

高等数学

(中 册)

余国钧 主编

贺志贤 杨林锡 罗媛芳 刘国钧 编



华中工学院出版社

高等数学(中册)

余国钧 主编

贺志贤 杨林锡 罗媛芳 刘国钧 编

责任编辑 李立鹏

◆

华中工学院出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中工学院出版社印刷厂印刷

◆

开本: 850×1168 1/32 印张: 8.125 字数: 186 000

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数: 1—6 000

ISBN 7-5609-0142-5/O·18

统一书号: 13255—084 定价: 1.38元

内 容 提 要

本书是根据现行高中数学课程开设的状况，及工科专业的教学需要而编写的。全书分上、中、下三册出版。中册内容有 矢 量 代 数，空间解析几何，矢性函数，多元函数微分学，重积分等。每章都有习题，书末有答案及部分习题提示。

本书可作为高等工业学校“高等数学”的教材或参考书，也可供部分理科专业的读者参考。

目 录

第八章 矢量代数	(1)
§8.1 矢量概念.....	(1)
8.1.1 空间直角坐标系	(1)
习题8-1	(4)
8.1.2 矢量的概念	(5)
8.1.3 矢量的线性运算	(6)
8.1.4 矢量的坐标和方向余弦	(8)
习题8-2	(16)
§8.2 矢量的乘法.....	(17)
8.2.1 两矢量的数量积	17)
8.2.2 两矢量的矢量积	(21)
8.2.3 三个矢量的乘积——混合积与三重矢积	(26)
习题8-3	(31)
第九章 空间解析几何	(34)
§9.1 曲面的方程与曲线的方程.....	(34)
9.1.1 曲面的方程	(34)
9.1.2 空间曲线的方程	(38)
9.1.3 投影曲线与投影柱面	(40)
习题9-1	(41)
§9.2 平面方程.....	(42)
9.2.1 平面方程的各种形式	(42)
9.2.2 有关平面的一些基本问题	(46)
习题9-2	(50)
§9.3 直线方程.....	(51)
9.3.1 直线方程的各种形式	(51)
9.3.2 两直线的相互关系	(54)

9.3.3 有关直线与平面的问题	(57)
§9.4 平面束的方程	(59)
习题9-3	(61)
§9.5 二次曲面	(63)
习题9-4	(74)
第十章 矢性函数	(77)
§10.1 实变量的矢性函数	(77)
§10.2 矢性函数的极限与连续性	(80)
§10.3 矢性函数的导数	(83)
§10.4 矢性函数的积分	(86)
习题10-1	(89)
§10.5 矢性函数的几何应用	(91)
10.5.1 曲线的长	(91)
10.5.2 曲线的切矢量和主法矢量	(92)
10.5.3 空间曲线的曲率	(95)
§10.6 矢性函数的物理应用	(96)
10.6.1 曲线运动的速度和加速度	(96)
10.6.2 加速度的切向分量和法向分量	(99)
习题10-2	(101)
第十一章 多元函数微分学	(103)
§11.1 多元函数的极限与连续性	(103)
11.1.1 多元函数概念	(103)
11.1.2 二元函数的极限	(106)
11.1.3 二元函数的连续性	(108)
习题11-1	(110)
§11.2 偏导数与全微分	(111)
11.2.1 偏导数	(111)
11.2.2 全微分	(118)
习题11-2	(122)
§11.3 复合函数微分法	(124)
习题 11-3	(133)

§11.4 隐函数及其求导法	(134)
11.4.1 由一个方程确定的隐函数	(134)
11.4.2 由方程组确定的隐函数	(137)
习题 11-4	(141)
§11.5 偏导数的几何应用	(143)
11.5.1 空间曲线的切线和法平面	(143)
11.5.2 曲面的切平面和法线	(146)
习题 11-5	(149)
§11.6 方向导数与梯度	(149)
习题 11-6	(155)
§11.7 二元函数的泰勒公式	(156)
习题 11-7	(160)
§11.8 多元函数的极值	(160)
习题 11-8	(168)
§11.9 条件极值	(168)
习题 11-9	(176)
§11.10 含参量的积分	(177)
习题 11-10	(182)

第十二章 重积分 (184)

§12.1 二重积分的概念和性质	(184)
12.1.1 二重积分概念的引入	(184)
12.1.2 二重积分的定义	(186)
12.1.3 二重积分的性质	(187)
§12.2 二重积分的计算	(189)
12.2.1 利用直角坐标系计算二重积分	(189)
12.2.2 二重积分的变量替换	(196)
习题 12-1	(205)
§12.3 三重积分	(207)
12.3.1 三重积分的概念	(207)
12.3.2 三重积分的计算	(208)
习题 12-2	(223)
§12.4 重积分的应用	(225)

12.4.1	曲面的面积.....	(225)
12.4.2	重心.....	(228)
12.4.3	转动惯量.....	(230)
12.4.4	引力.....	(232)
	习题12-3.....	(234)
习题答案		(235)
习题提示		(248)

第八章 矢量代数

由于力学、物理以及其他技术科学的需要，要求我们考虑一种新的量——矢量。对于数学本身来说，它也是一个重要的工具。本章，将介绍矢量的代数运算，即矢量的加法、减法和乘法运算。至于矢量的分析运算，即矢量的微分、积分的运算，将在以后介绍。

§8.1 矢量概念

8.1.1 空间直角坐标系

我们知道，平面上的点可和一有序数偶 (x, y) 建立一一对应的关系，这是平面解析几何的出发点。为了能用代数的方法来研究空间的几何图形，我们要建立空间中的点和数之间的对应关系。为此，我们首先要建立空间直角坐标系。

任意选取空间某点 O 作为参考点，通过点 O 作三条互相垂直的有向直线 ox, oy, oz ，它们的方向通常是按照所谓右手规则确定的(图8-1)，即，若将右手的拇指和食指分别指着 ox 和 oy 的正方向，则中指所指的方向即为 oz 的正方向。在直线 ox, oy, oz 上选取单位长度(通常在这三条直线上所取的单位长度是相同的)。这样，我们就在空间建立了直角坐标系。参考点 O 称为**坐标原点**，直线 ox, oy, oz 称为**坐标轴**(分别简称为 x 轴， y 轴， z 轴)。三个坐标轴中每两个决定一个平面，即 xoy, yoz, zox 平面，它们两两互相垂直，称为**坐标平面**。

现在，我们用数来确定空间任意一点的位置。

设 M 是空间任意一点，过点 M 作三个平面分别平行于坐标平

面 yoz, zox, xoy ，它们和坐标轴 ox, oy, oz 分别交于 A, B, C 三点。点 A 在 x 轴上的坐标为 x ，点 B 在 y 轴上的坐标为 y ，点 C 在 z 轴上的坐标为 z ，于是，空间任意一点 M 唯一地对应着这样有次序的三数组 (x, y, z) 。反之，任意有次序的三数组 (x, y, z) 一定唯一地对应空间的一个点，我们只要分别在坐标轴 ox, oy, oz 上决定三点 A, B, C ，使得有向线段的值 $oA = x, oB = y, oC = z$ ，然后通过 A, B, C 三点分别作平行于坐标平面的三个平面，这三个平面的交点 M 便是唯一对应于有序数组 (x, y, z) 的点。因此，空间的一个点 M 就与一个有序数组 (x, y, z) 建立了一一对应关系。我们称 (x, y, z) 为点 M 的**直角坐标**， x, y, z 分别称为点 M 的**横坐标**，**纵坐标** 和 **竖坐标**。

三个坐标平面 xoy, yoz, zox 将空间划分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**，而卦限的顺序按表8-1区分。

表 8-1

卦限	x	y	z
I	+	+	+
II	-	+	+
III	-	-	+
IV	+	-	+
V	+	+	-
VI	-	+	-
VII	-	-	-
VIII	+	-	-

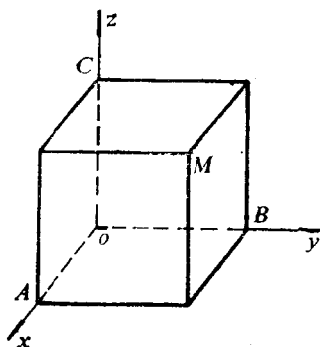


图 8-1

如果点 M 在坐标平面 xoy 上，那末点 M 的竖坐标 $z = 0$ ；在坐标面 yoz 上的点，它的横坐标 $x = 0$ ；在坐标面 zox 上的点，它的

纵坐标 $y=0$ ，如果点 M 在 x 轴上，那末 $y=z=0$ ；同样，对于 y 轴上的点，坐标 $z=x=0$ ；对于 z 轴上的点，坐标 $x=y=0$ ，坐标原点的坐标是 $(0, 0, 0)$ 。

在空间直角坐标系中，我们来讨论两个简单问题。

1. 坐标轴的平移

设点 M 关于坐标系 $oxyz$ 的坐标是 (x, y, z) 。新坐标系 $o'x'y'z'$ 的轴 $o'x'$ 、 $o'y'$ 、 $o'z'$ 顺次平行于轴 ox 、 oy 、 oz ，并且分别指着同一方向(图 8-2)、设点 o' 关于旧系的坐标是 a, b, c ，今用 x' 、 y' 、 z' 表示点 M 关于新系的坐标。

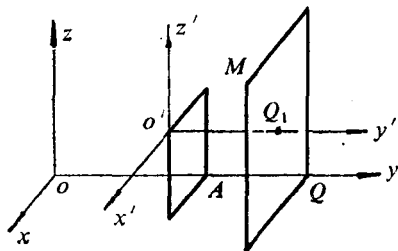


图 8-2

设 A 是点 o' 在轴 oy 上的投影， Q 和 Q_1 是点 M 在轴 oy 和 $o'y'$ 上的投影，那末

$$oQ = oA + AQ = oA + o'Q_1,$$

但

$$oQ = y, \quad oA = b, \quad o'Q_1 = y',$$

所以

$$y = b + y'.$$

同样，若把点 o' 和点 M 投影到轴 ox 及 oz 上，就得到

$$x = a + x',$$

$$z = c + z'.$$

因此，我们就得到在坐标轴的平移下用新系坐标表示旧系坐标的

公式:

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'. \quad (8.1)$$

若用旧系的坐标表示新系的坐标, 则有

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c. \quad (8.1)'$$

2. 两定点间的距离.

(1) 设点 M 的坐标是 x, y, z , 那末, 点 M 到原点 O 的距离就是三棱之长为 $|x|, |y|, |z|$ 的长方体的对角线的长 (图 8-1). 若以 d 表示这距离, 则

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

由此, 我们得点 $M(x, y, z)$ 到原点 O 的距离公式为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (8.2)$$

(2) 设两已知点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$. 如果把坐标原点移到点 M_1 处并平移坐标轴而保持轴的方向, 则点 M_1 关于新坐标系的坐标是 $(0, 0, 0)$, 而点 M_2 关于新系的坐标是 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, 由公式 (8.2), 得到

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (8.2)'$$

这就是两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离公式.

习 题 8-1

1. 求定点 (a, b, c) 关于: (1) 各坐标平面, (2) 各坐标轴, (3) 坐标原点的对称点的坐标.

2. 求点 $A(4, -3, 5)$ 到坐标原点及各坐标轴的距离.

3. 已知四点: $(0, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 0, 6)$, 求通过这四点的面球的半径.

4. 求点 $A(1, -3, 2)$ 关于点 $M(-1, 2, 1)$ 的对称点 B 的坐标.

5. 在 z 轴上求一点, 使它到点 $(-4, 1, 7)$ 和点 $(3, 5, -2)$ 距离相等.

6. 在 yoz 平面上求一点, 使得它到点 $(3, 1, 2)$, $(4, -2, -2)$ 和点 $(0, 5, 1)$ 距离相等.

7. 四面体的顶点是 $A(-7, 3, -2)$, $B(0, 2, 1)$, $C(4, -1, 0)$ 和 $D(-1, 0, -3)$, 平移坐标轴将坐标原点移到点 $M(6, -2, 1)$, 试求四面体顶点的新坐标。

8.1.2 矢量的概念

在客观世界里, 我们常遇到两类不同性质的量。一类是只具有大小的量, 称为**数量**, 例如质量、温度、时间、面积等; 另一类是不仅具有大小, 而且还有方向的量, 称为**矢量**, 例如力、速度、加速度等。

对于**矢量**, 我们常用空间的一有方向的线段(有向线段)来表示(图8-3)。线段的长度表示所论矢量的大小, 称为此矢量的**模**或**长度**, 箭头的方向即矢量的方向。点 A 叫做矢量的起点, 点 B 叫做终点。以 A 为起点、 B 为终点的矢量记作 $\overrightarrow{AB}$, 它的模记为 $\|\overrightarrow{AB}\|$ 。矢量也可用粗体字母 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 表示。

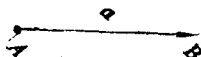


图 8-3

起点固定的矢量, 称为**固定矢量**。例如, 我们谈到某一质点的运动速度时, 速度就和所考虑的质点的位置有关, 这时, 速度就是固定矢量。

起点可以在矢量所在直线上任意移动的矢量, 称为**滑动矢量**。例如, 作用在一刚体上的力就是滑动矢量, 因为它可以在刚体中力的作用线上任意移动, 而对刚体的效果是一样的。

在数学中, 一般只考虑矢量的大小和方向, 而不计较其起点的位置。这种矢量称为**自由矢量**(以后简称为**矢量**)。因为自由矢量可以平行移动, 所以, 如果二矢量满足以下两个条件: (1) 长度相等, (2) 方向相同, 就称这两个矢量是**相等的**。

如果矢量的模等于 0 (即矢量的起点和终点重合), 称为**零矢量**记作 0 。零矢量可以认为具有任一方向。

8.1.3 矢量的线性运算

1. 矢量加法

根据力学中的力、速度等的平行四边形法则，我们定义二矢量的和如下：

定义 设有不平行二矢量 a, b ，将这两个矢量平行移动到以空间某点 O 为起点(图8-4)，以这两个矢量作相邻两边的平行四边形的对角线矢量 $\overrightarrow{OC}$ ，定义为矢量 a, b 的和，记作 $a+b$ 。

按照这个定义确定矢量的和的方法，称为平行四边形法则。

由图8-4可以看出，

我们也可以将矢量 b 平行移动，使矢量 b 的起点和矢量 a 的终点重合，那末从矢量 a 的起点到矢量 b 的终点所作的矢量就是矢量 a, b 的和 $a+b$ 。这种求矢量和的方法，称为三角形法则。

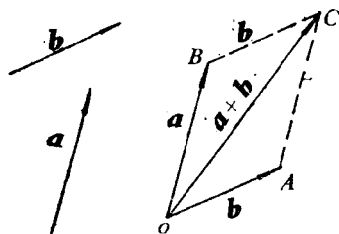


图 8-4

如果 a, b 为平行矢量，则可按三角形法则求和。

利用三角形法则，

可以将两矢量求和的方法推广到求任意有限个矢量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的和(图8-5)：平移矢量 a_2 ，使它的起点和 a_1 的终点重合，再平移矢量 a_3 ，使它的起点和 a_2 的终点重合，...这样继续下去，

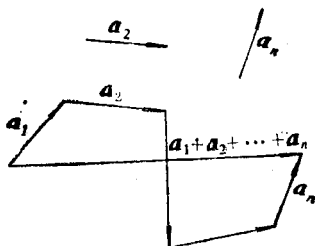


图 8-5

最后平移 a_n ，使它的起点和 a_{n-1} 的终点重合。从矢量 a_1 的起点到矢量 a_n 的终点所作的矢量，就是矢量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的和 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

实数加法有两个基本规则：交换律，结合律。对于矢量加法，这两个规则也同样成立。

(1) **交换律**： $a + b = b + a$ 。这可直接从定义推出。

(2) **结合律**： $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$ 。这只要从图 8-6 就可以看出。

由于矢量的加法既满足交换律，又满足结合律，所以三个矢量，或一般地任意有限个矢量的和，与它们相加的先后次序无关。

2. 矢量减法

减法是加法的逆运算。如果 $a = b + c$ ，那末 c 就称为 a 与 b 之差，或 b 是 a 与 c 之差，分别记为

$$c = a - b \quad \text{与} \quad b = a - c.$$

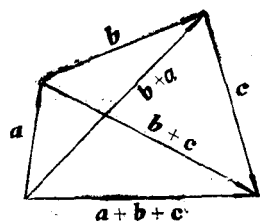


图 8-6

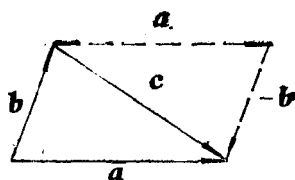


图 8-7

由矢量的加法法则可以得到矢量的减法法则(图8-7)：将矢量 a 及矢量 b 的起点重合，由矢量 b 的终点指向矢量 a 的终点的矢量 c 就是 $a - b$ 。

如果 $b + c = 0$ ，那末定义 $c = -b$ ，即矢量 c 和矢量 b 的大小相等，指向相反，我们称 c 为 b 的**逆矢量**。

故

$$a - b = a + (-b).$$

3. 数量与矢量的乘法

定义 已知矢量 $\mathbf{a}$ 和数量 m , 它们的乘积 $m\mathbf{a}$ (或 $\mathbf{a}m$) 是这样的一个矢量, 它的模等于矢量 $\mathbf{a}$ 的模与 $|m|$ 的乘积, 即 $\|m\mathbf{a}\| = |m| \cdot \|\mathbf{a}\|$; 它的方向平行于矢量 $\mathbf{a}$ 的方向, 如果 $m > 0$, 则 $m\mathbf{a}$ 的指向与 $\mathbf{a}$ 相同; 如果 $m < 0$, 则 $m\mathbf{a}$ 的指向与 $\mathbf{a}$ 相反; 如果 $m = 0$, 则 $m\mathbf{a}$ 是零矢量. 称 $m\mathbf{a}$ 为矢量 $\mathbf{a}$ 与数量 m 的数积.

很显然, 这样的数乘运算具有下列性质:

$$(1) (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a};$$

$$(2) \lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a};$$

$$(3) \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

从矢量与数量的乘法定义可以看出, 对于任何两个互相平行的矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 必有数量 λ 存在, 使得

$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b};$$

反之, 若上式成立, 则必有 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

模等于单位长度的矢量称为**单位矢量**. 记与 $\mathbf{a}$ 同方向的单位矢量为 $\mathbf{a}^\circ$, 则

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \mathbf{a}^\circ \quad \text{或} \quad \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \mathbf{a}^\circ$$

所以, 一非零矢量除以它的模, 即得与它同方向的单位矢量.

8.1.4 矢量的坐标和方向余弦

以上介绍的矢量的运算都是用几何方法进行的, 如果重复地进行多个矢量的加减与数乘, 势必会感到繁琐和难于辨认. 为了适应实际应用的需要, 我们把矢量用数量的形式来表达.

1. 矢量的投影.

设有矢量 $\overrightarrow{AB}$, u 为固定的另一有向直线(轴). 过点 A 和 B 分别作平面垂直于轴 u , 交 u 于 A_1 和 B_1 两点, 则称有向线段 $\overline{A_1B_1}$ 的值 A_1B_1 为 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影(图8-8), 记为

$$\text{prj}_u \overrightarrow{AB} = A_1B_1.$$

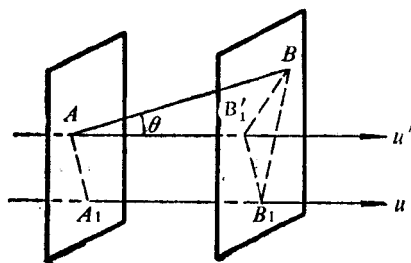


图 8-8

过点 A 引轴 u' 与 u 平行, 且有相同的方向, 交平面 BB_1B_1' 于 B_1' , u' 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角 (即 u 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角) 记为 θ , 于是有

$$\begin{aligned}\text{prj}_u \overrightarrow{AB} &= A_1B_1 = AB_1' = \|\overrightarrow{AB}\| \cos \theta \\ &= \|\overrightarrow{AB}\| \cos(\overrightarrow{AB}, u') = \|\overrightarrow{AB}\| \cos(\overrightarrow{AB}, u).\end{aligned}$$

其中 $(\overrightarrow{AB}, u')$ 、 $(\overrightarrow{AB}, u)$ 分别表示 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 u' 及 u 的夹角。由此得出结论:

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于矢量的模乘以轴与矢量间的夹角的余弦

当 $\overrightarrow{AB}$ 与其投影轴成锐角时, 投影取正值; 成钝角时, 投影取负值。同时, 不难知道, 相等的矢量在同一轴上的投影是相等的; 诸矢量的和在某一轴上的投影, 等于各矢量在同一轴上的投影的和, 即

$$\text{prj}_u(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \text{prj}_u a_1 + \text{prj}_u a_2 + \cdots + \text{prj}_u a_n.$$

例如, 由图 8-9, 因为

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = a_6,$$

$$\text{prj}_u a_6 = A_1A_6,$$

$$\text{prj}_u a_1 = A_1A_2, \cdots, \text{prj}_u a_5 = A_5A_6,$$

而 $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_5A_6 = A_1A_6$, 故有 $\text{prj}_u(a_1 + a_2 + \cdots +$

$$a_5) = \text{prj}_u a_1 + \dots +$$

$$\text{prj}_u a_5 = A_1 A_6.$$

2. 矢量的坐标.

设矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的起点 O 是直角坐标系的原点(这时矢量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M 的矢径), 而终点 M 的坐标(图8-10):

$$OA = x, OB = y, OC = z.$$

因

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{ON}, \quad \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OC},$$

故有

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \quad (8.3)$$

即矢量 $\overrightarrow{OM}$ 被分解成三个与坐标轴共线的矢量 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的和, 它们分别称为矢量 $\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的分矢量.

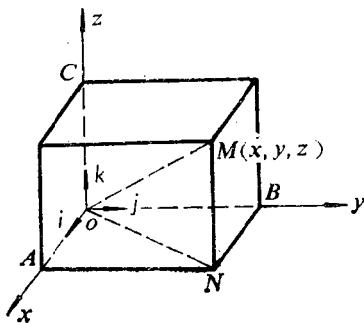


图 8-1

今以原点为起点, 分别在三个坐标轴上取三个单位矢量, 其