. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2' & b_2+b_2' & c_2+c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质 5. 如果行列式的两行(或两列)中相应的元成比例(特别,相应的元相等),或者,有一行(或列)的元都是零,则行列式的值是零. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 6. 如果把行列式的某行(或列)中各元同乘一因子,然后把它们加到另行(或列)上去,而其他的行(或列)不改变,则行列式的值不变. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

这些性质都可以直接用行列式的展开式(8)来验证. 但如果已验证了前四个性质,则后两个性质就可以从前面的推出:性质 5 可以从性质 2,3 推出;性质 6 可以从性质 4, 5 推出. 读者不妨把它们作为练习.

最后,我们还要指出展开式(7)的一般推广. 例如我们可以把行列式按第二列展开,其法如下:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{\text{(由性质1)}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \overset{\text{(由性质2)}}{=} -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(由(7)式)}}{=} -b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}.$$

它与(7)式基本上是相同的：都是把某一行或列中各元分别乘以从原行列式中划去了这个元所在的行和列所得的二阶行列式，然后再进行加、减．所要注意的就是每项前面的符号，有时是正号、有时是负号，这要看当初所取的那个元在行列式中的位置而定．我们做一"符号行列式"

$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix},$$

如果所取的元是在负号的位置上，相应的项前面就要取负号，如果是在正号的位置上，前面就添加正号．这个原则我们不去验证了，我们只举一个例来说明其用法．例如我们来计算前节例 4 中系数行列式，要求按第三行展开，得

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-2-2)+2(4-3)+1\cdot(4+3)=-4+2+7$$

$$=5,$$

结果与以前计算的一样．

计算行列式时，一般先用行列式的性质把其中一行或一列中的元尽可能化为零，然后按该行或列展开，这样就比较容易了．

例 1.

$$\begin{vmatrix}2 & 5 & 10\\ 8 & 4 & -2\\ 3 & -3 & 6\end{vmatrix}\overset{1^\circ}{=}2\begin{vmatrix}2 & 5 & 5\\ 8 & 4 & -1\\ 3 & -3 & 3\end{vmatrix}\overset{2^\circ}{=}6\begin{vmatrix}2 & 5 & 5\\ 8 & 4 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$