高 等 数 学

(中 册)

余国钧　　主编

贺志贤　杨林锡　罗媛芳　刘国钧　　编

華中工學院 出版社

高 等 数 学（中册）

余国钧　主编
贺志贤　杨林锡　罗媛芳　刘国钧　编
责任编辑　李立鹏

华中工学院出版社出版发行
（武昌喻家山）
新华书店湖北发行所经销
华中工学院出版社印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：8.125　字数：186 000
1987年12月第1版　1987年12月第1次印刷
印数：1—6 000
ISBN　7-5609-0142-5/O·18
统一书号：13255—084　定价：1.38元

内 容 提 要

本书是根据现行高中数学课程开设的状况，及工科专业的教学需要而编写的。全书分上、中、下三册出版。中册内容有矢量代数，空间解析几何，矢性函数，多元函数微分学，重积分等。每章都有习题，书末有答案及部分习题提示。

本书可作为高等工业学校“高等数学”的教材或参考书，也可供部分理科专业的读者参考。

目　录

第八章 矢量代数

由于力学、物理以及其他技术科学的需要，要求我们考虑一种新的量——矢量。对于数学本身来说，它也是一个重要的工具。本章，将介绍矢量的代数运算，即矢量的加法、减法和乘法运算。至于矢量的分析运算，即矢量的微分、积分的运算，将在以后介绍。

§8.1 矢量概念

8.1.1 空间直角坐标系

我们知道，平面上的点可和一有序数偶(x,y)建立一一对应的关系，这是平面解析几何的出发点。为了能用代数的方法来研究空间的几何图形，我们要建立空间中的点和数之间的对应关系。为此，我们首先要建立空间直角坐标系。

任意选取空间某点o作为参考点，通过点o作三条互相垂直的有向直线ox, oy, oz，它们的方向通常是按照所谓右手规则确定的(图8-1)，即，若将右手的姆指和食指分别指着ox和oy的正方向，则中指所指的方向即为oz的正方向。在直线ox, oy, oz上选取单位长度(通常在这三条直线上所取的单位长度是相同的)。这样，我们就在空间建立了直角坐标系。参考点o称为**坐标原点**，直线ox, oy, oz称为**坐标轴**(分别简称为x轴，y轴，z轴)。三个坐标轴中每两个决定一个平面，即xoy, yoz, zox平面，它们两两互相垂直，称为**坐标平面**。

现在，我们用数来确定空间任意一点的位置。

设M是空间任意一点，过点M作三个平面分别平行于坐标平

面 yoz, zox, xoy，它们和坐标轴 ox, oy, oz 分别交于 A、B、C 三点。点 A 在 x 轴上的坐标为 x，点 B 在 y 轴上的坐标为 y，点 C 在 z 轴上的坐标为 z，于是，空间任意一点 M 唯一地对应着这样有次序的三数组 (x, y, z)。反之，任意有次序的三数组 (x, y, z) 一定唯一地对应空间的一个点，我们只要分别在坐标轴 ox，oy，oz 上决定三点 A，B，C，使得有向线段的值 $oA = x, oB = y$，$oC = z$，然后通过 A、B、C 三点分别作平行于坐标平面的三个平面，这三个平面的交点 M 便是唯一对应于有序数组 (x, y, z) 的点。因此，空间的一个点 M 就与一个有序数组 (x, y, z) 建立了一一对应关系。我们称 (x, y, z) 为点 M 的**直角坐标**，x, y, z 分别称为点 M 的**横坐标**，**纵坐标**和**竖坐标**。

三个坐标平面 xoy, yoz, zox 将空间划分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**，而卦限的顺序按表8-1区分。

表 8-1

卦限	x	y	z
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ	−	+	+
Ⅲ	−	−	+
Ⅳ	+	−	+
Ⅴ	+	+	−
Ⅵ	−	+	−
Ⅶ	−	−	−
Ⅷ	+	−	−

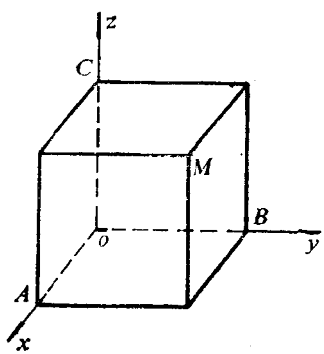

图 8-1

如果点 M 在坐标平面 xoy 上，那末点 M 的竖坐标 $z = 0$；在坐标面 yoz 上的点，它的横坐标 $x = 0$；在坐标面 zox 上的点，它的

纵坐标 $y=0$，如果点M在 x 轴上，那末 $y=z=0$；同样，对于 y 轴上的点，坐标 $z=x=0$；对于 z 轴上的点，坐标 $x=y=0$，坐标原点的坐标是$(0,0,0)$。

在空间直角坐标系中，我们来讨论两个简单问题。

1．坐标轴的平移

设点M关于坐标系 $oxyz$的坐标是(x,y,z)。新坐标系$o'x'y'z'$的轴 $o'x'$、$o'y'$、$o'z'$ 顺次平行于轴 ox、oy、oz，并且分别指着同一方向(图 8-2)、设点 o' 关于旧系的坐标是 a、b、c，今用 x'、y'、z' 表示点M关于新系的坐标。

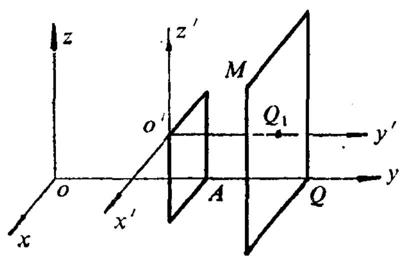

图 8-2

设A是点 o' 在轴 oy 上的投影，Q和Q_1 是点M在轴 oy 和oy' 上的投影，那末

$$oQ=oA+AQ=oA+o'Q_1,$$

但

$$oQ=y,\ oA=b,\ o'Q_1=y',$$

所以

$$y=b+y'.$$

同样，若把点 o' 和点M投影到轴 ox 及 oz 上，就得到

$$x=a+x',$$

$$z=c+z'.$$

因此，我们就得到在坐标轴的平移下用新系坐标表示旧系坐标的

公式：

$$x=a+x',\ y=b+y',\ z=c+z'. \qquad (8.1)$$

若用旧系的坐标表示新系的坐标，则有

$$x'=x-a,\ y'=y-b,\ z'=z-c. \qquad (8.1)'$$

2．两定点间的距离．

(1)设点M的坐标是x、y、z，那末，点M到原点o的距离就是三棱之长为$|x|$、$|y|$、$|z|$的长方体的对角线的长（图 8-1）．若以d表示这距离，则

$$d^2=x^2+y^2+z^2.$$

由此，我们得点$M(x、y、z)$到原点o的距离公式为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (8.2)$$

(2)设两已知点为$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$．如果把坐标原点移到点M_1处并平移坐标轴而保持轴的方向，则点M_1关于新坐标系的坐标是(0,0,0)，而点M_2关于新系的坐标是$(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$，由公式(8.2)，得到

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (8.2)'$$

这就是两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离公式．

习　题　8-1

1．求定点(a,b,c)关于：(1)各坐标平面，(2)各坐标轴，(3)坐标原点的对称点的坐标．

2．求点$A(4,-3,5)$到坐标原点及各坐标轴的距离．

3．已知四点：(0,0,0)，(0,3,0)，(2,0,0)，(0,0,6)，求通过这四点的面球的半径．

4．求点$A(1,-3,2)$关于点$M(-1,2,1)$的对称点B的坐标．

5．在z轴上求一点，使它到点$(-4,1,7)$和点$(3,5,-2)$距离相等．

6．在yoz平面上求一点，使得它到点(3,1,2)，(4,-2,-2)和点(0,5,1)距离相等．

7. 四面体的顶点是$A(-7,3,-2)$，$B(0,2,1)$，$C(4,-1,0)$和$D(-1,0,-3)$，平移坐标轴将坐标原点移在点$M(6,-2,1)$，试求四面体顶点的新坐标。

8.1.2 矢量的概念

在客观世界里，我们常遇到两类不同性质的量。一类是只具有大小的量，称为**数量**，例如质量、温度、时间、面积等；另一类是不仅具有大小，而且还有方向的量，称为**矢量**，例如力、速度、加速度等。

对于矢量，我们常用空间的一有方向的线段(有向线段)来表示（图8-3）。线段的长度表示所论矢量的大小，称为此矢量的**模**或长度，箭头的方向即矢量的方向。点A叫做矢量的起点，点B叫做终点。以A为起点、B为终点的矢量记作$\overrightarrow{AB}$，它的模记为$\|\overrightarrow{AB}\|$。矢量也可用粗体字母$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$表示。

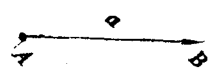

图 8-3

起点固定的矢量，称为**固定矢量**。例如，我们谈到某一质点的运动速度时，速度就和所考虑的质点的位置有关，这时，速度就是固定矢量。

起点可以在矢量所在直线上任意移动的矢量，称为**滑动矢量**。例如，作用在一刚体上的力就是滑动矢量，因为它可以在刚体中力的作用线上任意移动，而对刚体的效果是一样的。

在数学中，一般只考虑矢量的大小和方向，而不计较其起点的位置。这种矢量称为**自由矢量**(以后简称为矢量)。因为自由矢量可以平行移动，所以，如果二矢量满足以下两个条件：(1) 长度相等，(2)方向相同，就称这两个矢量是**相等的**。

如果矢量的模等于0（即矢量的起点和终点重合)，称为**零矢量**记作$\mathbf{0}$。零矢量可以认为具有任一方向。

8.1.3 矢量的线性运算

1. 矢量加法

根据力学中的力、速度等的平行四边形法则，我们定义二矢量的和如下：

定义 设有不平行二矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，将这两个矢量平行移动到以空间某点O为起点(图8-4)，以这两个矢量作相邻两边的平行四边形的对角线矢量$\overrightarrow{OC}$，定义为矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

按照这个定义确定矢量的和的方法，称为**平行四边形法则**。

由图 8-4 可以看出，我们也可以将矢量 $\boldsymbol{b}$ 平行移动，使矢量 $\boldsymbol{b}$ 的起点和矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，那末从矢量$\boldsymbol{a}$的起点到矢量$\boldsymbol{b}$的终点所作的矢量就是矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。这种求矢量和的方法，称为**三角形法则**。

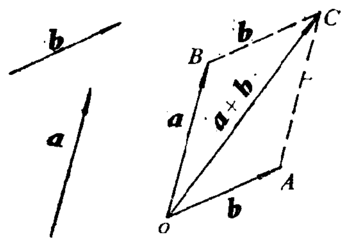

图 8-4

如果$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为平行矢量，则可按三角形法则求和。

利用三角形法则，可以将两矢量求和的方法推广到求任意有限个矢量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和(图8-5)：平移矢$_2$，使它的起点和$\boldsymbol{a}_1$的终点重合，再平移矢量$\boldsymbol{a}_3$，使它的起点和平移后的 $\boldsymbol{a}_2$ 的终点重合，…这样继续下去，

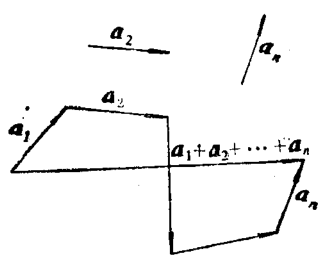

图 8-5

最后平移 $\boldsymbol{a}_n$，使它的起点和 $\boldsymbol{a}_{n-1}$ 的终点重合。从矢量 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点到矢量 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点所作的矢量，就是矢量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$。

实数加法有两个基本规则：交换律，结合律。对于矢量加法，这两个规则也同样成立。

(1) **交换律**：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$。这可直接从定义推出。

(2) **结合律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$。这只要从图8-6就可以看出。

由于矢量的加法既满足交换律，又满足结合律，所以三个矢量，或一般地任意有限个矢量的和，与它们相加的先后次序无关。

2. 矢量减法

减法是加法的逆运算。如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，那末 $\boldsymbol{c}$ 就称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，或 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 之差，分别记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \quad 与 \quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

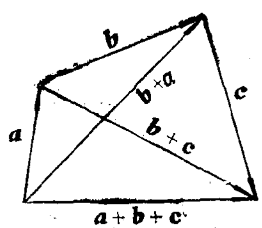

图 8-6

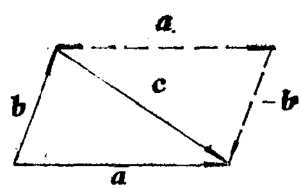

图 8-7

由矢量的加法法则可以得到矢量的减法法则(图8-7)：将矢量 $\boldsymbol{a}$ 及矢量 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，由矢量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的矢量 $\boldsymbol{c}$ 就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

如果 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，那末定义 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$，即矢量 $\boldsymbol{c}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，指向相反，我们称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的**逆矢量**。

故 $$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

3. 数量与矢量的乘法

定义 已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 和数量 m，它们的乘积 $m\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{a}m$) 是这样的一个矢量，它的模等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模与 $|m|$ 的乘积，即 $\|m\boldsymbol{a}\| = |m|\cdot\|\boldsymbol{a}\|$；它的方向平行于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，如果 $m>0$，则 $m\boldsymbol{a}$ 的指向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；如果 $m<0$，则 $m\boldsymbol{a}$ 的指向与 $\boldsymbol{a}$ 相反；如果 $m=0$，则 $m\boldsymbol{a}$ 是零矢量。称 $m\boldsymbol{a}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与数量 m 的数积。

很显然，这样的数乘运算具有下列性质：

(1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$；

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$。

从矢量与数量的乘法定义可以看出，对于任何两个互相平行的矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，必有数量 λ 存在，使得

$$\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}\ ;$$

反之，若上式成立，则必有 $\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}$。

模等于单位长度的矢量称为**单位矢量**。记与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量为 $\boldsymbol{a}^\circ$，则

$$\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{a}^\circ \qquad 或 \qquad \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \boldsymbol{a}^\circ$$

所以，一非零矢量除以它的模，即得与它同方向的单位矢量。

8.1.4 矢量的坐标和方向余弦

以上介绍的矢量的运算都是用几何方法进行的，如果重复地进行多个矢量的加减与数乘，势必会感到繁琐和难于辨认。为了适应实际应用的需要，我们把矢量用数量的形式来表达。

1. 矢量的投影.

设有矢量 $\overrightarrow{AB}$，u 为固定的另一有向直线(轴)。过点 A 和 B 分别作平面垂直于轴 u，交 u 于 A_1 和 B_1 两点，则称有向线段 $\overline{A_1B_1}$ 的值 A_1B_1 为 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影(图8-8)，记为

$$\mathrm{prj}_u\,\overrightarrow{AB} = A_1B_1.$$

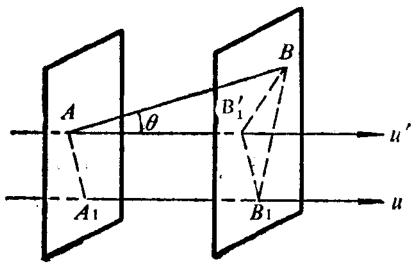

图 8-8

过点A引轴u'与u平行，且有相同的方向，交平面BB_1B_1'于B_1'，u'与$\overrightarrow{AB}$的夹角（即u与$\overrightarrow{AB}$的夹角）记为θ，于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{prj}_u\overrightarrow{AB} &= A_1B_1 = AB_1' = \|\overrightarrow{AB}\|\cos\theta \\ &= \|\overrightarrow{AB}\|\cos(\overrightarrow{AB},u') = \|\overrightarrow{AB}\|\cos(\overrightarrow{AB},u).\end{aligned}$$

其中$(\overrightarrow{AB},u')$、$(\overrightarrow{AB},u)$分别表示$\overrightarrow{AB}$与轴u'及u的夹角．由此得出结论：

矢量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影等于矢量的模乘以轴与矢量间的夹角的余弦

当$\overrightarrow{AB}$与其投影轴成锐角时，投影取正值；成钝角时，投影取负值．同时，不难知道，相等的矢量在同一轴上的投影是相等的；诸矢量的和在某一轴上的投影，等于各矢量在同一轴上的投影的和，即

$$\mathrm{prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n) = \mathrm{prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{prj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

例如，由图 8-9，因为

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{a}_6,$$

$$\mathrm{prj}_u\boldsymbol{a}_6 = A_1A_6\ ,$$

$$\mathrm{prj}_u\boldsymbol{a}_1 = A_1A_2,\cdots,\mathrm{prj}_u\boldsymbol{a}_5 = A_5A_6\ ,$$

而$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_5A_6=A_1A_6$，故有 $\mathrm{prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+$

$\boldsymbol{a}_5) = \mathrm{prj}_u\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \mathrm{prj}_u\boldsymbol{a}_5 = A_1A_6$.

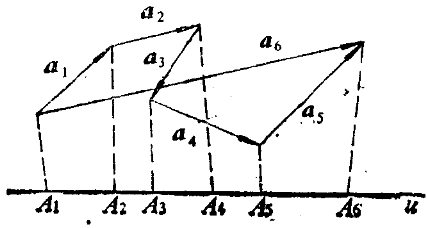

图 8-9

2. **矢量的坐标。**

设矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的起点 o 是直角坐标系的原点（这时矢量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M 的矢径），而终点 M 的坐标（图8-10）：

$$OA = x,\ OB = y,\ OC = z.$$

因

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{ON},\quad \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM},\quad \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OC},$$

故有

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \tag{8.3}$$

即矢量 $\overrightarrow{OM}$ 被分解成三个与坐标轴共线的矢量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的和，它们分别称为矢量 $\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的分矢量。

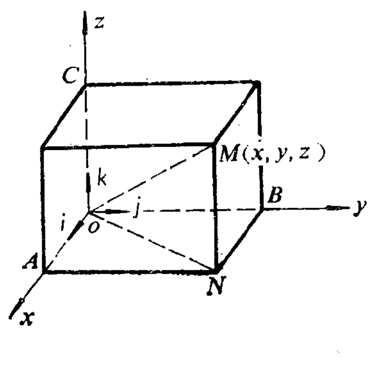

图 8-1

今以原点为起点，分别在三个坐标轴上取三个单位矢量，其