组合数学基础

李乔

高等教育出版社

组合数学基础

李 乔

高等教育出版社

(京)112 号

内容提要

本书介绍组合数学中组合计数的基础理论，并以集系为线索介绍了矩阵的组合性质、集系的极值问题和Ramsey理论.

本书选材颇具特点，内容处理也有新意，且叙述条理清楚，文字流畅.

本书可用作数学系或计算机系高年级选修课教材，也可用作高校教师、组合学工作者的参考书，也为有一定素养的读者提供一本有益的组合学方面的读物。

组合数学基础

李 乔

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.375 字数 200 000

1993 年 11 月第 1 版 1993 年 11 月第 1 次印刷

印数 0001—3 135

ISBN 7-04-004315-7/O·1233

定价 3.95元

序　言

组合数学，也叫组合学，是一个古老而又年青的数学分支．由于它在自然科学的众多学科，管理科学的很多分支，以及数学中涉及有限多个对象的每个专题中的作用，尤其是因为它在计算机的理论和应用上举足轻重的地位，人们越来越认识到这个数学分支的重要性．事实上它也已成为当今发展最为迅速的数学分支之一．不过在我国大多数大学数学系的课程表中至今还没有它的位置．作者所在的中国科技大学数学系的情形有所不同：我们通常每隔二、三年都在高年级作为选修课或“离散应用数学”专门化课开设一学期《组合数学基础》课，本书就是作者多次讲授这门课的自然产物．

编写本书主要有两个目的：

一、为各类大学的数学系提供高年级用的课程教材；

二、为具有一定数学素养的广大读者提供一本关于组合数学的篇幅不大并有少量习题和进一步深入的文献指南的读物．据作者所知，这类读者在我国大有人在．

这里必须对本书的内容选取作一些说明．现今组合数学的内容非常丰富，以作者的浅见，其基础理论内容似呈“两块一片”状分布．所谓“两块”，指的是“组合计数”和“组合设计”；而“一片”则是“两块”之间的广大区域的形象说法．“组合计数”主要研究相当具体的有限集合的计数问题，“组合设计”的主要目标是希望构造出各种特殊的有限集合，这些集合的元素受制于相当紧凑的约束条件，通常称为组态或构形．而在“一片”广大区域上则是五光十色、

气象万千，各种“专区(专题)”争奇斗艳的场面．各种“专区”渊源不同，景象迥异，人们致力于探求它们各自的量和质的特性，当然也希望发现一些共同的外观和内涵．对这“一片”似乎颇难用寥寥数语来准确地概括．

作者几经踌躇，量力量时，并在征询几位专家的意见后做出下面两个抉择：

一、在“两块”中割舍掉“组合设计”这一大块；

二、在“一片”中凸显“集系”这一概念．

希望这样能使本书的篇幅使人可亲可近，同时在内容处理上也稍有新意．

本书共八章，前五章比较完全地讲叙了组合计数理论的最基础内容，后三章是“一片”中三个相对独立的“专区”。而集系的线索贯通其间．每章都有少量难度不大的习题，还有简短的注释，主要为进一步深入提供一些线索．根据以往的经验，作为一学期、每周四学时的教材内容，可选用“前六章加七、八章的部分小节”或者“前五章加六、七、八章的部分小节”的模式．总之，全讲则过多，只讲前五章则太少，但如果每周三学时，或者是半学期(不到十周)的课，那么可以有多种方案．

作者特别感谢科大数学系冯克勤教授、李炯生教授和同济大学应用数学系邵嘉裕教授对编写本书的始终不渝的支持、鼓励和帮助；非常感谢我国组合数学专家徐利治、魏万迪、朱烈、蔡茂诚教授和香港大学数学系萧文强博士的指教；感谢周振黎、康泰和林翠琴教授惠赠他们的著作；还要感谢现在分布在天南海北的科大数学系几届同学在没有教材的情况下学习这门课程的合作态度和容忍精神．衷心希望各位师友和读者批评指教．

李　乔

一九九二年元月于科大

九二年十月追记：作者衷心感谢朱烈教授和责任编辑张小萍同志，他们的认真细致的审校使本书得以及早问世，同时也改正了原稿的不少错误和不当.

［附记］本书未论及组合设计，为弥补这一缺憾于万一，这里简略介绍一些文献. 国内外关于组合设计的好书很多. 相当于本书水平而且篇幅不多的论述有[Ry]；内容更深更多的有［魏］和[Ha]；还有专著[BeJuLe]及其五年后的补充［Ju］. 特别要提出近著［Wa］，它是从头开始专讲组合设计的大学高年级和研究生教材.

［魏］ 魏万迪，《组合论(下)》，科学出版社，1987.

[BeJuLe] T. Beth, D. Jungnickel, and H. Lenz, *Design Theory*, Combridge Univ. Press, 1986.

[Ha] M. Hall, *Combinatorial Theory*, 2nd ed. Wiley, 1986.

[Ju] D. Jungnickel, Design Theory: An Update, *Ars Combinatoria*, 28(1989), 129–199.

[Ry] H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, Wiley, 1965. (中译本：《组合数学》，科学出版社，1983)

[Wa] W. D. Wallis, *Combinatorial designs*, Marcel Dekker Inc, 1988

目　录

第一章 几类基本计数问题

本章将对几类经典计数问题作初步讨论. 这些问题可以作为几种基本模式,对于以各种方式提出的具体计数问题,首先可尝试能否将其化归为这些模式之一. 本章只使用通行于所有数学分支的论证方法,特别是这样的论证: 为求有限集 A 的元素个数 $|A|$, 设法建立从 A 到某个集 B 的双射,而其中 $|B|$ 已求得, 从而 $|A|=|B|$. 随后几章将结合本章的问题分别阐述解计数问题的几种常用的特定方法.

§1.1 排列,组合和二项式系数

A. 排列 元素取自集 S 的一个有序 k 元组 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 称为 S 上的一个 **k 元可重复排列**. 这里的"可重复"表示元 $x_1,\cdots,x_k\in S$ 可能有些彼此相同. 下面是这一概念的两种常见的等价表述.

"字母取自集 S 的一个长为 k 的字 $x_1x_2\cdots x_k$, 简称为 S 上的一个 k 元字."

"从集 $\{1,2,\cdots,k\}$ 到集 S 的一个映射 φ, 其中 $\varphi(i)=x_i(i=1,\cdots,k)$. 或记为

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k\end{pmatrix}."$$

现在用"字"的说法给出关于排列个数的几个众所周知的公式.

以下起, $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{N}_0$ 分别表示所有正整数的集和所有非负整数的集. 对 $n\in\mathbf{N}$, 记 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$.

公式(0)(乘积公式) 设 $k,n_1,\cdots,n_k\in\mathbf{N}$. W是集S上k元字的一个集，它具有这样的性质：W中字的第1个字母共有n_1种不同取法；当取定其中任意一个后，第2个字母共有n_2种不同取法；一般地，任意取定前i个字母后，W中字的第$i+1$个字母共有n_{i+1}种不同取法($i=1,\cdots,k-1$). 则$|W|=n_1n_2\cdots n_k$. □

公式(1) n元集上的k元字的个数是n^k. □

公式(2) n元集上字母不重复的k元字的个数$P(n,k)=n(n-1)\cdots(n-k+1)$. □

以下记$(n)_k=n(n-1)\cdots(n-k+1)$，读作"$n$的降$k$阶乘"；记$n!=(n)_n$，读作"$n$阶乘". 规定当$n\in\mathbf{N}_0$时$(n)_0=1$. 公式(2)中当$k=n$时的每个（字母不重复的）$n$元字称为这个$n$元集的一个**全排列**.

公式(3) 设$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 如果S上的一个字中字母a_i共出现m_i次($m_i\in\mathbf{N}_0$, $i=1,\cdots,n$)，则称该字是$a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}$型的. 对给定的$m_1,\cdots,m_n\in\mathbf{N}_0$, $m_1+\cdots+m_n=k$, S上的$a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}$型字的个数是

$$k!/m_1!\cdots m_n!$$

证 把m_i个a_i改成m_i个新字母$x_{i1},\cdots,x_{im_i}$($i=1,\cdots,n$)，则总共$m_1+\cdots+m_n=k$个不同字母共有$k!$个全排列. 再在每个这样的全排列中把$x_{i1},\cdots,x_{im_i}$仍都改为a_i($i=1,\cdots,n$)，则在$k!$个全排列中产生了S上的所有$a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}$型字，而且每个字都重复出现了$m_1!\cdots m_n!$次，故得公式(3). □

例1.1 集S上的一个k元**环状字(或圆排列)** $\odot x_1x_2\cdots x_k$就是把属于S的$x_1,x_2,\cdots,x_k$按顺时针方向依次排列成圆周状所得，这里的$x_1,x_2,\cdots,x_k$可能有重复，而且$\odot x_1x_2\cdots x_k$, $\odot x_2x_3\cdots x_kx_1$, $\cdots$, $\odot x_kx_1\cdots x_{k-1}$都表示同一环状字. 则$n$元集上字母不重复的$k$元环状字的个数是$(n)_k/k$.

证　由定义可知，每个 k 元不重复环状字可以表示成 k 种不同的普通字(或线状字)，再由公式(2)即得结论. □

字母允许重复的环状字计数比较复杂，以后再讨论.

B. 组合　元素取自集 S 的一个无序 k 元组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 称为 S 上的**一个 k 元可重复组合**，也称为 S 上的**一个 k 元重集**. k 元重集中一个元出现的次数称为该元在这个重集中的**重数**.

关于组合个数有以下两个最基本的公式，其中第一个是熟知的.

公式(4)　一个 n 元集的 k 元子集(即 n 元集的 k 元不重复组合）的个数记为$\binom{n}{k}$，则

$$\binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.\quad \square$$

公式(5)　一个 n 元集上的 k 元重集(即 n 元集的 k 元可重复组合）的个数记为$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$，则

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)=\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{n-1}.$$

证一　不妨设 n元集为$[n](=\{1,2,\cdots,n\})$. 则$[n]$上的每个 k 元重集可按唯一确定的方式表示为$[n]$上的 k 项递增数列 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)_{\leqslant}$，即数列 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，其中 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k\leqslant n$. 而$[n]$上 k 项递增数列的集又可按如下方式与$[n+k-1]$ 上 k 项严格递增数列的集一一对应：

$$(a_1, a_2, \cdots, a_k)_{\leqslant}\mapsto(a_1+0, a_2+1, \cdots, a_k+k-1)_{<}.$$

易知后一集合一一对应于$[n+k-1]$的 k 元子集的集，所以三个集的元素个数都等于$\binom{n+k-1}{k}$.

证二 设 n 元集 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，M是 S 上的一个 k 元重集，其中 a_i 在M中的重数是 $m_i(i=1,\cdots,n)$．则M唯一地确定了下述 n 元不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=k \tag{1}$$

的一个非负整数解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$；反之亦然．所以问题转为求方程(1)的非负整数解的个数．为此，令 $y_i=x_i+1$ $(i=1,\cdots,n)$，则方程(1)的非负整数解集与方程

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=k+n \tag{2}$$

的正整数解集之间有自然的一一对应．现在我们形象地表示方程(2)的每个正整数解：把 $n+k$ 个记号*排成一行，则相邻两个*间形成一个空隙，总共有 $n+k-1$ 个空隙．任意指定其中 $n-1$ 个空隙并在每个空隙处加一竖线|，这 $n-1$ 条竖线把 $n+k$ 个*隔成 n 段，若从左到右的各段中*的个数依次为 g_1，g_2，…，g_n，则 $g_i\in\mathbf{N}$，$\sum\limits_{i=1}^{n}g_i=n+k$，从而$(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$ 是方程(2)的一个正整数解．反过来不难说明方程(2)的每个正整数解都可以这样得到．例如，方程

$$y_1+y_2+y_3+y_4=7$$

的一个正整数解(1,2,1,3)相应于构图

$$*|**|*|***.$$

因易知加进 $n-1$ 条竖线的方法一共有

$$\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}$$

种，故得公式(5)．□

上述两种证法的主要想法都是建立适当的一一对应（即双射）．详细地说，就是为求集 A 的元素个数$|A|$，设法建立从 A 到某个集 B的一个双射，因 $|A|=|B|$，问题转化为求$|B|$．如果问

题的性质"合适"而又设计得巧妙的话，则可建立一连串的双射 $A\to B\to\cdots\to F$，最终使得 $|F|$ 可以求得，从而也得到了 $|A|=|F|$. 这种想法并不一定对每个计数问题有效，但不失为一种最基本的思想方法. 而且由于它能建立不同性质的计数问题的具体联系，又具有明确、直观的特点，往往被认为是最值得去寻求的一种证明.

把公式(5)写成下述等价形式有时更便于应用：

公式 (5′) 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非负整数解的个数是 $\binom{n+k-1}{k}$.

另外，如记 $(n)^k=n(n+1)\cdots(n+k-1)$，读作"$n$的升 k 阶乘"，则有类同的记法

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)=\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n)^k}{k!},\qquad \binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}.$$

例 1.2 不等式 $x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant k$ 的非负整数解的个数是 $\binom{n+k}{k}$，从而有等式 $\sum_{j=0}^{k}\binom{n+j-1}{j}=\binom{n+k}{k}$.

证 如下定义的映射

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(x_1+1,x_1+x_2+2,\cdots,x_1+\cdots+x_n+n)$$

是从 $x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant k$ 的非负整数解集到 $[n+k]$ 中的 n 项严格递增数列集的双射，而易知后一集的元素个数是 $\binom{n+k}{n}=\binom{n+k}{k}$. 再因前一集是 $k+1$ 个方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=j\quad(j=0,1,\cdots,k)$$

的非负整数解集的并，故得所示等式. □

例 1.3 设 $n,k\in\mathbf{N}$, $l\in\mathbf{N}_0$. $[n]$ 的一个 k 元子集称为 l 间隔的，如果其中任意二数之差大于 l. 则 $[n]$ 的 l 间隔的 k 元子集的

个数是$\binom{n-l(k-1)}{k}$.

证 建立如下的一一对应：对 $[n]$ 的 l 间隔的 k 元子集$(a_1, a_2, \cdots, a_k)_<$，记

$a_1-1=x_1, a_i-a_{i-1}-1=x_i(i=2,\cdots,k)$，$n-a_k=x_{k+1}$（即在 $1,2,\cdots,n$ 中，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的位置如下所示

$$\underbrace{1\cdots}_{x_1}a_1\underbrace{\cdots}_{x_2}a_2\underbrace{\cdots}_{x_3}a_3\cdots a_k\underbrace{\cdots n}_{x_{k+1}})$$

则令$(a_1,a_2,\cdots,a_k)_<$对应于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=n-k$$

的满足 $x_1\geqslant0, x_i\geqslant l\ (i=2,\cdots,k)$，$x_{k+1}\geqslant0$ 的整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$. 再令 $y_1=x_1, y_i=x_i-l(i=2,\cdots,k), y_{k+1}=x_{k+1}$，则上述方程的一个合乎条件的解对应于方程

$$y_1+y_2+\cdots+y_{k+1}=n-k-l(k-1)$$

的非负整数解$(y_1,y_2,\cdots,y_{k+1})$. 不难验证这二个对应都是相应集合间的双射，而最后一个解集的解数由公式(5′)可知是

$$\binom{n-l(k-1)}{k}. \qquad \square$$

C. 二项式系数 函数$\binom{n}{k}$是组合数学中几乎无处不在的一个重要角色. 它很早(公元 12 世纪或更早)就被发现，并一直得到广泛的应用和研究，但对其性质至今仍时有新的发现. 它主要有如下的三重面目：

(i) 组合意义：n 元集中 k 元子集的个数；

(ii) 显式表示：$\binom{n}{k}=(n)_k/k!$；

(iii) 二项展开式的系数：即有恒等式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\text{或}(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

因上述恒等式称为二项式定理，故通常把$\binom{n}{k}$称为**二项式系数**.

先讨论一下这个函数$\binom{n}{k}$的定义域. 按照(i)，应规定$n,k\in\mathbf{N}_0$(注意这时"0 元集"即空集. 从而对 $n\in\mathbf{N}_0$ 有$\binom{n}{0}=1$；又当$0\leqslant n<k$时，因 n 元集中不可能有 k 元子集，故$\binom{n}{k}=0$)这时(i)，(ii)，(iii)完全一致. 按照(ii)，可规定 $k\in\mathbf{N}_0$，$n\in$ 实数域 $\mathbf{R}$，这时函数$\binom{n}{k}=(n)_k/k!$，但不一定有组合意义，如$\binom{-6}{3}=(-6)(-7)(-8)/6=-56$；$\binom{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)/2=1-\sqrt{2}/2$ 等. 但这与(iii)是一致的，因为数学分析中的**牛顿二项式定理**断言有下述幂级数展开式：

(iii′) $(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$，其中$\binom{\alpha}{k}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$，

对 $\alpha\in\mathbf{R}$，$|x|<1$ 成立. 所以在(ii)和(iii′)的意义上，$\binom{n}{k}$对 $n\in\mathbf{R}$，$k\in\mathbf{N}_0$ 有定义. 例如，n 元集上 k 元重集的个数又可以写成

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)=\frac{(n)^k}{k!}=(-1)^k\binom{-n}{k}.$$

下面简单讨论二项式系数的基本性质以及用它们表出的一些

恒等式. 我们设二项式系数的二个变量都属于 $\mathbf{N}_0$,这样就可以用(i),(ii),(iii)的任何一种定义进行论证.

1°基本关系 这是大家熟知的.

对称性: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$;

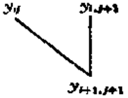
递推关系: 对 $n,k\in\mathbf{N}$, 有 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$;

单峰性: $\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=\binom{n}{\lceil\frac{n}{2}\rceil}>\cdots$;

这里用 $\lfloor a\rfloor$($\lceil a\rceil$)表示≤(≥)实数 a 的最大(最小)整数.

可以把所有二项式系数排列成著名的**杨辉三角**(或称**帕斯卡**(**Pascal**)**三角**)$Y=[y_{ij}](i,j=0,1,2,\cdots)$, $y_{ij}=\binom{i}{j}$. 这是一个无限的下三角阵,它有很多有意义的性质.

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\1&1&&&&\text{0}&\\1&2&1&&&&\\1&3&3&1&&&\\1&4&6&4&1&&\\1&5&10&10&5&1&\\&&&&&&\ddots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&\end{bmatrix},$$



这里仅指出 Y 的一个性质. 记 Y 的左上方的 $n+1$ 阶主子方阵为 $Y_n=[y_{ij}](i,j=0,1,\cdots,n)$,称为杨辉阵. 则 Y_n 可逆, 其逆阵 $Y_n^{-1}=[z_{ij}]$, $z_{ij}=(-1)^{i+j}y_{ij}$, 即 Y_n 的逆阵是把 Y_n 中每一列从主对角线上的 1 开始往下交替取正负号所得: