计算几何导论

〔美〕F. P. 普雷帕拉塔　M. I. 沙莫斯 著

科学出版社

计 算 几 何 导 论

〔美〕F. P. 普雷帕拉塔
M. I. 沙 莫 斯 著

庄心谷 译

科学出版社

1 9 9 0

内容简介

本书是计算几何方面的一本教材. 它从算法设计和分析的角度，系统阐述了计算几何方面最近十年中的研究成果.

全书共分八章. 第一章为引言. 第二章介绍几何查找，其中包括点定位问题和范围查找问题中所用的方法. 第三章和第四章讨论凸壳的基本算法、凸壳的扩展和应用. 第五章和第六章介绍邻近问题的基本算法和邻近问题的变形、推广. 第七章讨论交，如平面应用中的凸多边形的交、星形多边形的交和线段的交，以及三维应用. 最后一章讨论矩形几何，其中包括矩形几何的应用，矩形并的度量和周长，矩形并的轮廓和闭包，矩形的交等有关问题. 各章都附有习题.

本书可作为计算机科学有关专业的教材，同时也可作为计算机辅助设计、计算机图形学、机器人等应用领域的专业人员的参考书.

Franco P. Preparata, Michael Ian Shamos
COMPUTATIONAL GEOMETRY
An Introduction
Springer-Verlag, 1985

计 算 几 何 导 论

〔美〕F. P. 普雷帕拉塔
M. I. 沙 莫 斯 著

庄心谷 译

责任编辑 刘晓融

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100707

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1990 年11月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1990 年11月第一次印刷 印张：15 3/4
印数：0001—1 650 字数：360 000

ISBN 7-03-001836-2/TP·134

定价： 15.00 元

中文版序言

在本书英文版发行后三年，欣喜地迎来了中文译本的出版．在此短短的时期中，计算几何的发展加快了．有些将近10年未解决的问题，或者已被完全解决，或者已作了卓越的工作．所以，我高兴地借中文版发行之机来改正我过去的陈述和短评．计算几何的研究工作从来没有像目前这样强有力，我希望本书能够促进逐渐增多的中国同行加入这个崇高竞争的行列。

F. P. 普雷帕拉塔

1988 年 10 月

序　言

本书的目的是将计算几何方面已发表的丰富的研究成果(大部分是过去10年中的)加以系统化．这门年轻的学科(以它的现时涵义由本书的作者之一沙莫斯如此命名）已引起学术界的巨大的研究兴趣，且它已由一大堆分散的成果逐渐变成一门成熟的学科．然而，计算几何达到成熟并不妨碍它仍然是许多科学问题的一个源头．

随着许多有效技巧的出现以及同组合和代数几何学相互有益的影响，这项研究工作达到了相当完善的水平，这就要求以教学法的观点把当前发表的成果组织起来．这种要求来自课堂(在试验性的研究生课程中是以论文和笔记作为教材的)和专业场合(在几个应用领域中，譬如计算机辅助设计、计算机图形学、机器人等等，这样做的时机已经成熟)．

本书试图与这种需要相适应．它基本上可作为低年级研究生的课本，同时也面向上面提到的几个应用领域的专业人员．然而，必须指出，虽然书中一些算法是实用的算法，但是本书不完全是直接可供使用的技巧的一览表．说得更确切些，它继承了算法设计和分析（或"算法学"）这门学科的研究观点，目的在于表征特殊问题的难点．我们的分析主要关心算法最坏情形的特征；此外，对于规模充分大的问题，这些分析完全有效(渐近分析)．在选取一个算法时，我们应该细心考虑这两个特点，因为最适合于小规模问题的技巧不一定是渐近最优的，而在最坏情形下是差的算法，它在平均情形下的性能却可能是优良的．

本书尝试提供一个相当详细的关于计算几何的"连续"全景，以不同于它的"零散的"片断. 然而，我们的主要目的是有条理的论述而不是过细的全面介绍，我们试图在每章末用一节"评论和注解"来部分地弥补这方面的不足. 在书中没有记述或者几乎没有提到许多作者的工作，在此向他们表示歉意.

本书最初的核心部分是 M.I. 沙莫斯的博士论文. 当 1981 年 R. L. Graham 建议 F. P. 普雷帕拉塔 (F. P. Preparata) 把初稿发展成为一本教科书时，我们确实对有关的工作没有一个清楚的估计. 幸而，我们的许多同事和朋友慷慨地帮助我们来做这项工作，他们耐心地多次阅读草稿，提出改进意见并收集错误. 我们非常感激他们. 我们希望感谢（以字母次序）D. Avis, J. L. Bentley, B. Bhattacharya, B. M. Chazelle, D. P. Dobkin, M. Dyer, S. C. Eisenstat, Dan Hoey, M. Kallay, D. T. Lee, J. Van Leeuwen, W. Lipski, Jr., A. J. Perlis, J. O'Rourke, L. C. Rafsky, R. Seidel, M. H. Schultz, G. T. Toussaint 和 D. Wood. 我们还要向国家科学基金(对 F. P. 普雷帕拉塔的工作）给予的部分资助，海军研究局、国际商用机器公司、卡内基-梅隆大学和贝尔实验室（对 M. I. 沙莫斯的工作）给予的部分资助，以及 Springer-Verlag 出版公司工作人员的热情合作致谢.

最后，我们对各自的妻子 Rosa Maria 和 Julie 表示感谢，感谢她们在完成此书的漫长过程中所表现的耐心和给予的支持.

F. P. 普雷帕拉塔

M. I. 沙 莫 斯

1985 年 5 月

目　　录

第一章　引　　言

1.1 历史透视

埃及和希腊的几何学是应用数学的杰作. 几何问题的原始动机是出于精确地和公平地征收土地税和修筑建筑物的需要. 如同我们常遇到的那样，已形成的数学所具有的持久性和重要性远远超出了古埃及法老最初的年收入问题，而几何是数学思考的核心. 它是一个富于直观的领域，而且（可以说)新发现是在非专家的能力范围之内.

一般认为欧几里得对几何学的主要贡献是他说明了证明的公理方法,我们将不争论这一见解. 然而,另外与此讨论有关的是创造*欧几里得构造*，它是由一个算法以及它的一种高度程式化格式的证明所组成的一个纲要. 欧几里得构造满足一个算法的所有要求：它是无二义的、正确的、终止的.不幸，在欧几里得之后,几何继续处于全盛时期,而算法分析却面临2000 年的衰落. *归谬法*的成功能部分地解释这一点,归谬法使数学家通过矛盾较容易证明一个对象的存在，而不是给出它的一种明显的构造(一个算法).

还有其他原因使欧几里得构造值得注意，即它限定了一批可允许用的测量工具(直尺和圆规)和能用它们来执行的合法运算(原始运算)的一个集合. 古代人对欧几里得原始运算在有限次组合下封闭最感兴趣. 尤其是，他们不知道此封闭是否包含了所有可能的几何构造(譬如,一个角的三等分).用近代的术语来说，这是一个计算机科学问题——欧几里得原

始运算是否能胜任所有的几何"计算"？回答这个问题的一种尝试是，允许改变原始运算和工具来考虑各种各样的计算模型．阿基米德提出一种三等分60度角的(正确)构造，他用了下面附加的原始运算的集合：给定两个圆A，B和一个点P，允许我们在直尺上标记线段MN，且安置它使得直尺通过P，M在A的边界上，N在B的边界上．在某些情形下，研究有限制的测量工具的集合，例如，仅允许用圆规．这些想法看来几乎是自动机理论所用方法的一个前兆，在此场合，我们在各种限制下探讨计算模型的能力．不幸，欧几里得工具不充分的证明必须等待代数的发展．

欧几里得的《几何原本》具有很深远的影响，直到笛卡儿提出另一种几何系统，情况就不是这样了．笛卡儿引进坐标后，使几何问题能用代数形式表达出来，这就为高次平面曲线和牛顿微积分的研究铺平了道路．坐标使人类的计算能力获得极大的提高，它为两个重大的数学领域之间的鸿沟架起了桥梁，且导致构造论者的思想获得新生．现在已可能通过解关联的代数方程来产生新的几何对象．这发生在可计算性问题再一次提出之前不久．现在有了代数工具，高斯回到了用欧几里得测量工具来构造素数条边的正多边形问题上来，且完全解决了它．此时，直尺、圆规构造、域扩张和代数方程之间的紧密联系变得明显了．在高斯的博士论文中，他证明了每一个代数方程至少有一个根（代数学基本定理)．1828年阿贝尔在一个具有限制的计算模型中研究了相同的问题．他问：是否每一个代数方程的一个根都能仅用算术运算和开n次方根得到，而且他证明了回答是否定的．当已知所有可构造的数是代数数时，这就表明不是所有的代数数是可构造的．稍后，他还描述了用根式能解的代数方程的特征，这就使他能讨论特殊几何问题(譬如，角的三等分)的实际可能性．

1.1.1 古典几何学中的复杂性概念

由于允许的是基本的原始运算，所以除了最平凡的问题外，任何欧几里得构造都是非常复杂的. 欧几里得之后的几何学家们改进了他们的构造，以致使他们能用较少的“运算”来完成这些构造(表面上看来像是一种游戏). 然而，在20世纪之前还没有定义任何构造问题复杂性的定量测度. 1902年Emile Lemoine 整理了欧几里得原始运算，建立的几何作图学如下 [Lemoine (1902)]:

1. 把圆规的一个脚置于一个给定点.
2. 把圆规的一个脚放在一条给定的直线上.
3. 作一个圆.
4. 直尺的边通过一个给定点.
5. 作一条直线.

在一个构造过程中执行这些运算的总次数被称为它的简单性，虽然 Lemoine 可能认识到用“复杂的度量”这个名词较为合适. 尽管在 Lemoine 的工作中，一个几何构造中的输入(给定点和直线的数目)的大小和它的简单性之间没有函数联系，但是此定义紧密对应于现在的一个算法的时间复杂度的思想. 实际上，Lemoine 的兴趣是改进欧几里得原始的构造，而不是发展复杂度的理论. 他在改进构造方面取得了引人注目的成功——Apollonius 的圆问题的欧几里得解要求508步，而 Lemoine 把步数减少到小于200步 [Coolidge (1916)]. 不幸的是，Lemoine 没有看出证明的重要性，或者也许不能证明在一个给定的构造中一个确定的运算次数是必要的，因而他抓不住下界的思想.

然而，希尔伯特意识到了下界的重要性. 在引入一种受限制的模型时，他只考虑了可用直尺和刻度来执行的那些构

造，刻度是仅用来标出直线的一段固定长度．用此组工具不能完成所有的欧几里得构造．对于能用这组工具完成的那些构造，我们可把构造点的坐标视为给定点的函数 F．希尔伯特给出恰好用 n 个平方根运算可计算 F 的一个充分必要条件，这是代数计算复杂性方面最早的定理之一[Hilbert (1899)]．

还有其他的证据可表明，我们现在所用的分析算法的许多技巧已由前几个世纪的几何学家考虑过了．1672 年 Georg Mohr 证明了：只要给定的和要求的对象由点确定，可用直尺和圆规来完成的任何构造能单独用圆规来完成．(因此，即使不能用圆规来画一条直线，但是直线上的两点的每一点能由两个圆弧相交来确定．)关于 Mohr 证明值得注意的事情是，它是一种模拟，在证明中他表明了直尺参与的任何操作能换为有限次圆规的操作．人们能否找到一种与自动机理论有较紧密的联系呢？按照相似的方式，结果就是：任何构造中所用的直尺可具有任何正长度(无论多么小)，能模拟任意长度的直尺．

正当 Lemoine 等人从事欧几里得构造的时间复杂度的研究时，人们又提出了对于这些构造所需要的空间量的问题．虽然所用的空间度量和我们现在作为一个算法所用的内存的定义不一样，但是它显得非常接近而且相当自然：完成构造所需的平面面积．一般，所用的空间依赖于给定轨迹的凸壳的面积以及要求结果的大小，还依赖于构造过程中需要形成的任何中间轨迹的大小 [Eves (1972)]．在这里，我们的论点是，时间和空间概念与几何不是完全无关的．

当伽罗华证明了某些欧几里得构造的不可能性时，就认识到，不能做一个角的*精确*三等分，但是并没有说到关于一个近似构造的可实现性．事实上，古希腊人已经知道了关于圆求方问题和倍立方问题的渐近收敛过程[Heath (1921)]．迭

代算法的历史确实是很长了.

1.1.2 凸集,度量几何和组合几何的理论

19 世纪,几何学在许多方向得到发展. 由克莱茵公布的一个方向涉及到对在各种变换之下几何对象的特性的全面研究,且射影几何形成了一个重要的分支(见 1.3.2 节). 而在有限射影平面上的研究引出了组合论和离散算法中许多吸引人的问题,本书将不涉及这方面的研究.

实分析的发展对几何具有深远的影响, 它把以前仅为直观的概念加以形式抽象.发展形成的度量几何和凸性理论,提供了有助于快速算法设计的数学工具.

距离是几何的一个基本概念. 度量(距离的推广)能用来引出几何概念以及对分析的了解, 在这方面函数之间的“距离”的思想得出了函数空间和其他强有力的构造. 不幸的是, 取得的大部分的结果是非构造方面的. 就函数空间的特征而言,它们不是计算的对象.

凸性理论的重要意义是分析地讨论对象的整体性质, 且使我们能够讨论极值曲线问题. 不幸的是, 有关凸性方面的许多问题代数地表述是麻烦的, 且此主题往往会导致非构造的方法.

组合几何就其精神实质来说, 很接近于我们的几何算法的目标. 它基于依据有限个子集的性质来描述几何对象的特征.例如,一个集合是凸集当且仅当集合的每一对点所决定的线段完全位于该集合之中. 组合几何不适合我们的目的在于以下的事实, 即大多数关心的有限个子集的个数的集合是无穷的,这就使算法的处理成为不可能.最近进行的几何算法方面的工作, 目的在于弥补这些不足以及提出有助于有效算法的数学.

1.1.3 先前有关的研究工作

在几个不同的方面已建立了几何特性的算法，且至少在两个其他的含义方面已用了“计算几何”这个用语. 现在我们将尝试把这些有关的努力加以适当的透视，且把它们和现在普遍的含义相对照:

1. Bézier, Forrest 和 Riesenfeld 巧妙地处理了依据样条曲线和曲面的几何模型，这一课题就其精神实质来说更接近于数值分析. 我们该注意到，Forrest 把他的学科称为“计算几何” [Bézier (1972); Forrest (1971); Riesenfeld(1973)].

2. 在一本标题为*感知器*(小标题也是“计算几何”)的优秀的和吸引人的书中，Minsky 和 Papert (1969) 处理了识别某些几何性质(譬如，凸性)的谓词的复杂性. 他们的研究工作的目的是陈述用简单回路构成的大网膜来实现模式识别任务的可能性. 他们的理论是独立的，且不属于本书的算法范围之内.

3. 图形学软件和几何编辑程序确实是本书中给出的许多算法的目标. 然而，它们所建立的有关结果较接近于谋求详细的实现和用户接口，而不是接近于算法分析. 在同一类软件中包含的是机器工具支持的数值控制软件、绘图机、绘图系统的程序，以及建筑设计和土木工程的软件.

4. 最后，“计算几何”这个用语有些人听起来像是用计算机证明几何定理的领域，尽管这一课题是一种吸引人的研究，但是它显示了大量关于定理证明的探试方法以及证明过程的推断，而不是关于几何本身，因此将不在这里讨论它们.

1.1.4 关于计算几何

由于大量应用领域提供了特有的几何问题，对于这些问

题必须建立有效的算法，所以它们是孕育计算几何这门学科的基础．这些问题包括欧几里得巡回售货员问题，最小生成树问题，隐藏线问题和线性规划问题，还有许多其他问题．为了以一种有说服力的方式表明计算几何领域的广泛性，直到这些问题在课本中出现时，我们再给出它们的背景内容．

在上一世纪的研究文献中，已经出现了这些问题和其他问题的算法研究，在过去 20 年中这种研究有日益增强的趋势．然而，直到最近才着手几何算法的系统研究，且越来越多的研究人员被吸引到这门学科中来，在 M. I. Shamos 的文章（1975a）中把这门学科命名为“计算几何”．

本书通过对问题的详细研究希望给出计算几何的研究观点和研究方法．这门学科的一个基本观点是认为，经典的几何对象的表征常常不适合于有效算法的设计．为了避免这种欠缺，有必要辨别出有用的概念，且建立有助于有效计算的性质．简言之，计算几何必须把传统的学科改造成——每逢必要——它的计算实体．

1.2 算法的基础知识

在过去 15 年中，计算机算法的设计和分析是计算机科学中最兴旺的领域之一．Knuth (1968; 1973) 和 Aho-Hopcroft-Ullman (1974) 的基础工作，整理和系统化了一批丰富的孤立成果，概念化了基本的范例，而且建立了这一领域标准的一套研究方法．接着 Reingold-Nievergelt-Deo(1977) 和 Wirth (1976) 的研究工作进一步加强了它的理论基础．

详细回顾这些杰出论著的内容超出了本书的范围，所以我们假设读者已熟悉这些内容．然而简要地回顾一下描述计