思维与数学教学

郭思乐

人民教育出版社

思维与数学教学

郭思乐 编

人民教育出版社

思维与数学教学

郭思乐 编

*

人民教育出版社出版发行

新华书店总店科技发行所经销

北京市房山区印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32　印张8　字数 157000

1991年6月第1版　1991年6月第1次印刷

印数　1—2,600

ISBN 7-107-10745-3

G·2099　定价2.70元

《思维与数学教学》序

思维，很早就为人们所重视，所推崇．因为人类的一切发现和发明创造，都是思维的结果．于是人们寻找能够训练和发展思维的东西，并找到了数学．二千多年来，欧几里得几何担负着培养一代又一代人的思维的任务．教育史上的形式教育者就是主张用数学来训练人们的思维；加里宁曾用“数学是思维的体操”来鼓励中学生要好好学习数学．

形式教育把思维作为教育目的，数学只是手段，数学本身作为认识世界和改造世界的实用价值被忽视了．而且，他们通过数学的学习使思维得到发展的方法，主要就是“熟能生巧”．这样，把数学引上了没有生机的证解各种烦琐问题的道路．“几何无王道”，它说明学习数学必须付出艰辛的思维劳动，也说明数学只能为少数能达到“生巧”的人所掌握．

工业革命的兴起，历史呼唤知识要为发展工业服务．笛卡儿宣称：“我决心放弃那个仅仅是抽象的几何．这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来训练思想的问题．我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何．”解析几何发明了，并由此引发了微积分的产生．这是数学发展史上的一个伟大转折．数学成了认识世界和改造世界的锐利武器．这时候，产生了实质教育的观点．实质教育者提出用实用的尺度衡量知识的价值，要求学校应该学习有实际价值的知识．这当然也有其一定的理由：数学除了本身具有实用价值外，它还是学习其他实课课程——物理、化学等的工具．

这时，数学从一个侧面——训练思维的作用，转到了另一个侧面——观察和改造自然的作用，学习数学知识和技能，成了教学的主要目的。

思维需要数学，数学需要思维．形式教育和实质教育各执一端，但他们都未能正确解决知识和能力的关系。

新技术革命的兴起与发展，知识增长的速度加快，科技对发展生产所起的作用增大，培养和发展学生的创造能力成为教育界的中心课题．70年代末，党中央提出把国家工作转移到以经济建设为重点的轨道上来以后，能力问题立即成为全国教学改革的重点．理所当然地，数学教育工作者敏锐地觉察到它对数学教育的意义和重大的责任．1980年，以能力为中心的学术讨论会在沈阳举行，提出思维能力是数学诸能力的核心．从此，数学教学突破了“双基”的框框，要求在学习数学知识的过程中，更加自觉、更加有效地培养和发展学生的能力，特别是具有创造功能的思维能力．于是以培养和发展学生思维能力为主要目标的教学改革实验研究，在我国广泛开展起来。

顺应这种形势，中国教育学会数学教学研究会在1984年第2届年会上，为使全国在这方面有研究兴趣的同志能够有相互交流、相互激励的机会和场合，决定成立“思维与数学教学“专题协作组，并委托广东省和华南师大教育科学研究所负责．该所郭思乐同志具体主持这个协作组的工作，1986年和1988年已召开了两次研讨会，取得了一批初步成果，推动了“思维与数学教学”实验研究的发展．郭思乐同志的《思维与数学教学》就是这些成果之一。

《思维与数学教学》从教学中的思维教育的宏观角度，系

统而有重点地探讨了思维与数学问题解决的诸方面，论述了建立良好知识结构对发展思维能力的重要意义，提出了加强思维过程的课堂教学结构改革的建议．书中使用了相当数量的课例、例题和思维——教学心理实验等材料，把理论与实际结合起来．本书对数学教学如何发展学生思维能力，既有启迪作用，又有实践意义．

作者在本书中提出了思维场的概念，认为数学教学不是直接作用于个体的思维，而是作用于思维的条件系统——思维场．由此提出调动学生进行积极思维的教学，在于帮助学生形成对于某个问题的思维场，使他们产生对解决问题的积极的心向；同时，为他们准备必要的知识和经验，使外部刺激同学生内部条件形成恰当的差距，从而激发和激励学生的思维活动．这一见解，实际上涉及了在思维教育中靠“启迪”为主还是靠“传授”现成的思维方法为主的基本问题．

作者运用图论的原理，用思维图把解决问题的思维过程表示出来．这首先是找到了一种有前景的简明扼要地反映思维的作图工具，方便于进行思维教育．同时，也有利于对思维的短时记忆进行储存和运演．学生思维受阻，有时是由短时记忆的失落和紊乱造成的，而思维图就可帮助解决这种问题．作者对数学思维的策略和数学基本方法进行了讨论，把思维策略分为升格、降格、缩格、更格、分格等，并使之与数学基本方法对应起来，使人们看到其互为表里的关系，并进而揭示各种策略的共同本质是把新问题转向语言丰富域．作者把这种讨论形象地与思维图结合起来．这不仅对教师的教学有所启发，而且为学生寻找解题思路和方法提供了基本依据．

数学教学要给学生建立合理的知识结构，这是作者探讨的又一个问题．事实上，题海的教学，不仅加重学生负担，而且冲击或破坏了知识的整体结构，导致结构的紊乱无序．作者从理论上指出了题海教学的弊端．

作者把数学思维活动区分为发现性思维和整理性思维，认为发现性思维不仅是科学发明的“智慧之窗”，而且是教学的“诱导之门”．这为我们进行启发式教学指出了一条途径．

综合以上论述，本书在最后提出建立加强思维过程的课堂教学结构，即加强概念的形成过程，结论的探究和推导过程，以及方法的思考过程的教学结构，给学生以思维的时间和空间，把传授知识和培养思维能力结合起来．

可以看出，作者是紧紧围绕着数学教学来进行思维分析的，即从学生学习数学过程中的思维的发生、发展进行分析，因而它对数学教学具有实际意义．

数学教育发展到今天，从学生学习数学研究思维的发生与发展，从而研究数学教学的原理和方法，正如作者在其前言中所指出的，是一个需求迫切、课题众多、前景广阔而又刚刚起步的研究领域．本书的公开发表，不仅对数学教学有实际意义，而且可以引起对书中提出的一些概念和论点的讨论，更为重要的是引起对众多课题的探索与研究．比如，数学思维水平是怎样随着数学学习和年龄增长而发展的，不同学生思维发展的差异，思维受阻的原因及其排除等等课题的研究，在教育日益普及的形势下已显得日益迫切和重要．故而乐之为序，将《思维与数学教学》推荐给数学教育界的同行们．

张孝达　　1990年6月15日

前　言

思维作为数学教学的重要问题，已日益引起人们的注意．这种注意大概是从解题怎样才能快些好些开始的．近年来，人们透过数学教育对思维的依赖和对思维的培养作用，把问题的涉及面扩大到为什么要学数学这上面来，从而，由思维问题辐射出有关教育目的、教学思想、教材编写、教学方法、考试改革等一系列重大课题．而当从这些宏观的课题的研究中返观怎样解题的时候，就高屋建瓴地对解题中如何培养思维能力有了新的认识．可以说，关于思维与数学教学的研究，使整个数学教学改革变得更加活跃、更加深入了．人们认识到，数学学科之所以从小学一年级到大学，令人学此不疲，其原因决不是因为全部教育对象都将成为数学专门工作者，也不仅仅因为数学是工具，而还在于数学在培养思维能力方面独具品质，它是受教育者的重要文化基础．如果我们留意各行各业的某些专门家或一般工作者，感到他们思维敏锐，逻辑性强，概念精确，说理透彻的时候，往往可以追踪到他们在中小学所受的数学教育对他们的熏陶．

然而，数学学科的这一特殊功效，并未完全被数学教育工作者意识到．这表现在数学教学中，对学生的思维规律的研究还比较缺乏；许多时候，数学知识未被用来启迪思维，豁达

人们的头脑，而是相反，被不自觉地用来封闭人的头脑；数学教学没有按照人们的思维规律展开；等等. 在数学教学中的思维研究，也往往多就(外部)题目和结构去谈论学生应当怎样思维，而缺少对(内部)认识结构的讨论，更缺少对两者结合起来的人的认知结构的研究. 因之，思维与数学教学是一个需求迫切、课题众多、前景广阔而又刚刚起步的研究领域.

中国教育学会数学教学研究会有虑及此. 在1985年成立了思维与数学教学专题协作组，分别在1986年3月份和1988年4月，召开了第一次和第二次学术讨论会. 在会议上发表了80余篇论文. 在参与学术讨论会和协作组工作的过程中，我深深感到这一课题的重要性和丰富性. 会后，承蒙出版社的同志和许多同志的鼓励，勉为其难地把近年来我对思维与数学教学的一些研究成果，撷要成书，以作为向思维与数学教学研究工作者以及向中学数学教师的一项汇报.

考虑到按解题思路或具体解题方法归类的书，已经出了不少，许多思维形式的知识，以及关于思维的分类、思维的品质等等，都可以在有关的书籍中找到，所以本书不作过多的论述. 本书把重点放在宏观方面，着重从思维的角度谈论数学教学思想、教学过程和教学目标等问题. 我们认为，具体的方法应当让教学工作者去创造. 当有着合乎教学规律、顺乎“四化”需要的教学思想指导的时候，在具体方法的园地里，就会万紫千红，奇葩璀璨. 当然，宏观课题决不是空洞的离开实践的课题，而是更概括地反映实践中问题的课题. 它应当也可能得到实际材料的有力支持. 所以，本书中又使用了相当数量的课例、例题和思维—教学心理实验的材料，去反映理论观

点. 此外，本书列入的“数学思维的图论方法”一章，使用了一些图论的术语，读者如感不便，可跳过去而不影响对其他章节的阅读.

本书的第一章，反映了思维与数学教学的关系.第二章，阐述了“思维场”的观点，指出教师在培养学生思维方面所做的，主要是作用于思维场，思维主要靠启迪而不是靠传授. 同时，在第二章第三节的第 2 个问题中，带出了以后几章的纲领，是阅读后面几章的线索. 第三章反映了形成思维场的重要组成部分——问题情境和动机. 由于记忆也是思维场的组成部分，我们在第四章通过对思维的工作间——短时记忆的讨论，提出了改善短时记忆的措施. 数学思维的图论方法，有助于短时记忆的改善，但其思维教育作用则不止于此，我们把它列入第五章作了稍详细的介绍. 第六章通过列举策略和数学基本方法，剖析出策略的共同点是把新问题转入长时记忆中的语义丰富域. 第七章反映了语义丰富域——知识结构的意义和办法. 第八章着重对发现性思维——把新问题转到语义丰富域的关键一着——的意义、特征、原则等作出阐述. 第九章则反映了推迟判断，加强思维过程的课堂结构改革.

本书曾作为我在香港大学教育学院讲学的主要材料，其主要内容曾在有关省、市向数学教育研究工作者和数学教师作过讲演，并得到许多专家和同行朋友的启发. 本书并作过华南师范大学数学系、计算机科学系、心理系、教育系等系学生“思维与数学教育”公共选修课的讲义.

本书在酝酿和编写过程中，得到钟善基先生、张孝达先生、丁尔升先生、曹才翰先生、刘远图先生、戴再平先生的指

点．特别是人民教育出版社数学室副主任蔡上鹤副编审详细校阅了本书书稿，提出了许多改进的意见．在我 1989—1990 年初访问苏联期间，苏联教育科学院教学内容与方法研究所副所长 B. B. 费尔索夫先生也对本书提出了很好的建议．广东省特级教师谭保夏老师、谢国生老师，广州市教研室高级教师郭伟才同志，市 30 中高级教师黄国昭老师，都曾对本书初稿提出建议．此外，广州市第 19 中学陈自玲老师、广西钟山县西湾中学黄国峰老师，以及江苏常州、广东省梅州市、珠海市香州区等市县的一批加强数学知识发生过程教学实验点的老师，都给了我很大帮助．广州市第 48 中学林少杰老师，协助我设计和实施了多项思维—教学—心理实验．本书并学习和采用了一些报刊杂志中的观点或资料，未能一一列出文目，在此，谨向有关的同志、作者致谢．

万物初生，生意盎然．然而万物初生，其形多丑．尽管思维是一个十分古老的话题，但联系到现代教学理论和认知心理学，把它同数学教学结合起来讨论，则为时未久，还存在许多需要探讨的问题．作为作者，也还来不及学习和吸收同行中的许多先进成果，在这种情况下写成此书，难免失之仓促，加上作者水平所限，不足之处一定不少，望读者多多提出宝贵意见．虽然如此，如果本书能带给读者一些新的信息，能引起讨论，引发兴趣，那么，作者的初衷也就获得报偿了．

郭　思　乐

1990 年 6 月于华南师范大学

目　录

第一章

思维——数学教学的核心问题

第一节 数学是思想的体操

数学是研究空间形式和数量关系的科学. 数学因其精深博大、华严之美而光彩夺目. 数学在规定了所述对象的名称及依据的规律后,便可以揭示出这些对象的名称、规律之间的关系,也就是可用于解决数学问题. 解决数学问题的过程,是一种数学思维过程. 正如日本数学家矢野健太郎指出的:"当我们回顾数学的产生过程,我们会知道其本质不是计算和技巧的历史,而是思想方法的历史,思想的历史. 对于将来从事科学技术的人来说,虽然有时是不能忽视数学上细致的计算和技巧的,但这对于一般人来说,并不是绝对需要的……,数学的历史,可以看作是一个巨大的思想的历史,它呈现了一个完整的、连贯的演变过程,这个演变过程,对科技工作者,对一般的人,都会引起充分的兴趣."数学思维具有抽象、严密、系统的特点,因而人们称数学为"思想的体操".

思维是一种能动地、概括地解决问题的意识活动．由于客观物质世界的复杂性，一种正常的思维，总是依据认识目的删削对象，使之显示本质，然后在事物的本质联系的水平上，运用逻辑工具去解决问题，这就是抽象——逻辑运演——具体的解决问题过程．由此，人类的思维具有概括性、间接性、逻辑性和生产性．人类的思维不能把对象原封不动地放入“思维机器”里去运演，而必须进行概括，把所论事物的一般属性或本质属性联合起来考察，去粗取精，去伪存真，形成概念——思维的细胞，才能开展有关的思维活动，这就是思维的概括性．人类的思维把事物映射到有关思维机器中，通过运演，再反演到事物中去解决问题，即以间接的方式去解决问题，这就是思维的间接性．我们之可以思绪万千，纵横万里，上下千年，都受惠于思维的这种间接性．人类的思维不是胡思乱想，而必须按照一定的形式，依据一定的规律，这就是思维的逻辑性．思维总是通过一定的过程，而获得一些新的结果，这一结果对思维者本身来说，有着新的质，这就是思维的生产性。

正是由于和思维的这些特征相吻合，使作为基础教育学科的数学，具有了培养思维能力的特殊的地位与作用。

著名数学家莱布尼兹说过，数学的“作用不仅在于承认前人的功绩，使别的人盼望日后获得同样的赞赏，它的作用更在于促进发现的艺术，并且通过这些光辉的例子，使大家了解获致新发现的方法”．

首先，数学本身具有很强的概括性．内容的高度抽象是数学的主要特征之一．可以说，数学的发展就是从空间形式

和数量关系上对对象不断抽象概括的过程. 数学史可以分为三大阶段. 在产生几何的第一阶段，物体的具体的质被舍去了；在向引入文字记号的代数发展的第二阶段，具体的数与具体的量被舍去了；最后，向现代数学的第三阶段进展，不仅仅是对象的具体特性，甚至它们的依存关系也被舍去了. 例如乘法运算，不仅包括数积、向量的积、集合的积(集合的交)，甚至更进一步考虑到命题的积等等.

正由于数学是在不断提高概括的水平上进行思维运演的，所以，它的新发现常常作为思维的精妙创造物而脍炙人口，成为传世不朽的杰作. 一个简单的事实是，一个数学家，他从感性认识上升到理性认识后，便在理性水平上创造，从而大大突破了墨守成规的藩篱. 例如，关于小于 x 的素数个数的估计问题，最初给实践者的工具，只是"爱氏筛法". 这是古希腊数学家爱拉多塞尼发明的一种删除法. 例如，为了找到30以内的素数，可以采取以下步骤：

第一步，划去除 2 以外的 2 的所有倍数；第二步，划去除 3 以外的 3 的所有倍数；第三步，划去除 5 以外的 5 的所有倍数；这样做下去，直至划去除13以外的13的所有倍数，剩下的，便是1和素数了. 这种方法，在涉及的上限 x 相当大时，很难进行. 人们不难发现，这实际上是用构造的方法来揭示存在. 那么，能否不把这些素数找出来，而得出小于 x 的素数个数呢?挪威数学家布龙在本世纪 20 年代提出了容斥原理，它有助于解决这一问题. 事实上，如上所述，我们可以先得出 2 的倍数的合数个数， $N_2=\left[\frac{30}{2}\right]-1=14$，接着得出 $N_3=\left[\frac{30}{3}\right]-1=9$，

$N_5=\left[\frac{30}{5}\right]-1=5$，进而得出 $N_7=\left[\frac{30}{7}\right]-1=3$，$N_{11}=\left[\frac{30}{11}\right]-1=1$，$N_{13}=\left[\frac{30}{13}\right]-1=1$，$N_{17}=\left[\frac{30}{17}\right]-1=0$，$N_{19}=\left[\frac{30}{19}\right]-1=0$，$N_{23}=\left[\frac{30}{23}\right]-1=0$，$N_{29}=\left[\frac{30}{29}\right]-1=0$；继而得出 $N_{2,3}=\left[\frac{30}{6}\right]=5$，$N_{3,5}=\left[\frac{30}{15}\right]=2$，$N_{2,5}=\left[\frac{30}{10}\right]=3$，$N_{2,7}=\left[\frac{30}{14}\right]=2$，$N_{3,7}=\left[\frac{30}{21}\right]=1$，$N_{2,11}=\left[\frac{30}{22}\right]=1$，$N_{2,13}=\left[\frac{30}{26}\right]=1$，$N_{2,3,5}=\left[\frac{30}{30}\right]=1$.

按照容斥原理，可以求得小于 30 的素数的个数是

$$\begin{aligned}n&=(N-1)-[(N_2+N_3+N_5+N_7+N_{11}+N_{13}+N_{17}\\&\quad+N_{19}+N_{23}+N_{29})-(N_{2,3}+N_{2,5}+N_{2,7}+N_{2,11}\\&\quad+N_{2,13}+N_{3,5}+N_{3,7})+N_{2,3,5}]\\&=(30-1)-[(14+9+5+3+1+1+0+0+\\&\quad 0+0)-(5+3+2+1+1+2+1)+1]\\&=29-[33-15+1]=10(\text{个}).\end{aligned}$$

用这种方法，在 $x=30$ 的情况下，并不比用爱氏筛法更好一些，但由此反映的容斥原理，却有着广泛的应用.事实上，我们在计算 x 相当大的情况下小于 x 的素数个数的近似值时，就可以运用容斥原理. 对于上例，$x=30$，如果我们只观察主要部分 N_2, N_3, N_5，作出计算

$$\begin{aligned}n&\approx(N-1)-[(N_2+N_3+N_5)-(N_{2,3}+N_{2,5}+N_{3,5})\\&\quad+N_{2,3,5}]\\&=29-[(14+9+5)-(5+3+2)+1]\end{aligned}$$