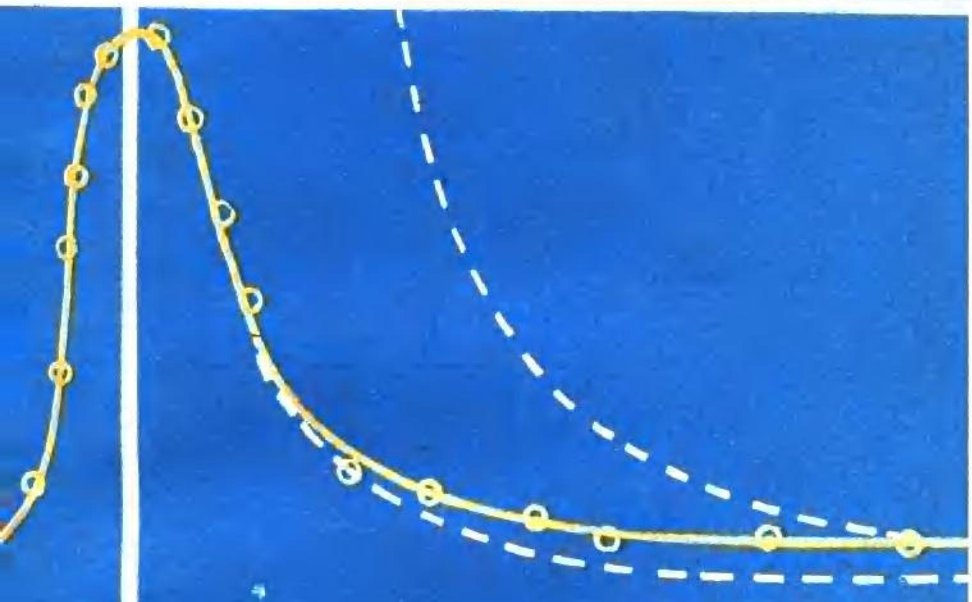
〔苏〕 Ф. Г. Серова А. А. Янкина著



理论物理习题汇编

量子力学 统计物理

仁毅志 译

吕景发 陈之江 校

南开大学出版社

理论物理习题汇编

〔苏〕 Ф. Г. Серова
А. А. Янкина 著

仁毅志 译

吕景发
陈之江 校

南开大学出版社

1988

内 容 简 介

本书收集量子力学和统计物理各类习题共520道（量子力学312题，统计物理208题），内容丰富、知识面宽。选题注重与教科书有机联系，注重弄清概念，同时又由浅入深。

书中绝大部分习题都有题解或答案。解题思路开阔、方法灵活、启发性强。

本书适合高等院校的学生和教师阅读，也可供专科学校的师生及自学者使用。

理论物理习题汇编

〔苏〕 Ф.Г.Серова А.А.Янкина 著

仁毅志 译

吕景发 陈之江 校

南开大学出版社出版

（天津八里台南开大学校内）

新华书店天津发行所发行

唐山市印刷厂制版

天津蓟县新欣印刷厂印装

1989年12月第1版　1989年12月第1次印刷

开本：787×1092 1/32　印张：6.75

字数：142千　印数：1－3,000

ISBN 7-310 00189-3/O·34　定价：1.60元

序 言

《理论物理习题汇编》是原作者为苏联师范院校物理专业学生写的一本教学参考书。该书以量子力学和统计物理为主要内容。文中论证明确、思路清晰，注重对基本概念的理解和作题的训练，是一本较好的课外参考书。对于理、工科大专学生都有参考价值。

仁毅志同志把它译成中文，由南开大学出版社出版是一件很有意义的工作。我想它的出版将会使我国学习量子力学和统计物理的学生更能开阔视野，开展思路，提高理解能力。我们有责任向我国学生介绍国外较好的教学参考书，我们的教育要面向世界。

在仁毅志同志译作出版之际，愿向读者推荐。

赵景员

译者前言

本书译自苏联莫斯科教育出版社出版的《Сборник Задач По Теоретическои Физике》一书。本书分量子力学和统计物理两大章，每一章又分若干节，每一小节的开头都有简明的概论，精练地概括该节的基本内容，介绍了做题时要用到的主要公式，它能帮助读者掌握主要内容、启发解题思路。

作者是从事这两门课程教学的老师，有丰富的教学经验。书中许多题目的解答，就是他们在长期的教学实践中亲手做成，一些题目也是他们根据教学中出现的问题自编而成。因此本书有一定特色，很适合正在学习这两门课的学生阅读，也可供教师参考。

在翻译时，我们还做了二件事：

i） 改正了原书的几处错误。

ii） 为了方便读者，对原书中一些苏联惯用的物理量符号及运算方法表述，都根据国家标准或我国习惯作了改变。

值此，译者首先感谢南开大学前教务长赵景员教授为本书写序和对本书的出版及译者的关怀与支持。并对南开大学出版社的编辑同志致谢，是他们的热情支持和辛勤工作，才使本书得以出版。

本书译稿量子力学部分承吕景发同志校对，统计物理部分承陈之江同志校对，在此对他们表示衷心感谢。

由于译者水平所限，错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

1985年8月于南开大学

原 序 言

这本理论物理习题汇编，包括量子力学和统计物理两部分的习题。主要是为师范大学的学生写的。

在编写和选题时，我们的指导动机是：

1）与理论物理教材的有机联系；

2）内容的连贯性；

3）数学工具的通俗化。

在每一小节的开头，都有简明的概述和基本公式。许多习题取自已出版的参考材料，部分习题和大部分的解答，均由作者编写的。叙述时采用的是国际单位制。

作者感谢物理-数学博士T.H.博洛特尼科瓦娅和M.C.斯维尔斯基教授，感谢他们评阅了这本教材和提出了宝贵意见，因而使得它有了改善。同时，也对那些为了改善这本习题汇编给我们寄来宝贵意见和建议的所有读者，表示感谢。

目　录

第一章　量子力学

§1。量子力学的实验基础…………………………(1)
§2．量子力学算符……………………………………(6)
§3．量子态跃迁　运动积分……………………………(14)
§4．定态薛定谔方程……………………………………(19)
§5．量子力学中的近似方法……………………………(31)
§6．自旋　原子的磁性…………………………………(36)
§7．全同粒子体系　多电子的原子和分子…………(42)
§8．量子跃迁　辐射理论基础…………………………(47)
§9．散射理论……………………………………………(52)

第二章　统计物理

§10。相空间　吉布斯正则分布…………………………(57)
§11。麦克斯韦分布………………………………………(62)
§12。外力场中的玻耳兹曼分布…………………………(65)
§13。热力学函数和经典气体的状态方程……………(69)
§14。量子正则分布………………………………………(74)
§15。量子分布函数………………………………………(78)
§16。涨落理论基础和布朗运动…………………………(84)
§17。非平衡过程理论部分………………………………(90)

答案和题解……………………………………………… (95)

附 录

Ⅰ．基本物理常数…………………………………… (201)
Ⅱ．狄喇克δ函数…………………………………… (201)
Ⅲ．Γ函数…………………………………………… (202)
Ⅳ．$J(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-\alpha x^n} dx$ 型积分的计算…………(202)
Ⅴ．误差积分……………………………………………(203)
Ⅵ．某些量子分布函数的积分………………………(203)

第一章　量子力学

§1. 量子力学的实验基础

卢瑟福原子模型　玻尔理论

经典物理不能解释卢瑟福原子的稳定性和原子光谱的线状特性。

H. 玻尔借助以下假设，建立了类氢原子理论

1. 原子中的电子沿稳定的（固定的）轨道运动时，不辐射能量。

2. 原子只在其电子从一个定态轨道跃迁到另一个定态轨道时，才辐射或吸收能量。这时辐射（或吸收）频率取决于下式

$$\nu=(E_2-E_1)/h \tag{1.1}$$

其中E_2和E_1分别是原子两个定态能量值．h是普朗克常数。

体系的分立能谱服从以下量子化条件

$$\oint p_i \mathrm{d}q = hn_i \tag{1.2}$$

其中 $n_i=0$，1，2，…——量子数，q_i——广义坐标，p_i——与q_i共轭的广义动量；$i=1$、2、…，k（k——体系的自由度）。

类氢原子的谱线频率按巴耳末公式计算

$$\nu = cRZ^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \tag{1.3}$$

其中R——里德伯常数，n_1和n_2——发生跃迁的两个定态量子数。

里德伯常数与核质量的依赖关系表为以下公式

$$R = \frac{R_\infty}{1 + \dfrac{m_0}{M_N}} \tag{1.4}$$

其中M_N——核质量，R_∞——里德伯常数的极限值，它对应于无限大的核质量。

1.氢原子中，电子绕质子以半径为0.53×10^{-10}米转动，试估算电子落到核上所需要的时间。假设电子在辐射过程中的能量损失是按照以下经典电动力学公式计算

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\,\frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\,\ddot{\boldsymbol{r}}^2$$

其中$\ddot{\boldsymbol{r}}$——电子的加速度矢量。

2.利用量子化条件式（1.2），试求频率为ω的一维振子的能级。

3.质量为m_0的粒子，在中心对称势场中按圆轨道运动，粒子的势能$U=kr^2/2$，其中r——轨道半径。试利用量子化条件确定粒子的能级。

4.当电子从第$n+1$个轨道跃迁到第n个轨道时，证明类氢原子的辐射频率在$n\gg1$时等于电子在第n个轨道时的反演频率（对应原理）。

5.处于激发态的氢原子，如果已知它在跃迁到基态时，

原子辐射出两个波长分别为$\lambda_1 = 65630$埃和$\lambda_2 = 12160$埃的光子。试求其量子数n。

6.试计算氦离子（He^+）和锂离子（Li^{2+}）的电离势及第一激发势。

7.计入类氢原子核的运动，并引入约化质量。试得出处在n态的电子能量表达式，并求里德伯常数与核质量的关系。

8.试找出氢和氘的如下差别

a）基态电子的结合能

b）巴耳末系主线的波长

c）第一激发势

9.试对阳电子＋电子系统，求

a）阳电子定态轨道半径

b）阳电子电离势

c）共振线波长

10. 试求μ原子（核周围的电子被μ介子所代替的类氢原子）第一玻尔轨道半径、基态结合能和第一激发势。

微观粒子的波动性　测不准关系

所有微观粒子都显现出波粒二象性。粒子的波、粒特性之间的关系表示成

$$E = \hbar\omega \tag{1.5}$$

$$p = \hbar k \tag{1.6}$$

其中E——能量，ω——圆频率，k——波矢量，p——动量。

按德布罗意假设，一个自由运动的粒子对应一个单色平面波

$$\Psi(x,\ t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \equiv Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-xp)} \tag{1.7}$$

波长为 $$\lambda = h/p = h/mv \tag{1.8}$$

微观粒子的波一粒二象性将导至海森堡测不准关系

$$\Delta x_i \cdot \Delta p_{x_i} \propto \hbar \tag{1.9}$$

其中 Δx_i——坐标的测不准量，Δp_x——对应的动量投影测不准量。

11．当电子经过加速电位差 $V = 10^3$ 伏时，试问它的德布罗意波长为何值？

12．当电子和质子的动能等于室温下单原子分子热运动的平均动能时，试求它们的德布罗意波长。

13．试问一个动能为 24.6 电子伏〔注〕（氦原子电离能）的电子，其德布罗意波长 λ 为何值？并将 λ 值与氦原子直径 $d = 2.2$ 埃作比较。当讨论氦原子中电子运动时，需要考虑物质的波动性吗？

14．试求动能为 7.7 兆电子伏的 α 粒子的德布罗意波长。在卢瑟福散射实验中，重要的散射距离量级为 10^{-15}米，而在分析实验时通常不考虑 α 粒子的波动性，这样做对吗？

15．1929 年埃斯泰曼（Эстерман）和斯特恩（Stern）完成了将氦原子打在氟化锂（LiF）晶体上，产生衍射的试验。试问：当温度 $T = 290$ K 能量为（3/2）kT 时，氦原子的德布罗意波长为何值？

16．当电子按非相对论公式计算德布罗意波长值较之按相对论公式的计算值误差不超过 1％时，试求电子的动能值。类似，对质子也作同样的计算。

17．试利用麦克斯韦速率分布函数，求气体分子在热平

〔注〕 1 电子伏 $= 1.602\ 177\ 33 \times 10^{-19}$ 焦耳——责任编辑

衡状态下按德布罗意波长的分布，并计算氢分子在温度为300 K时最大几率的德布罗意波长。

18. 质量为m_1，动能为E_k的非相对论粒子，和正前方质量为m_2的静止粒子发生弹性碰撞。试在粒子体系的质心系中，求碰撞后粒子的德布罗意波长。

19. 电子衍射实验中，能量为200 电子伏的电子束射到多晶体箔上。实验指出，第一级衍射环直径等于3 厘米，箔与屏幕的距离为15 厘米，试求晶体平面之间的距离d。

20. 设衍射图形是由动能为$E_K=24$ 电子伏的电子束穿过双缝光阑而形成的，双缝之间距离$d=30$ 微米，屏幕与光阑的距离$l=100$ 厘米。试求电子的相邻最大密度之间的距离Δx。

21. 借助于宽度为d的狭缝来进行粒子坐标测定。试证，相应粒子动量投影的测不准量是$h/\Delta x$，其中$d=\Delta x$。

22. 试证：当粒子的动量确定时（按散射光频率）引起坐标的不确定满足不等式

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \pi\hbar$$

23. 证明：利用显微镜对粒子坐标进行测定时，引起粒子动量的不确定，且满足

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant h$$

24. 试问：处在线度为0.1 微米数量级区域中的电子，它的动量测不准量是什么？和这个动量相应的能量是什么？

25. 试估算氢原子中电子速率的测不准量，假设氢原子直径$d=10^{-10}$ 米。将求得的速率测不准量和玻尔第一轨道上电子速率作比较。

26. 试由测不准关系出发，证明电子不可能处在原子核内部。

27. 对于氢原子中的电子，假设它到核的距离是属于测不准量级，试估算氢原子最小可能能量和相应的电子到核的距离。

28. 试证：粒子任何一个玻尔轨道长度都是德布罗意波长的整数倍。

29. 静止质量为 m_0 的微观粒子，处在宽度为 l 的一维无限深势阱中，如果 $\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \pi\hbar$，试估算粒子的最小可能能量。

30. 从测不准关系出发，证明线性谐振子的最小可能能量量级为 $\hbar\omega$（ω——振子的固有圆频率）。

31. 对于氦原子中的两个电子，假设它们的位置（即它们到核的距离）是测不准的，试粗略估计氦原子可能的最小能量和相应电子到核的距离。

§2. 量子力学算符

算符 $\hat{A}$ 如果满足

$$\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2 \tag{2.1}$$

则称 $\hat{A}$ 为线性算符。其中 c_1，c_2——常数，ψ_1 和 ψ_2——某变量的函数。

如果

$$[\hat{A}, \hat{B}]_- = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \tag{2.2}$$

则称算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 对易。

满足条件

$$\int \psi_1^* \hat{A}\psi_2 d\tau = \int \psi_2 \hat{A}^* \psi_1^* d\tau \tag{2.3}$$

的算符 $\hat{A}$ 称为自伴算符或厄密算符。星号表示对应的复共轭函数和复共轭算符；积分沿独立变量的整个变化范围进行。

$d\tau$——上述区域的体积元。

算符的本征函数和本征值由方程

$$\hat{A}\psi_n = A_n\psi_n \tag{2.4}$$

所决定，其中A_n——常数。

满足标准条件（有限、连续和单值）的本征函数集合，构成一个正交归一的完备集

a）对本征值A_n为分立谱的情况

$$\int \psi_m\psi_n^* d\tau = \delta_{nm} \equiv \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{2.5}$$

b）对本征值是连续谱的情况

$$\int \psi_{A'}\psi_A^* d\tau = \delta(A' - A) \equiv \begin{cases} \infty & A' = A \\ 0 & A' \neq A \end{cases} \tag{2.6}$$

力学量在ψ态中的平均值等于

$$\overline{A} = \int \psi^* \hat{A} \psi d\tau \tag{2.7}$$

其中$\hat{A}$——相应的力学量算符。

函数$\psi(\boldsymbol{r})$按算符$\hat{A}$的本征函数$\psi_n(\boldsymbol{r})$和$\psi_A(\boldsymbol{r})$展开为

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_n c_n\psi_n + \int_{A_2}^{A_1} c(A)\psi_A dA \tag{2.8}$$

其中

$$\begin{aligned} c_n &= \int \psi(\boldsymbol{r})\psi_n^*(\boldsymbol{r}) d\tau \\ c(A) &= \int \psi(\boldsymbol{r})\psi_A^*(\boldsymbol{r}) d\tau \end{aligned} \tag{2.9}$$

展开系数c_n和$c(A)$的总体则是“A表象”中的波函数，并且

$$\sum_n \left| c_n \right|^2 + \int_{A_2}^{A_1} \left| c(A) \right|^2 dA = 1 \tag{2.10}$$

任意算符$\hat{B}$在“A表象”中用下面矩阵元的总体给定

$$B_{kn} = \int \psi_k^* \hat{B} \psi_n d\tau \tag{2.11}$$

基本量子力学算符在坐标表象中为$\hat{p}_x=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$，

$\hat{p}=-i\hbar\nabla$——动量投影算符和动量矢量算符

$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2+U(x,y,z)$——总能量算符(哈密顿量)

$$\left.\begin{aligned}\hat{L}_x&=y\hat{p}_z-z\hat{p}_y\\ \hat{L}_y&=z\hat{p}_x-x\hat{p}_z\\ \hat{L}_z&=x\hat{p}_y-y\hat{p}_x\end{aligned}\right\}$$——角动量投影算符

$\hat{L}^2=\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2+\hat{L}_z^2=-\hbar^2\nabla^2_{\theta\varphi}$——角动量平方算符

其中∇——梯度算符，

$U(x,y,z)$——粒子在保守场中的势能；

∇^2——拉普拉斯算符。在球坐标系中

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2&=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\nabla^2_{\theta\varphi}\\ \nabla^2_{\theta\varphi}&=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}\right\}\quad(2.12)$$

32. 试求算符$\frac{d^2}{dx^2}x^2$和$(\frac{d}{dx}x)^2$对下列函数的作用结果

a) $\sin x$　　　　b) e^{2x}

33. 由算符$\hat{A}$来定义一个函数f，将该函数作类似于泰勒级数展开。试证，若算符$\hat{A}=\frac{\partial}{\partial x}$时，则下面算符等式成立

$$e^{\alpha\hat{A}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}$$

其中α——常数。

34. 试证：对于任意算符$\hat{\sigma}$，其平方等于1($\hat{\sigma}^2=1$)时，

则下面的式子成立

$$e^{i\theta\hat{\sigma}}=\cos\theta+i\,\hat{\sigma}\sin\theta$$

其中 θ——实数。

35．试用动量算符来表示平移算符：

$$\hat{T}_a\psi(\boldsymbol{r})=\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a})$$

36．试求算符 $e^{kx\frac{\partial}{\partial x}}$ 对函数 $\psi(x)$的作用结果。

37．试求一个绕 n_0 的无限小转动算符，并用角动量算符 $\hat{L}$ 表示。

38．试证：如果算符$\hat{A}$和$\hat{B}$是线性的，则和$\hat{A}+\hat{B}$以及积$\hat{A}\hat{B}$也是线性的。

39．试问：复共轭算符$\hat{A}\psi=\psi^*$是否为线性算符？

40．试问：微分算符$\hat{A}=\partial/\partial x$是否为厄密算符？

41．试问：复共轭算符是否为厄密算符？"复共轭算符"的复数共轭是什么算符？

42。试证：任意算符$\hat{A}$和它的共轭算符之和是自轭（厄密）算符。

43。试证：如果算符$\hat{A}$和$\hat{B}$是厄密的，那么算符$\hat{A}+\hat{B}$和$\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$同样也是厄密的。

44．已知$\hat{A}$和$\hat{B}$是厄密算符，为了使它们的乘积仍是厄密算符，试问$\hat{A}$和$\hat{B}$之间应存在怎样的关系？

45．试证下列各算符的厄密性

a）$\hat{p}_x$　　b）$\hat{L}_z$　　c）$\hat{H}$　　d）$\hat{p}_x^2$

46．考虑到$\hat{L}_x$、$\hat{L}_y$、$\hat{L}_z$是厄密算符，试证算符$\hat{L}^2$的厄密性。

47．试证物理量A的均方值是正的。

48．试证：处在任何态ψ的能量平均值不小于基态能量