微积分和数学分析习题集

〔美〕A. A. 布朗克 著

科学出版社

微积分和数学分析习题集

〔美〕A. A. 布朗克 著

周民强　王莲芬 译

科　学　出　版　社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书是 R. 柯朗和 F. 约翰著《微积分和数学分析引论》第一卷的补充．除了原书的问题和练习以外，为了学生实际训练的需要，又增加了一些练习．所有的问题与练习都给出了解答或提示．

本书可供大学数学、物理等专业的教师和学生使用．

A. A. Blank
PROBLEMS IN CALCULUS AND ANALYSIS
John Wiley and Sons, Inc. 1966

微积分和数学分析习题集
〔美〕A. A. 布朗克 著
周民强 王莲芬 译
责任编辑 刘嘉善
科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1986 年 5 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1986 年 5 月第一次印刷 印张：10 1/8
印数：0001—13,000 字数：265,000

统一书号：13031・3160
本社书号：4660・13—1

定价：2.85 元

序　　言

本习题集打算作为 Courant 和 John 著《微积分和数学分析引论》(*Introduction to Cacleulus and Analysis*) 一书[1]的附本．在编写这本教材的过程中，日益明显地感到，若要包括众多的练习和问题，再加上解答的展述，势必要写成一本过于庞大的书而不便于使用．为此，就把原书中的习题分为两类：一类是问题 (*Problems*)，由于它们的特定意义和难度而保留在原书中；另一类是练习 (*exercises*)，则编写在本书中，它们具有较为常规的特征，且其主要目的是通过实际训练来增进技巧．本书对两者都给出解答与提示，并且为了清晰和易于参阅，原书中的问题在这里再重述一遍．

本书内容的扩充是为了满足有较多实际训练者的要求，也是为了对某些较难的问题提供更加充实和清晰的解答，而且为此又添加了另外一些问题．然而，本书的核心仍是原书习题的一个扩展．

我要感谢 R. Courant 和 F. John，他们阅读了本书的大部分材料，并提出了有教益的意见．我深切感激 Alan Solomen，他对本书的编写在各方面作出了贡献．Brigitte Hildebrandt 热心查看了前五章的解答，并且排除了某些错误和模糊之处．虽然这些善意和认真的朋友们做了大量工作来帮助我纠正不少差错，但本书仍然不可避免地会留下一些谬误．我衷心地欢迎指正和任何其它改进本书内容的建议．

Albert A．布朗克

---

1) 有中译本，科学出版社出版．本习题集属于第一卷(中译本分为两个分册)；第二卷的题解附于原书的末尾（中译本也相同）．凡是说到原书均指第一卷．——译者注

读 者 注 意

在练习、问题及其解答的叙述[1]中，我们总假定所涉及的函数是连续的，并且具有所需要的各阶导数，除非有不同的说明.

提供解答的方式有不同的层次，从完整的论述到最低限度的提示，甚至有时不给予解答。

1）本习题集中所指章节、页码均按原书中译本编排。

目　　录

第一章 引　论

练　习

（第 1.1 节 a，第 2 页）

1. (a) 对任一固定的整数 $q>1$，试证明点 $x=p/q^s$ 当 p，s 取遍一切正整数所构成的点集在正数轴上稠密。

(b) 若 p 只在一个有限区间内取值，$p\leqslant M$（M 固定），试证明 (a) 中 x 的点集在任一区间中都不稠密。

(c) 若只要求 $p>q^s$，试证明 (a) 中 x 的点集在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上稠密。

2. 设 n，p 取遍一切正整数值，试证明数 $x=p/(\sqrt{2})^{2n+1}$ 组成的集合在正数轴上稠密。

问　题

（第 1.1 节 a，第 2 页）

1. (a) 设 a 是有理数，x 是无理数，试证明 $a+x$ 是无理数，且当 $a\neq 0$ 时 ax 是无理数。

(b) 试证明任意两个有理数之间至少存在一个无理数，因而有无穷多个无理数。

2. 试证明下列各数不是有理数：

(a) $\sqrt{3}$；(b) $\sqrt{n}$，其中 n 不是完全平方数，即不是某个整数的平方；(c) $\sqrt[3]{2}$；(d) $\sqrt[p]{n}$，其中 n 不是完全 p 次方幂数。

3.* (a) 对于整系数多项式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq 0)$$

的任一有理根，若记其既约分式为 p/q，试证明其分子 p 是 a_0 的

因子，而分母 q 是 a_n 的因子.（这一法则使我们得到一切有理实根,从而能说明其它任一实根的无理性.）

(b) 试证明$\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ 以及$\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$是无理性数.(提示:作一多项式,以所给的数为根,然后应用 (a) 的结论.)

练 习 的 答 案

(第 1.1 节 a, 第 2 页)

1. (a) 对于任一 s，指出可以找到一个点 x，它逼近任意给定的数 P 的误差小于 $1/q^s$。

(b) 对于离开零点的任一区间，指出该区间只含有此点集中有限个点。

问题的解答与提示

(第 1.1 节 a, 第 2 页)

1. (a) 假定 $a+x$ 与 ax 均为有理数,则可得出矛盾.

(b) 若 a 与 b 是有理数且 $a<b$, 则 $a+(b-a)/\sqrt{2}$ 是无理数且位于 a 与 b 之间。

2. (b) 若 $\sqrt{n}=p/q$, p 与 q 互素且 $q\geqslant 1$, 则 $nq^2=p^2$,即 q^2 是 p^2 的因子. 但 q 与 p 无公共素因子，因此 q^2 与 p^2 也无公共素因子. 由此得 $q^2=1$ 而 $n=p^2$.

3. (a) 若 p/q 是所给多项式的有理根，并为既约分式，则有

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0.$$

因为除左端最后一项外其它所有项均有因子 p，所以 p 也除尽 a_0q^n。但 p 与 q^n 没有公共因子，故 p 除尽 a_0。与此类似，我们可得 q 除尽 a_np^n，因而是 a_n 的一个因子。

(b) 题中各数分别满足方程

$$x^6-6x^4-4x^3+12x^2-24x-4=0$$

与

$$x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0,$$
并应用上述结果。

练　　习

(第 1.1 节 b，第 7 页)

1. 试证明区间套公理(原书中译本第一卷一分册第 9 页)对"有孔"实直线 $x<a$ 及 $x>a$ (不包括 $x=a$ 点)是不正确的。

练习的答案

(第 1.1 节 b，第 7 页)

1. 考察区间套 $a-\dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant a+\dfrac{1}{n}\qquad(n=1,2,\cdots)$.

练　　习

(第 1.1 节 c，第 9 页)

1. 我们可对 $\sqrt{2}$ 作如下近似计算到小数一位：首先，$1^2=1<2$ 和 $2^2=4>2$，故 $1<\sqrt{2}<2$. 其次，$1.1^2=1.21<2,\cdots,1.4^2=1.96<2$ 和 $1.5^2=2.25>2$，故 $1.4<\sqrt{2}<1.5$.

(a) 将以上过程再继续作一位小数。

(b) 用上述方法近似计算 $\sqrt{7}$ 到小数第二位。

(c) 近似计算 $x^3+x+1=0$ 的实根，精确到小数两位。

2. (a) 试给出以 3 为基数的 12 和 $\dfrac{1}{12}$ 的表示式。

(b) 给出 156 的二进位表示式和以 4 为基数的表示式。

(c) 试将下列十进位数表成以十二进位数：

(i) 10,000，(ii) 20,736，(iii) $\dfrac{1}{6}$，(iv) $\dfrac{1}{64}$，(v) $\dfrac{1}{5}$.

3. (a) 设 p 是任一整数且 $p>1$，令以 p 为基数的整数 N 的

表示式如下：

$$N = d_k d_{k-1} \cdots d_1 d_0;$$

又以 p^3 为基数的表示式是

$$N = e_i e_{i-1} \cdots e_1 e_0.$$

试证明：

$$e_0 = d_0 + pd_1 + p^2 d_2,$$
$$e_1 = d_3 + pd_4 + p^2 d_5,$$
$$e_2 = d_6 + pd_7 + p^2 d_8,$$
$$\cdots$$

(b) 设 $N = 100111$ 是以 2 为基数的表示式，求以 8 为基数(八进位制)的N的表示式。

问　　题

(第 1.1 节 c，第 9 页)

1. 用 $[x]$ 表示 x 的整数部分，即 $[x]$ 是满足

$$x - 1 < [x] \leqslant x$$

的整数。设 $c_0 = [x]$，$c_n = [10^n(x - c_0) - 10^{n-1}c_1 - 10^{n-2}c_2 - \cdots - 10c_{n-1}]$ $(n = 1, 2, \cdots)$，试证明 x 的十进位表示式是

$$x = c_0 + 0 \cdot c_1 c_2 c_3 \cdots,$$

且这一表示排除了出现无限个 9 的循环的可能性。

2. 试用十进位数表示法确定两个实数的不等式 $x > y$（见补篇，原书中译本第 92 页）。

3.* 设 p, q 是整数，$q>0$。试证明 p/q 可展成十进制表示的数，它或为有尽小数(从某位起后面的小数全为 0)，或为循环小数(从某位起后面的小数是给定数字链的重复序列)。例如，$\frac{1}{4}=0.25$ 是有尽小数；$\frac{1}{11} = 0.090909\cdots$是循环小数，重复链的长度称为小数的周期，如 $\frac{1}{11}$ 的周期是 2。一般说来，p/q 的周期可以是多大?

练习的答案

（第 1.1 节 c，第 9 页）

1. (a) $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$， (b) $2.64 < \sqrt{7} < 2.65$，
(c) -0.68.

2. (a) $110; 0.00\overline{202}$， (b) $10011100; 2130$，
(c) (i) 5954， (ii) 10,000， (iii) 0.2， (iv) 0.023，
(v) $0.\overline{2497}$.

3. (a) 数 $d_{\nu-1}d_{\nu-2}\cdots d_0$ 是 N 被 P^ν 除的余数，用此重复观察；
(b) 47.

问题的解答与提示

（第 1.1 节 c，第 9 页）

1. 令 $x_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{10^{n-1}}$ 及 $y_n = x_n + \frac{1}{10^{n-1}}$，从 c_n 的定义有

$$10^n(x - x_n) - 1 < c_n \leqslant 10^n(x - x_n). \tag{1}$$

首先证明当 $n \geqslant 1$ 时 c_n 是一个数码. 为此，令 $\varepsilon_0 = x - c_0$ 且 $\varepsilon_k = 10^k(x - x_k) - c_k$ $(k \geqslant 1)$. 由 (1) 我们得到 $0 \leqslant \varepsilon_k < 1$，对 $k = n-1$，将这些结果代入 (1) 式，有 $-1 \leqslant 10\varepsilon_{n-1} - 1 < c_n \leqslant 10\varepsilon_{n-1} < 10$，因为 c_n 是一个整数且 $-1 < c_n < 10$，所以 c_n 必是数码 0，1，2，…，9 中的一个.

其次，从 (1) 看到

$$x_n + \frac{c_n}{10^n} \leqslant x < x_n + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n},$$

由此知

$$x_n \leqslant x < y_n. \tag{2}$$

此外，由 $c_n \geqslant 0$ 可得

$$x_{n+1} = x_n + \frac{c_n}{10} \geqslant x_n, \tag{3a}$$

且从 $c_n \leqslant 9$ 知

$$y_{n+1} = x_n + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \leqslant x_n + \frac{1}{10^{n-1}} = y_n. \qquad (3b)$$

由(2),(3a)和(3b),我们得到闭区间$[x_n, y_n]$组成一个套序列。因为x属于此序列中的一切区间,而其长度$y_n - x_n = \frac{1}{10^{n-1}}$可以任意小,所以$x$由该表示式唯一确定。

又设$x = c_0 \cdot c_1c_2\cdots c_n999\cdots$,这里假定$n = 0$或者$c_n \neq 9$。十进位数

$$y = c_0 \cdot c_1c_2\cdots(c_n + 1)000\cdots$$

也表示数x,因为

$$\begin{aligned} y \geqslant x &\geqslant c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^k}\right) \\ &\geqslant y - \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^n}\left(1 - \frac{1}{10^{k+1}}\right) \\ &= y - \frac{1}{10^{n+k+1}}. \end{aligned}$$

所以$|x - y| \leqslant 1/10^{n+k+1}$.由于$x$与$y$之间的差小于任一正数,故有$x = y$。而若用该指定的方法选取这些数码,显然对第$n$位数码,可从(1)得到$10^n(x - x_n) = c_n$,且不会产生无限个9的循环。

2. 设x与y的十进位表示式为

$$x = a_0 \cdot a_1a_2\cdots, \quad y = b_0 \cdot b_1b_2\cdots.$$

我们断言,$x < y$当且仅当两表示式在第一次发生数码不同时有$a_n < b_n$,即存在n,使得$a_n < b_n$且当$k < n$时有$a_k = b_k$。

3. 设有理数的既约分式为p/q,记$p/q = \alpha/10^\nu\beta$,其中β与α, 10均互素,且用问题1的方法定义的十进位展开式给出

$$\frac{p}{q} = c_0 \cdot c_1c_2\cdots.$$

令

$$z_\mu = 10^{\nu+\mu}(c_0 \cdot c_1c_2\cdots c_{\nu+\mu}).$$

若$\beta = 1$,则有$\frac{p}{q} = \frac{p}{10^\nu} = c_0 \cdot c_1c_2\cdots c_\nu\bar{0}$,

其中$\bar{0}$表示数码0从第$(\nu + 1)$位开始重复出现。假定$\alpha \neq 1$,

由问题 1 的解答（2）式可知

$$z_\mu \leqslant \frac{10^\mu \alpha}{\beta} < z_\mu + 1.$$

由此有

$$0 \leqslant 10^\mu \alpha - \beta z_\mu < \beta.$$

于是，$10^\mu \alpha$ 被 β 除的余数是整数 $R_\mu = 10^\mu \alpha - \beta z_\mu$.显然 $R_\mu \neq 0$，因为 β 不是 $10^\mu \alpha$ 的因子．因而 R_μ 只能是 0 与 β 之间 $\beta - 1$ 个整数之一，故至少有两个 $R_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, \beta)$ 值相同．若 $R_s = R_t(s > t)$，则十进位展开式可写为

$$\frac{p}{q} = c_0 \cdot c_1 c_2 \cdots \overline{c_{q+t+1} c_{q+t+2} \cdots c_{q+s}},$$

其中，$s - t$ 个数码 $c_{q+t+1} \cdots c_{q+s}$ 周期地重复出现．为了证明，我们首先指出 $R_\mu = R_{\mu+s-t}$．我们有

$$\begin{aligned} R_{\mu+1} &= 10^{\mu+1}\alpha - \beta z_{\mu+1} \\ &= 10^{\mu+1}\alpha - \beta(10 z_\mu + c_{\nu+\mu+1}) \\ &= 10 R_\mu - \beta c_{\nu+\mu+1}. \end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned} c_{\nu+\mu+1} &= \left[10^{\nu+\mu+1}\left(\frac{p}{q} - c_0 \cdot c_1 c_2 \cdots c_{\nu+\mu}\right)\right] \\ &= \left[10\left(\frac{10^\mu \alpha}{\beta} - z_\mu\right)\right] = [10 R_\mu / \beta], \end{aligned}$$

由此

$$R_{\mu+1} = 10 R_\mu - \beta[10 R_\mu / \beta].$$

于是，$R_{\mu+1}$ 可由 R_μ 单独表示．因为 $R_s = R_t$，$R_{s+1} = R_{t+1}$，$R_{s+2} = R_{t+2}$，$\cdots$，最后，由于 $s - t \leqslant \beta - 1$，我们得到一个关于周期的上界．这是在确实达到的意义下的最佳上界（例如，对 $p/q = 1/7$）．

练　　习

（第 1.1 节 e，第 13 页）

1. 试问下列不等式是正确的还是错误的：

(a) $\sqrt{2} > 1.41$; (b) $\sqrt{2} > 1.414214$;

(c) $\sqrt[3]{4} > 1.59$; (d) $15 < \sqrt{240} < 16$;

(e) $2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{3}$; (f) $10(7.1)(7.2)-491 \geqslant \frac{1}{100}$;

(g) $100\sqrt{7}-(16)^2<8$; (h) $(42)^2 > (12)^3$.

2. 在数轴上画出满足下列不等式的部分:

(a) $|x| \leqslant 2$; (b) $|x-1| < 1$;

(c) $|x+1| < 1$; (d) $x > 5$;

(e) $|x|>5$; (f) $1 \leqslant x \leqslant 3$;

(g) $|x-2| \leqslant 1$; (h) $(x^2-1) > 0$;

(i) $x(x^2-1) > 0$; (j) $|x-1| < |x-3|$;

(k) $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+1}{x-2}>3$; (l) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$;

(m) $x^3+x \geqslant 1$.

3. 试证明

(a) $|x-1| + |x-2| \geqslant 1$;

(b) $|x-1| + |x-2| + |x-3| \geqslant 2$.

又问等式何时成立?

4. (a) 设 $x > 0$, $b > 0$ 且 $a \neq b$, 试证明 $(a+x)/(b+x)$ 位于 1 与 a/b 之间.

(b) 更一般地说,设 a/b 及 c/d 是不同的分数, 且 $b > 0$ 和 $d>0$, 试证明 $(a+c)/(b+d)$ 位于 a/b 与 c/d 之间.

5. 设 (a,b) 与 (c,d) 各是 α 与 β 的邻域, 试证明:

(a) $(a+c,\ b+d)$ 是 $\alpha+\beta$ 的邻域.

(b) 对一切正数 λ, $(\lambda a,\ \lambda b)$ 是 $\lambda\alpha$ 的邻域.

(c) $(a-d,\ b-c)$ 是 $\alpha-\beta$ 的邻域.

(d) 若 $c > 0$, 则 $(ac,\ bd)$ 是 $\alpha\beta$ 的邻域.

(e) 若 $c > 0$, 则 $(a/d,\ b/c)$ 是 α/β 的邻域.

6. 试证明: 对一给定数 $a \geqslant 0$ 以及任一 $x > 0$, 有

$$\sqrt{a} \leqslant \frac{ax^2+1}{2x}.$$

试问 x 取何值等式成立？试对 $x=\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ 用此不等式求出 $\sqrt{2}$ 的一个上界.

7. 试证明一切形如 p^2/q^2（p, q 取遍一切整数）的有理数在正实数集中稠密.

问　　题

（第 1.1 节 e，第 13 页）

1. 试仅用不等式的符号（不用绝对值的符号）来表达满足下列关系的 x 值，讨论一切情况.

(a) $|x-a|<|x-b|$，　(b) $|x-a|<x-b$，

(c) $|x^2-a|<b$.

2. 一个区间（见原书的定义）可定义为实数连续统的连通部分. 实数连续统的一个子集 S 称为连通的，如果对其中每一对点 a 与 b，S 就包含其整个闭区间 $[a, b]$. 除开闭区间外，还有半开区间 $a \leqslant x < b$ 和 $a < x \leqslant b$（有时记为 $[a, b)$ 和 $(a, b]$），以及无界区间：整个直线或射线（即半直线）$x \leqslant a$，$x < a$，$x > a$，$x \geqslant a$（有时记为 $(-\infty, +\infty)$，$(-\infty, a]$，$(-\infty, a)$，(a, ∞)，$[a, \infty)$）（也可参见原书中译本第一卷第一分册第 24 页）.

(a)* 试证明上面所示各种区间包括了数轴上的一切连通子集.

(b) 试定出满足下列不等式的区间（关于 x 的）：

(i) $x^2-3x+2<0$；

(ii) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$，　$a<b<c$；

(iii) $|1-x|-x \geqslant 0$；

(iv) $\frac{x-a}{x+a} \geqslant 0$；　(v) $\left|x+\frac{1}{x}\right| \leqslant 6$；

(vi) $[x]\leqslant x/2$，见第 1.1c 节问题 1；

(vii) $\sin x\geqslant\sqrt{2}/2$.

(c) 设 $a\leqslant x\leqslant b$，试证明 $|x|\leqslant|a|+|b|$.

3. 试证明下列不等式:

(a) $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2,\quad x>0$；

(b) $x+\dfrac{1}{x}\leqslant -2,\quad x<0$；

(c) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2,\quad x\neq 0$.

4. 两个正数 a 与 b 的调和平均 ξ 定义如下:

$$\frac{1}{\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

试证明调和平均不超过几何平均，即 $\xi\leqslant\sqrt{ab}$. 又问何时两者相等?

5. 试证明下列不等式:

(a) $x^2+xy+y^2\geqslant 0$；

(b)* $x^{2n}+x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2+\cdots+y^{2n}\geqslant 0$；

(c)* $x^4-3x^3+4x^2-3x+1\geqslant 0$.

试问何时等式成立?

6.* 试问 $n=2,3$ 的 Cauchy[1] 不等式的几何意义是什么?

7. 试证明: Cauchy 不等式中等号成立当且仅当 a_ν 正比于 b_ν，即 $ca_\nu+db_\nu=0$（对一切 ν），其中 c 与 d 不依赖于 ν 且均不为 0.

8. (a) 当 $a_1<a_2<a_3$ 时，$|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|\geqslant a_3-a_1$. 试问 x 取何值时等式成立?

(b)* 试求对于一切 x 使得下式成立的最大 y 值:

$$|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|\geqslant y,$$

---

1) Cauchy 不等式如下:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\times(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$——译者注

其中$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. 试问在什么条件下等式成立?

9. 试证明对于正数 a, b, c, 下列不等式成立:

(a) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$;

(b) $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$;

(c) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a + b + c)$.

10. 假设 x_1, x_2, x_3和a_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ 均为正数, 并且 $a_{ik} \leqslant M$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1$. 试证明

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{33}x_3^2 \leqslant 3M.$$

11. *试证明下列不等式, 且给出当 $n \leqslant 3$ 时的几何解释:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \leqslant \sqrt{(a_1^2 + \cdots + a_n^2)} + \sqrt{(b_1^2 + \cdots + b_n^2)}.$$

12. 试证明下列不等式, 且给出当 $n \leqslant 3$ 时的几何解释:

$$\sqrt{(a_1 + b_1 + \cdots + z_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n + \cdots + z_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2} + \cdots + \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_n^2}.$$

13. 试证明 n 个正数的几何平均值不大于其算术平均值, 即如果 $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

(提示: 假定 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. 第一步, 用几何平均值来代替 a_n, 并调整 a_1, 使得几何平均值保持不变.)

练 习 的 答 案

(第 1.1 节 e, 第 13 页)

1. (a) 正确; (b) 错误; (c) 错误; (d) 正确; (e) 正确; (f) 正确; (g) 错误; (h) 正确.

3. (a) $|x-1| + |x-2| \geqslant |(x-1)-(x-2)| = 1$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.

(b) $|x-1| + |x-2| + |x-3| \geqslant |(x-1) - (x-3)| + |x - 2| \geqslant 2, x = 2$.