

高等学校数学参考书

高等数学

下 册

路见可 熊全淹编

人民教育出版社

高等学校教学参考书



高等数学

下册

路见可 熊全淹 编

人民教育出版社



本书是为综合大学化学专业“高等数学”课程编写的。全书分上、下册出版。上册包括解析几何与一元函数的微积分学。下册包括无穷级数、多元函数的微积分学与微分方程等。书中叙述比较详细，便于学生自学复习，也编入一部分可供选择学习的材料，以满足不同学生的需要。为了使师生方便，书中并附有一些基本习题。

本书可供综合大学、师范学院化学专业作为参考书之用，也可作工科性质相近的各专业的参考用书。

高等数学 下册

路见可 熊全淹 编

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·069 开本 850×1168 1/32 印张 6 15/16

字数 186,000 印数 5,800—35,800 定价(5)¥0.70

1965年9月第1版 1978年1月北京第4次印刷

目 录

第七章 级数与函数展开	1
§ 7.1 级数概念	1
§ 7.2 正项级数	8
§ 7.3 交错级数 · 绝对收敛	16
§ 7.4 幂级数	20
§ 7.5 台劳公式 · 台劳级数	27
§ 7.6 复数项级数	39
§ 7.7 福里哀级数	42
第八章 多元函数及其微分法	51
§ 8.1 多元函数	51
§ 8.2 偏导数 · 全微分	56
§ 8.3 微分法则	64
§ 8.4 几何应用	73
§ 8.5 函数的极值 · 台劳公式	80
第九章 重积分	91
§ 9.1 二重积分概念	91
§ 9.2 二重积分的计算	96
§ 9.3 二重积分的应用	109
§ 9.4 三重积分	119
第十章 线积分与面积分	131
§ 10.1 线积分	131
§ 10.2 格林公式及其应用	140
§ 10.3 面积分	152
§ 10.4 面积分与其他积分的联系	161
第十一章 微分方程	171
§ 11.1 一般概念	171
§ 11.2 一阶微分方程	178
§ 11.3 二阶微分方程	189
§ 11.4 二阶线性微分方程	196
§ 11.5 常系数二阶线性微分方程	203
§ 11.6 微分方程的级数解法	213

第七章 级数与函数展开

§ 7.1 级数概念

极限概念是数学分析的基础。在前面几章我们已经看到，从因变数的增量与自变数的增量的比求极限，便引进了导数概念，而求一种所谓“积分和”的极限便引进了定积分概念。这里要讲的“无穷多个数的和”，也是某种极限，这便是本章要讲的级数理论。

我们仍旧从第二章开始时所举的例子说起。一根单位长的木棍，每天截去一半，我们现在来看逐日所截下的累积长度。例如 5 日累计共截下

$$A_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} = \frac{31}{32},$$

一般， n 日累计共截下

$$A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

现在如果问，日复一日永无止境地下去，究竟“共计”截下多少长度呢？我们形式地就把这个长度记作

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots, \quad (1)$$

就好像是把每日所截得的长度无穷无止地一齐“加”起来一样，这就叫做一个**无穷级数**或简称**级数**。

实际上我们没有办法把无穷个数真的一齐加起来，我们只能把(1)中的第一项加上第二项，再加上第三项，再加上第四项，等等，但无论如何加不完所有的项；然而另一方面，我们可清楚地看到所加的项越多得到的和就越接近于 1(从问题本身，用常识也可判断出)，即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 1,$$

这个 1 我们就算作级数(1)的和, 不过这个“和”不是用普通的算术方法得来的, 而是经过了一个极限步骤. 所以上面问题的答案是: 无穷无止地取下去, 累积起来截下的长度“总共”是 1; 但不要把这个答案理解为木棍最后有一天被一起取下来了, 而是说越取下去, 就越差不多一起取下来了.

从这个简单例子, 可以引出一般的级数定义如下:

定义 设有一数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, 形式地依次把它们加起来写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (2)$$

这就叫做一无穷级数(简称级数), u_n 叫做它的第 n 项. 从第一项起, 依次作下列各有限项的和:

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots$$

它们都称作级数(2)的部分和, 例如 S_n 就称作它的(前) n 项的部分和. 如果部分和的数列 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ 有极限 S (某一常数)存在:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S,$$

则 S 就称作级数(2)的和, 记作

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots.$$

这时称级数(2)为收敛级数, 并说它收敛于 S ; 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 不存在(包括为无穷大), 则称级数(2)为发散级数, 这时它就没有和可言.

我们很容易举出发散级数的例子. 例如级数

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots,$$

它的前 n 项部分和 $S_n = n$, 而当 $n \rightarrow +\infty$ 时 S_n 趋向无穷大, 故无极限, 因此它就是发散的.

给出一个级数(2)(就是已知它的各项), 怎样来判别它收敛或发散是级数论中极重要的问题, 这就是部分和数列 $\{S_n\}$ 有无极限的问题; 前面我们已经知道, 数列的极限存在与否, 没有一般的方法来判别, 所

以级数的敛散也没有一般的判别法。但是我们也有许多判别法可以用来检查相当多类型的级数是否收敛，这正是我们下面几节的主旨。至于如果知道了一个级数(2)收敛，如何去求出它的和来，这就是求数列 $\{S_n\}$ 的极限问题，我们前面已知道没有一般的方法，而且现在还增加了一层困难，那就是往往不容易把 S_n 中的 n 个项加在一起使它简化成一个紧凑的式子，这样我们更无法求它的极限了。

级数(2)是否收敛，依据部分和数列 $\{S_n\}$ 有无极限而定；所以，整个级数理论是与数列理论相应的。读者牢牢记住这一点后，对于级数理论就很容易掌握了。例如，根据数列理论，我们很容易得出级数的下列性质：

1. 在一级数中添加有限个项或删去有限个项并不会影响它的敛散性。

2. 如果级数(2)收敛，和为 S ，而 c 是一个常数，则级数

$$\sum cu_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$$

也收敛，且其和为 cS ；如果(2)发散，又 $c \neq 0$ ，则上面这级数也发散。

3. 如果两个级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛，且其和分别为 S 与 T ，则把这两级数逐项相加或相减构成的新级数

$$\sum (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

也必收敛，且和为 $S \pm T$ 。

我们只来证明性质1的一个特殊情况，那就是：设在级数(2)的第一项 u_1 前面再添加一项 u_0 而构成一新的级数

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad (2)'$$

求证级数(2)与(2)'同时收敛或同时发散。把(2)'的前 n 项部分和记作 S'_n ，于是

$$S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = u_0 + S_{n-1},$$

其中 u_0 是常数，所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = u_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1};$$

显然等式两边的极限要末都存在, 要末都不存在. 注意 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1}$ 与 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 意义相同, 所以这也就是级数(2)与(2)'要末都收敛, 要末都发散.

性质 1 的其他的情况和性质 2, 3 留给读者自己去证明.

上面这三个性质对有穷个项的加、减法来说显然都成立, 也就是说由有穷项的加、减法变为无穷项的加、减法时, 这些性质都不变.

下面这个性质值得特别注意.

定理 如果级数(2)收敛, 则必 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

证 既然级数(2)收敛, 我们设它的和为 S , 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$.

因为 $u_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}) = S_n - S_{n-1}$,

所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$,
证毕.

注意, 这个定理的逆定理并不成立, 就是说, 从 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, 并不能推知级数(2)收敛(参看下面例 3); 因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ 是级数(2)收敛的必要条件, 而不是充分条件.

从这个定理, 立刻可以得出下一推论:

推论 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ (包括极限不存在), 则级数(2)必发散.

利用这个推论, 往往一眼就可看出某些级数是发散的.

例如级数 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$ 与 $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ 显然都是发散的, 因为对于前者 $u_n = n$, 而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, 对于后者 $u_n = (-1)^{n-1}$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $(-1)^{n-1}$ 恒在 $+1$ 与 -1 两处跳动, 没有极限.

下面再举几个例子, 其中例 2、例 3 特别重要, 要记住.

例 1. 求证级数 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$ 收敛, 并求出其和.

解 我们只要把级数的部分和 S_n 算出, 若能求出其极限, 则级数和就求得了, 当然它就是收敛的.

$$\begin{aligned}
 \text{因为} \quad S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\
 &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},
 \end{aligned}$$

故级数和

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

例 2. 试讨论公比为 q 的等比级数 (几何级数) $\sum aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$ 的敛散性 ($a \neq 0$).

解 先设 $|q| < 1$. 因为由等比级数求和公式, 前 n 项部分和

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

又因为这时 $|q| < 1$, 由 § 2.1, 例 4 的 1, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $q^n \rightarrow 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

因此级数收敛, 且和就是 $\frac{a}{1-q}$.

再设 $|q| \geq 1$, 由 § 2.1, 例 4 的 2 与 3, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时 aq^{n-1} 不以 0 为极限, 所以由上述推论, 级数发散.

例 3. 试证调和级数 $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散.

证 这时 $u_n = \frac{1}{n}$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时 $u_n \rightarrow 0$, 所以不能由此断定级数收敛或发散. 这里部分和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

右边无法把它合并成一个项, 因此很难看出它有无极限, 但我们容易估计 $S_1, S_2, S_4, S_8, \cdots, S_{2^n}, \cdots$:

$$S_1 = 1,$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2},$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2},$$

.....

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\ + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ 项}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1} \text{ 项}} \\ = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_n = 1 + \frac{n}{2},$$

.....

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) = +\infty$, 而 $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2^n} = +\infty$. 因此在数列 $\{S_n\}$ 中, 不论 n 多么大, S_n 都不可能密集在某一数附近, 也就是说数列 $\{S_n\}$ 的极限不存在^①, 因此级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散.

最后, 我们再介绍一个概念, 就是所谓收敛级数的余项. 设级数 (2) 收敛, 其和为 S , 则

$$r_n = S - S_n$$

称作级数 (2) 的 (第 n 个) 余项. 这个余项就表明用部分和 S_n 来代替级数的和 S 时所产生的误差. 发散级数没有和, 当然也谈不上余项.

读者不难证明, r_n 就是级数 (2) 中取掉前 n 项后所剩级数的和:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

而且由收敛及和的定义, 立刻得知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$.

① 读者不难由极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

习 题

1. 试用 ε - N 方法, 写出级数收敛于其和的定义.

2. 根据下列各级数前几项的规律, 写出其第 n 项, 并根据本节的定理或推论, 看能否对级数的敛散性作什么断语:

$$(i) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \cdots;$$

$$(ii) \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots;$$

$$(iii) \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{5}{27} + \frac{8}{81} + \cdots;$$

$$(iv) \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{4}{5}} + \cdots;$$

$$(v) \cos 1 + \cos \frac{1}{2} + \cos \frac{1}{3} + \cos \frac{1}{4} + \cdots;$$

$$(vi) \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots.$$

答: (i) $\frac{n}{n+1}$, 发散; (ii) $\frac{1}{2n-1}$; (iii) $\frac{2n}{3^n}$; (iv) $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$, 发散;

(v) $\cos \frac{1}{n}$, 发散; (vi) $\frac{1}{n!}$.

3. 求证下一级数发散:

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{40}\right) + \cdots.$$

4. 试判断下列各级数的敛散性, 如收敛并求出其和:

$$(i) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)} + \cdots;$$

$$(ii) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots;$$

$$(iii) \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \cdots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \cdots;$$

$$(iv) \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \cdots + \ln \frac{n}{n+1} + \cdots.$$

答: (i) $\frac{11}{18}$; (ii) $\frac{1}{4}$; (iii) $\frac{3}{2}$; (iv) 发散.

5. 试把循环小数 $0.\dot{5}$ 与 $0.4\dot{1}\dot{2}$ 化为分数.

答: $\frac{5}{9}$, $\frac{68}{165}$.

§ 7.2 正项级数

如果级数

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

的各项都是正的: $u_n > 0$, 则称为正项级数. 判别一个级数是否收敛是级数理论的首要问题, 而正项级数的理论是研究一般项级数的基础. 所以本节先来研究正项级数收敛或发散的某些判别法^①. 这些判别法对于“负项级数”($u_n < 0$)也可以应用, 因为用 $c = -1$ 乘它的各项, 它就变成一正项级数, 而其敛散性不变(见上节性质 2); 同时对于只有有限项改变符号的级数, 这些判别法也能适用, 因为我们只要把前面含有变号的若干项一齐删掉再考虑剩下级数的敛散性好了(见上节性质 1).

设 $\sum u_n$ 是一正项级数, 它的部分和数列为 $\{S_n\}$, 由于每个 $u_n > 0$, 显然它是一个(单调)增数列 (§ 2.5):

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots.$$

这时有两种可能: 或者 $\{S_n\}$ 有界, 也就是说存在一个常数 M , 使得

$$S_n \leq M (n=1, 2, \cdots);$$

或者 $\{S_n\}$ 无界. 当 $\{S_n\}$ 有界时, 由 § 2.5, 定理 2, 得知它有极限, 因而级数 $\sum u_n$ 收敛; 当 $\{S_n\}$ 无界时, 它没有极限(这时 $S_n \rightarrow +\infty$), 因而级数 $\sum u_n$ 发散^②.

从以上的分析, 可以得出正项级数敛散的一个必要充分条件.

定理 1. 正项级数收敛的必要充分条件是它的部分和数列有界.

根据这一定理, 就能建立判别正项级数收敛与否的一个最基本方法, 而其它的判别法很多是从这个判别法推导出来的, 所以它就显得特

① 我们不考虑级数中有某些项(可能有无穷个项)等于零的情况, 因为如果有这种情况时, 就把它删去, 并不会影响级数的敛散性. 读者不妨自己证明这一点. 所以本节的理论对于含零项的级数也是成立的.

② 由此可知: 正项级数发散时一定发散于无穷大.

別重要:

定理 2 (比較判別法). 设有二正項級數

$$\begin{aligned}\sum u_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \\ \sum v_n &= v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots,\end{aligned}$$

它们的对应各項满足不等式 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \cdots)$; 那末, 如果級數 $\sum v_n$ 收斂, 則級數 $\sum u_n$ 也收斂, 如果級數 $\sum u_n$ 發散, 則級數 $\sum v_n$ 也發散.

证 令

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$

則由假设, $S_n \leq T_n$.

如果級數 $\sum v_n$ 收斂, 則由上述定理 1, $\{T_n\}$ 有界: 因此有一常數 M 存在, 使得 $T_n \leq M$; 因而更有 $S_n \leq M$, 也就是 $\{S_n\}$ 也是有界的, 再根据定理 1, 級數 $\sum u_n$ 就是收斂的.

反过来, 如果級數 $\sum u_n$ 發散, 則級數 $\sum v_n$ 一定也發散; 因为如若 $\sum v_n$ 收斂的话, 由已经证明的结论可知 $\sum u_n$ 也要收斂了.

这一判別法可以这样来记住: 比收斂級數还“小”的級數也收斂, 比發散級數还“大”的級數也發散. 至于比收斂級數“大”的或比發散級數“小”的級數, 就不能确定是收斂或發散的了.

运用比較判別法时, 一定要先知道一些已知为收斂或發散的級數作为基础. 最常用的是上节例 2, 3 的等比級數 $\sum aq^{n-1}$ 与调和級數 $\sum \frac{1}{n}$.

例 1. 求证級數 $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+1} + \cdots$ 收斂.

证 因为 $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$, 而等比級數 $\left(q = \frac{1}{2}\right)$

$$\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

是收斂的, 因此由比較判別法可知原級數收斂.

例 2. 求证 $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ 收敛.

证 把级数的第一项拿掉(不影响敛散性), 得

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots,$$

因为 $n! = 1 \cdot 2 \cdots n > 2^{n-1}$, 于是

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

但 $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ 是公比 $q = \frac{1}{2}$ 的等比级数, 它是收敛的, 因此原级数也收敛.

例 3. 求证级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}(n+1)} + \cdots$ 收敛.

证 因为除 $n=1$ 外, 恒有 $\frac{1}{3^{n-1}(n+1)} \leq \frac{1}{3^n}$. 但 $\sum \frac{1}{3^n}$ 是 $q = \frac{1}{3}$ 的等比级数, 它是收敛的. 如果把两级数 $\sum \frac{1}{3^{n-1}(n+1)}$, $\sum \frac{1}{3^n}$ 的第一项都拿掉, 由比较判别法可知前级数收敛; 再把第一项添加上去, 它仍旧收敛.

例 4. 求证级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3n-1} + \cdots$ 发散.

证 因为 $\frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$, 而 $\sum \frac{1}{n}$ 是发散的, 因此 $\sum \frac{1}{3n}$ 也是发散的, 由比较判别法可知原级数是发散级数.

例 5. 下面的级数称作**广义调和级数**或简称 p 级数

$$\sum \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots,$$

求证: 当 $p > 1$ 时, 级数收敛, 当 $p \leq 1$ 时, 级数发散.

证 当 $p > 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} S_{2^n-1} &= 1 + \left\{ \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right\} + \left\{ \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p} \right\} \\ &< 1 + \left\{ \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right\} + \left\{ \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-1})^p} \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$< 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1} + \cdots = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1} = M,$$

这就是说对于任意 $n, S_n < M$, 因此这时 $\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛.

当 $p \leq 1$ 时, 我们也可以用上述方法, 但没有必要了, 因为用比较判别法 ($\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ 及 $\sum \frac{1}{n}$ 是发散级数), 立即推得 $\sum \frac{1}{n^p}$ 发散.

p 级数本身与等比级数、调和级数一样也是在使用比较判别法时一个常用的基础级数, 值得特别注意.

例 6. 求证级数 $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$ 收敛.

证 因为 $\frac{1}{(2n-1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum \frac{1}{n^2}$ 是收敛级数, 因此 $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$ 收敛.

注意: 定理 2 中的条件 $u_n \leq v_n$ 不一定要从 $n=1$ 起就成立, 只要从某个 n 起以后永远成立就行了; 而且不等式 $u_n \leq v_n$ 也可改作 $u_n \leq cv_n (c > 0)$, 判别法仍成立. 但是不要忘记, 本判别法只能用于正项级数.

根据比较判别法还可以建立下面二个在应用上非常方便的判别法.

定理 3 (达朗贝尔判别法). 若有正数 $q < 1$ 存在, 使得 $\textcircled{1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, 则正项级数 $\sum u_n$ 收敛; 若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, 则发散.

证 若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, 分别令 $n=1, 2, 3, \cdots$, 则得

$$u_2 \leq qu_1, u_3 \leq qu_2 \leq q^2 u_1, u_4 \leq qu_3 \leq q^3 u_1, \cdots, u_n \leq qu_{n-1} \leq q^{n-1} u_1, \cdots,$$

即

$$u_n \leq q^{n-1} u_1.$$

但因 $q < 1$, 等比级数 $\sum q^{n-1} u_1$ 收敛, 所以由比较判别法, 级数 $\sum u_n$ 也收敛.

① 指对一切 $n=1, 2, \cdots$. 当然只要自某个 n 起以后都成立也行, 下同.

若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, 则 $u_{n+1} \geq u_n$, 显然 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 不能为零, 因此级数发散. 定理证毕.

注意在这个判别法的第一段不能改为“若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 则级数 $\sum u_n$ 收敛”. 因为由 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 只能推得 $u_{n+1} < u_n$, 没有办法应用比较判别法. 事实上, 只知道 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ 不能保证级数 $\sum u_n$ 收敛, 调和级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ 便是一例.

如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 则由达朗贝尔判别法可得下一推论:

推论 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ 存在, 则当 $l < 1$ 时级数 $\sum u_n$ 收敛, 当 $l > 1$ 时级数 $\sum u_n$ 发散, 当 $l = 1$ 时不能断定.

证 设 $l < 1$. 取正数 $\varepsilon < 1 - l$. 由极限定义, 必有 N 存在, 当 $n > N$ 时, 便有 $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon$, 因此有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} - l < \varepsilon$, 故

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + l < 1,$$

由达朗贝尔判别法, 便知级数 $\sum u_n$ 收敛. 类似地可证明 $l > 1$ 时级数发散. 当 $l = 1$ 时, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 本身大于或小于 1 尚不能断定, 当然更不能断定级数 $\sum u_n$ 的敛散性; 即使 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ 而 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$, 也不能断定它收敛或发散.

定理 4 (哥西判别法). 若有正数 $q < 1$ 存在, 使得 $\sqrt[n]{u_n} \leq q$, 则正项级数 $\sum u_n$ 收敛; 若 $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, 则 $\sum u_n$ 发散.

证 若 $\sqrt[n]{u_n} \leq q$, 则 $u_n \leq q^n$; 又因 $q < 1$, 所以等比级数 $\sum q^n$ 收敛. 根据比较判别法, 级数 $\sum u_n$ 也收敛.

若 $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, 则 $u_n \geq 1$, 因此不可能 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, 所以 $\sum u_n$ 发散. 定理证毕.

同达朗贝尔判别法一样, 这里也要注意, 不能从 $\sqrt[n]{u_n} < 1$ 推得级数 $\sum u_n$ 收敛. 并且也有类似的推论:

推論 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ 存在, 則當 $l < 1$ 時級數 $\sum u_n$ 收斂, 當 $l > 1$ 時級數發散, 當 $l = 1$ 時不能斷定.

例 7. 判別級數

$$\frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots$$

的斂散性.

解 這裡 $u_n = \frac{2^n}{n!}$, 故

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \bigg/ \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n+1}.$$

當 $n > 2$ 時 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{2}{3}$, 或因 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 (< 1)$, 由達朗貝爾判別法便知此級數收斂.

例 8. 判別級數

$$e^{-1} + 2^2 e^{-2} + 3^3 e^{-3} + \cdots + n^n e^{-n} + \cdots$$

的斂散性.

解 因 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^n e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-1} = +\infty$,

由哥西判別法的推論知此級數發散.

有很多級數用上述定理還不能判斷其斂散性, 例如調和級數 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 便是如此. 這時下一判別法往往生效.

定理 5 (哥西積分判別法). 已給正項級數 $\sum u_n$. 設 $u_n = f(n)$, 其中 $f(x)$ 是一單調減函數①, 則級數 $\sum u_n$ 收斂或發散就看廣義積分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收斂或發散 (§ 6.6) 而定.

証 我們先把函數 $f(x)$ 的圖形作出 (圖 7.1). 如圖, 作出許多矩形, 每個矩形的底邊寬都是 1. 因為 $f(x)$ 單調減少, 所以在 $x = n$ 與 $n+1$ 間曲線下的面積 $\int_n^{n+1} f(x) dx$ 夾在帶虛線的矩形和帶實線的矩形之間, 這兩矩形的面積分別為

① 這裡我們一般假定 $f(x)$ 是連續的, 因而自 1 至任意大的正數的積分總存在. 又積分下限可改作任意一個大於 1 的正數, 而不影響廣義積分的斂散性.