

误差理论

常见问题与解答

肖 明 耀



计 量 出 版 社

误差理论常见问题与解答

肖 明 耀

计 量 出 版 社

1 9 8 0

内 容 提 要

本书系中国计量测试学会“全国误差理论学习班”的教材之一。作者参照《实验误差估计与数据处理》一书的章节和内容，用问题解答的形式，给出了有关误差的概念、计算和证明方面的题目，共64题。这些题目涉及到：误差的概念、表示、传递、合成、分布和剔除；最小二乘法的原理、计算与电算；随机过程的概念与应用等方面。本书可作为误差理论课程的教学参考书，并可供从事精密测量的科研工作者、工程技术人员以及理工科学生和教师们参考。

误差理论常见问题与解答

肖 明 耀



计量出版社出版

(北京和平里11区7号)

北京计量印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售



开本 787×1092 1/32 印张 2 7/8

字数 66千字 印数 1—25,000

1980年9月第一版 1980年9月第一次印刷

统一书号 15210·2

定价 0.47 元

GF76/19

前 言

本书中的部分题目，几年来曾在大区和省市计量系统举办的几个误差理论学习班上分别提出和解答过，今年又在中国计量测试学会“全国误差理论学习班”上进行了教学。参加学习班的同志们要求作者将这些题目整理出版，以供教学和工作的参考。

据此需要，作者将学习班上曾作过的题目加以整理和充实，并参照科学出版社1980年3月出版的《实验误差估计与数据处理》的章节和内容，给出了有关误差的概念、计算和证明方面的常见问题及其解答，共64题。内容涉及到：误差的概念、表示、传递、合成、分布和剔除；最小二乘法的原理、计算与电算；随机过程的概念与应用等几个主要方面。

题目涉及的面很可能不够广泛，错漏之处敬请读者批评指正。

在编写和整理过程中，中国科学院系统科学研究所统计学室吴传义同志对初稿提出了很多宝贵的意见；各地参加学习班的同志们，都曾给予很多帮助；书中的数值计算，在清稿时又经四川省计量测试研究所徐枢同志一一核算，谨此一并致谢！

作 者

1980年4月于

中国计量科学研究院

目 录

第一部分 关于误差的概念与表示等方面

1. 各种误差定义的优缺点…………… (1)
2. 误差的绝对值与绝对误差, 未定系统误差与系统不确定度…………… (2)
3. 修正后的量值是否为真值? …… (2)
4. 衰减量变化与引起电压变化的关系…………… (3)
5. 如何提高零刻度点附近测量的准确度? …… (4)
6. 对选择“随机误差”而淘汰“偶然误差”的看法…………… (5)
7. 如何减小实验结果的误差? …… (6)
8. 仪表测量的准确度…………… (7)
9. 系统误差与随机误差的异同…………… (7)

第二部分 关于方差或标准差的估计方面

10. 方差、标准差与真误差的区别, σ 与 $\sigma/\sqrt{n}$ 的区别…………… (7)
11. 测量一次的标准差是多少? …… (9)
12. 方差算例…………… (10)
13. 各种方差计算公式的比较…………… (12)
14. 电压表全组合比对时的误差估计…………… (13)

第三部分 关于误差的概率分布方面

15. 算术平均值的几种表示方法…………… (15)
16. $y = a \sin x$ 是什么? …… (16)
17. 反正弦分布的公式推导 …… (18)

18.	均匀分布的公式推导	(19)
19.	方差定义是否适用于非正态分布?.....	(21)
20.	标准差本身有无误差?	(21)
21.	几个平方和公式的推导	(22)
22.	均匀分布、反正弦分布的方差.....	(23)
23.	正态分布、均匀分布误差的概率计算.....	(24)
24.	正态、均匀、反正弦分布误差落在 $(-\sigma, \sigma)$ 中的概率.....	(26)

第四部分 关于误差的传递方面

25.	$\varphi = x^3 \sqrt{y}$ 的值及其标准差	(27)
26.	三个量块密合后的尺寸标准差	(28)
27.	启停秒表引起的时间标准差	(29)
28.	三角形中另一未测角的标准差	(29)
29.	两个量之和的标准差	(29)
30.	圆柱体的体积标准差	(30)
31.	如何保证 $\sigma_g/g \leq 0.1\%$, 其中 g 为重力加速 度	(30)
32.	正弦尺测量锥体角度的最佳状态	(31)
33.	十段距离之和的误差	(32)
34.	角度和方向之权以及单位权标准差	(33)
35.	常用误差传递公式归纳	(33)
36.	证明任一测量角的方差公式	(34)
37.	如何选择对称测量方案?	(35)
38.	x 与 y 相关, $u = x^2 + x + ay$ 的方差	(38)
39.	三角形中三个角分别修正后的标准差	(38)
40.	$v_i = x_i - \bar{x}$ 与 $\bar{x}$ 是否相关	(39)
41.	$x_i = w + \varphi_i$, $i = 2, 3, 4$, 各 φ_i 相关, 则 $x_2 + x_3$ 和 $x_2 + x_3 + x_4$ 的标准差分别是多少?.....	(41)

第五部分 关于误差的合成——准确度与不确定度方面

- 42. 什么是不确定度? (43)
- 43. 准确度与不确定度的异同 (44)
- 44. 不确定度与标准差的异同 (44)
- 45. 置信系数的定义与作用, 误差合成的广义方和根法 (45)
- 46. 均匀分布合成法的自动调节作用 (47)
- 47. 系统不确定度的几种合成方法的优缺点 (50)
- 48. 用夏里埃级数简化广义方和根法的计算 (53)
- 49. 测试电容传声器检定中的不确定度 (54)

第六部分 关于粗差剔除方面

- 50. 十一次测量值中判别最大值是否为坏值 (55)

第七部分 关于最小二乘法或曲线拟合方面

- 51. 求证直线拟合中的公式 (56)
- 52. 谐振回路参数 L 、 C 的最小二乘法确定 (60)
- 53. 无回代过程法解线性方程组 (66)
- 54. 已知残差方程组, 解最佳值 (66)
- 55. 二次曲线拟合的计算步骤与公式 (68)
- 56. $x = a \sin(\omega t + \varphi)$, 写出其残差方程组 (71)
- 57. 空间点坐标的最小二乘法解 (71)
- 58. 已知 b_1, b_3 的方差与相关系数, 求 $b_2 = b_1 + b_3$ 的方差及其与 b_1 或 b_3 的相关系数 (76)
- 59. 已知 w, φ, f 的方差与相关系数, 求 $x = w + \varphi$ 与 $y = w + f$ 的相关系数 (77)
- 60. 起算数据 W 有误差时的 $\hat{X}$ 的协差阵 (78)

第八部分 关于随机过程与阿伦方差方面

- 61. 求正弦波过程的相关函数与方差 (79)
- 62. 快速拉制光导纤维, n 根光导纤维直径组成的宽度的方差 (79)
- 63. 阿伦方差的含义 (80)

第九部分 关于电算程序方面

- 64. 最小二乘法通用程序中, 正规方程组系数矩阵放在何处? 逆阵用何种方法计算? (81)

问 题 与 解 答

第 1 题 评述下列各误差定义：

- (1)含有误差的值与其真值之差为误差；
- (2)某一量值与其算术平均值之差为误差；
- (3)有源仪器的实际值与其标称值之差为误差；
- (4)无源仪器的示值与其实际值之差为误差；
- (5)加工实际值与其标称值之差为误差；
- (6)测量值与其真值之差为误差。

解：(1)该定义不妥，因为在误差的定义尚未作出之前就说“含有误差的值”，这样的值是不明确的，若不作为定义，只用来理解是很好的。

(2)该定义不妥，一方面这是因为“某一量值”的说法不清，若某一量值没有给出值，也无从谈其误差大小；而另一方面，算术平均值又不是唯一的，测量次数不同，算术平均值就不同，误差也就不同，而真值则是唯一的。

(3)该定义不好。标称值是人为的给出值，并非真值。实际值是真值或相对真值，其值与给出值之差应为给出值的修正值(负误差)。

(4)对于无源仪器来说，其示值是给出值，实际值是真值，二者之差就是误差，该说法是对的，但作为误差的定义来说，包含的面尚不够广泛。

(5)该定义不好。加工实际值为真值，标称值是给出值，加工实际值与其标称值之差应为标称值的修正值。

(6)测量值是用测量方式得到的一种给出值，它与真

值之差为误差，说法是对的，但与(4)类似，包含的面尚不够广泛。

总之，上述定义(1)(2)(3)(5)是不够妥当的，(4)(6)有关误差的说法尽管不错，但不够全面，不够完整。完整的定义应为：某量值的给出值与其客观真值之差为误差。其中，给出值包括测量值、标称值、示值、预置值、计算近似值等非真值。给出值具有广泛性，而真值是唯一的客观标准，因而定义具有唯一性。这里误差是指给出值的误差，而不是真值的误差。从逻辑上说，给出值含有误差，给出值扣去(减去)误差后即可得到真值。从计量学上说，上述定义方便而不容易出错。

定义(5)是加工部门的实际需要给出的，不妨特称之为“加工偏差”以避免误解。

第2题 误差的绝对值与绝对误差是否相同？未定系统误差与系统不确定度是否相同？

解：误差的绝对值反映的是误差的大小，并没指明误差的方向。绝对误差(=给出值-真值)是反映给出值对真值的偏离，它既表示偏离的大小，也指明了偏离的方向，因此，它们是不同的。

未定系统误差是方向或绝对值未知的系统误差，又称为尚未确定的系统误差，它是指误差的一种分类；而系统不确定度则是指未定系统误差的界限(误差限)，是作为估计值而言的。在第42题“什么是不确定度”中有进一步的叙述。

第3题 什么叫误差？什么叫修正值？含有误差的某量值经过修正后能否得到真值？

解：误差=给出值-真值

修正值 = - 误差 = 真值 - 给出值

修正后能否得到真值，取决于修正值是否为真。当知道真值的条件下，是能对含有误差的量值修正而获得真值的。一般情况下真值是比较难以得出的，但相对真值却可以得到。所以一般来说，含有误差的量值经过修正后，能得到相对真值。

故在真值未知时，根据误差公理，修正值本身也有误差，所以，经过修正后的给出值并不是真值，而是更接近真值的给出值罢了。

第4题 某一电压 u_0 经衰减量为 A (分贝)的网络后，输出为 u ，当衰减量 A 变化 δA 后，则输出为 u' ，试推导电压变化 δu 与 δA 之间的关系。

解：电压比可表示为

$$\alpha = u/u_0, \quad \alpha' = u'/u_0$$

而以分贝表示的电压比，则由定义为

$$A = 20 \lg (u/u_0) = 20 \lg \alpha$$

$$A' = 20 \lg (u'/u_0) = 20 \lg \alpha'$$

因此， u' 的误差或 u 的变化可用三种方法表示如下：

$$\textcircled{1} \delta u = u' - u, \quad \delta u/u = (u' - u)/u$$

$$\textcircled{2} \delta \alpha = \alpha' - \alpha, \quad \delta \alpha/\alpha = (\alpha' - \alpha)/\alpha = (u' - u)/u$$

$$\textcircled{3} \delta A = A' - A$$

$$= 20 \lg (u'/u)$$

$$= 20 \lg \left(1 + \frac{u' - u}{u} \right)$$

$$= 20 \lg (1 + \delta u/u)$$

$$= 20 \lg (1 + \delta \alpha/\alpha)$$

从上可见，电压比的相对误差 $\delta \alpha/\alpha$ 也可以用电压的相对误

差代替。

注意到当 $u = u_0$ 时, 则有 $A = 0$, 进而有 $\delta A = A'$, 因此, 这时表示的分贝值

$$A' = 20 \lg (u'/u)$$

也就是分贝误差 δA , 这里

$$\delta A = 20 \lg (u'/u).$$

当 $\delta a/a$ 或 $\delta u/u$ 较小时, 有近似公式

$$\delta A \approx 8.69 (\delta a/a) = 8.69 (\delta u/u)$$

见《误差》*P.7.

第5题 一块仪表的准确度等级为 s , 在 x 处测量时的准确度不高于 $(x_n/x)s\%$, 这里 x_n 为仪表的最大刻度值, x 为测量值. 当 x 很小时, 即在零刻度点附近测量时, 如何提高其准确度? (设量程已无法改变到最小)

解: 当 x 很小时, 仪表的最大相对误差按 $(x_n/x)s\%$ 计算可能很大, 提高其准确度即减小这个误差, 一般可从如下三方面想办法:

(1) 减小满量程值 x_n , 例如可选择本仪表的最小量程档. 本题已设量程无法改变到最小, 故不可行.

(2) 减小 s , 这是可能的. 将该表送上级单位检定, 或采用高精度仪表、等精度小量程仪表自己检定, 给出本仪表在零刻度点附近各刻度点的修正值, 使用修正值对测得的量值进行修正, 相当于减小了 s .

(3) 增大被测量 x , 例如用放大器将 x 放大到接近满量程 x_n , 然后用本仪表进行测量. x 未放大时, 其相对误差 $\delta x/x \leq (x_n/x)s\%$, 若放大 n 倍, 被测量变为 $x' = nx$, $\delta x' = n\delta x$,

* 《误差》指: 肖明耀, 《实验误差估计与数据处理》, 科学出版社, 1980.3.一书, 下同.

即 $\delta x'/x' = n\delta x/nx = \delta x/x$. 但是

$$\delta x'/x' \leq (x_n/x')s\% = 1/n \times (x_n/x)s\%$$

$$\therefore \delta x/x \leq 1/n \times (x_n/x)s\%$$

可见, 相对误差限较之未放大前缩小了 n 倍.

应该注意, 上述结果是在不考虑放大器的误差时得到的. 一般地, 若测得 x' , 则 $x = x'/n$, 所以 x 的误差来源于 x' 和 n 的误差, 考虑到 $\delta x'/x'$ 最小为 $s\%$, 若放大器的精度比仪表高得多, 例如高一个数量级 (即误差比 $s\%$ 小一个数量级), 则放大器放大倍数的误差可忽略不计, 这时有 $\delta x/x \approx \delta x'/x'$.

第6题 在“随机误差”与“偶然误差”两个名词中, 你对趋向选择“随机误差”而逐步淘汰“偶然误差”有何看法?

解: “偶然”之意是相对于“必然”而说的, 例如, 在100次测量中每次都产生的误差, 应该说是“必然误差”, 而百次一遇或千次一遇的误差才是“偶然误差”, 这样的误差显然又指粗差了. 由误差公理知, 在100次测量中每次都要产生误差, 如果系统误差已消除, 则产生的误差就是随机误差. 可见, 随机误差是必然产生而不是偶然产生的, 只是各种大小误差出现有着确定的概率规律而已. 粗略地说, 这些误差的值是随着不同机会 (随机) 而出现的, “随机”对应着概率这一内涵, 即随机事件是指具有统计规律性的一种不确定的事件. 因此, 选择“随机”一词更为确切.

数学界、无线电界以及计量学界等早已或正在采用“随机” (包括随机误差、随机过程, 随机……等词) 一词. 绝大多数英文文献早由 accidental error (偶然误差) 变为采用 random error (随机误差). 近年来, 日文文献也开始见到了用片假名 ラダム (随机误差) 的词. 俄文中无论是随机误

差或随机过程的“随机”一词，仍用“случайная”表示，但仍以译作“随机”为好。譬如，同一本书中出现了以上两词，若译作偶然误差、偶然过程是不妥的，因为从来没有人称为偶然过程的，也不确切；若译作偶然误差、随机过程也不甚好，似不太统一；还是译成随机误差、随机过程为妥，一词一义，一一对应。

现今，我国电子计算机检索采用的主题词中，选择了“随机误差”一词，今后无论用汉语拼音或英文译名“random”去检索，就能查到所需要的一组文章索引，而用“偶然误差”就将难以查寻到了。有些高等学校的教材，各专业的词典，已开始放弃“偶然误差”而采用“随机误差”，或者，以“随机”为主、“偶然”为辅，逐步采用“随机误差”而淘汰“偶然误差”一词。从上可见，为了国际学术交流和利于我国名词术语科学的统一，从目前来看，这样作是适宜的。

在采用“随机误差”也可能发生一点小小的困难，即日文文献的汉字多用“偶然误差(对应accidental error)”而人们翻译的习惯是，尽量把日文汉字换成中文汉字最为方便。不过也有例外的情况，日文的“汽车”一词，就是中文的“火车”一词，直接搬用就要闹笑话，可见，有些词直接搬用也不恰当。因此，今后翻译日文文献中的“偶然误差”或用片假名表示的“ラダム”一词，从合理性上来说，都宜于译作“随机误差”一词。

第7题 如何根据系统误差与随机误差的转化特性来减少实验结果的误差？

解：当实验条件稳定，同时系统误差可以掌握时，可用修正值将实验结果加以修正；若系统误差尚未确定时，可均匀地改变测量状态，对某一量值在许多不同的状态下一一进

行测量，使系统误差随机化，从而使得部分误差得到抵偿，就可得到较为准确的结果。

以度盘为例，它的各个分划线的误差大小、正负是不一样的，若要用它计量某一角度，可在各个不同的位置上测角，其系统误差时大时小，时正时负，在一定程度上被随机化了，由此可以得到抵偿部分误差后的较为准确的结果，这种随机化的技术，在测量中宜于广泛应用。

第8题 用0.1级0—100伏合格仪表测50伏左右的电压一次，二次，…。试分析准确度如何？

解：最大相对误差为：

$$r \leq \frac{x_n}{x} \cdot s\% = \frac{100}{50} \times 0.1\% = 0.2\%$$

当该表以系统误差为主时，测一次、二次、…。准确度近同，无须多测；当该表以随机误差为主时，适当的多次测量，会得到较为准确的结果。

需要注意，若关于准确度级别 s 的定义不同，则相应 r 的计算公式亦不同，这一般在检定规程中会有说明。

第9题 总结一下系统误差和随机误差的异同点。

解：大致可归纳如下表1。

第10题 方差是什么？标准差是什么？它们与真误差的异同点？为什么用它们能描述测量的重复性或被测量的稳定性？ σ 与 $\sigma/\sqrt{n}$ 的区别是什么？

解：方差是无限多个真误差的平方的平均值，由于无限多次测量无法实现，所以总是用有限个真误差的平方的平均值做为方差的估计值，称其为经验方差或方差的估计值。在上

表 1 系统误差和随机误差的异同点

异同点	比较项目	系 统 误 差	随 机 误 差
不 同 点	本 性	具有确定性,在相同条件下,多次测量同一量时,误差的绝对值和符号保持恒定;条件改变时,误差亦按确定的规律变化。	具有随机性。在相同条件下,多次测量同一量时,误差的绝对值和符号以不可预定的方式变化,即某个误差的出现是随机的,但就总体而言,明显地遵从统计规律。
	误 差 源	单项系统误差多与单个因素或少数几个因素有关。	多由大量均匀小的因素,共同影响所造成。
	抵 偿 性	无。	有。
	与实验条件的关系	影响系统误差的条件一经确定,误差也随之确定;即使重复测量,误差始终保持不变(包括绝对值和符号)。	与实验条件的关系不如系统误差那样紧密有关;同条件下重复测量可减少随机误差。
	发现方法	需要通过改变实验条件,才能发现。	在确定条件下,通过多次重复测量,即能发现。
	减弱方法	需要采用特殊的方法,如引入修正值、消除误差因素、选择适当的测量方法等。	可以通过在同条件下重复测量而减小, n 次测量平均值的随机误差的标准差为单次测量值随机误差的标准差的 $1:\sqrt{n}$
	分布类型	多种,但未知分布时可按均匀分布处理。	一般为正态分布。
	反映实质	反映测量均值的极限与真值之间的偏离。	主要反映测量值自身之间的离散程度。
相 同 点	本 性	都是误差,它们都始终存在于一切科学实验中。	
	减弱程度	都只能减弱到一定程度(往往与科学水平有关),而无法彻底消除之。	
	有 界 性	都有确定的界限。	
	表示方法	可以用绝对误差、相对误差、不确定度等表示。	
	传递方法	可按类似的规律进行传递。	
	合成方法	可采用概率分布的方式进行合成。	
		独立的随机误差有抵偿性,强正相关的随机误差对和的影响具有累积的特性;若干独立系统误差对和的影响也具有一定程度的抵偿性,故而对未定系统误差的研究,类似于研究随机误差一样,可以应用概率论。	

述意义清楚的情况下，也简称为方差。

标准差是方差的正平方根值。

真误差是测量值与真值之差，它是具体的误差值，而方差或标准差是真误差平方的统计平均值，它是表征所有测得的真误差分散性的特征值，是表征整个测量值好坏的质量指标。

由方差或标准差的定义可以看出，测量值变动愈大，真误差平方值就愈大，方差就大，因而用方差与标准差就能描述测量的重复性和被测对象的稳定性。值得注意的是下述两种情况要区分清楚：

如果被测对象是稳定的，则标准差就表征为测量仪器的重复性和分散性（或说是测量条件的稳定性和波动性）。如果被测对象不稳定，而测量条件是稳定的，则标准差表征着被测对象的稳定性和波动性。如果二者都不稳定，那么标准差就表征着二者波动性的综合效应。

σ 表示单个测量值的标准差。

$\sigma/\sqrt{n}$ 表示 n 次测量平均值的标准差。

如果被测对象是稳定的，则可以适当增加测量次数，这时可用测量值的算术平均值来描述被测对象，由于测量变动的随机性，使测量误差具有抵偿性，所以算术平均值更接近被测对象的真值，故而算术平均值的标准差 $\sigma/\sqrt{n}$ 要小于单个测量值的标准差 σ 。

如果被测对象不稳定，亦即真值在波动，这时只能用 σ 描述被测对象的稳定性。

第11题 对某一量只测一次，问标准差是多少？

解：对某一量不管测一次还是测多少次，它的母体标准差总是客观存在的，今对它仅测一次就属于有限次测量，根