·青年自学读物·

中学数学综合习题选

（增订本）

周玉政 编著

辽宁人民出版社
一九七九年·沈阳

中学数学综合习题选
（增订本）
阎玉政 编著
•
辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
朝阳六六七厂印刷
•
开本：787×1092 1/32 印张：23 插页：2
字数：533,000 印数：220,001—720,000
1978年5月第1版
1979年11月第2版 1979年11月第1次印刷
统一书号：7090·67 定价：1.55元

再版前言

本书于去年出版后，收到许多读者来信。这些来信充分说明了我国广大青年学生和中学教师都在为我国加速实现四个现代化而努力学习，认真教学，和迫切需要数学参考书籍的心情；同时对我也是极大的鼓舞，鼓励着我为响应党中央、华主席提出的“极大地提高整个中华民族的科学文化水平”的号召努力不懈地工作。根据读者的意见和中学数学教学大纲（草案）的要求，对上一版中的个别地方作了修改，增添了概率和微积分的题解，对解析几何等其它部分也增加了一些内容。本书经过修订后，共有二千多个题。

这些题是我从做过的几万个题中选出来的，供读者参考。由于本人能力所限，疏忽与错误也一定不少，望读者指正。

修订稿的完成，得到钱永耀、陈显文、赵振海、谢光熹、包文华、林义亭、薛金慧等老师的协助，特向这些老师和来信指正的读者表示感谢。

周玉政

一九七九年二月

前　言

学好数学这门基础课，是响应党中央、华主席提出的向四个现代化进军的实际行动。据自己的体会，多做一些综合性数学习题是学好数学的重要一环。它对数学知识的巩固，对逻辑推理、计算技能、分析能力的提高都会起到一些良好的作用。

这本《中学数学综合习题选》是我二十多年来在教学工作中逐渐积累起来的。书中共有一千五百多道题。有些习题，既要用到代数知识，又要用到几何、三角知识，纵横上下牵涉面较广，有些题难度较大。编排次序不一定合适，读者可以根据自己的情况选做。绝大部分习题都有答案，有的还给了略解或提示。这些只是解法中的一种，不是唯一的，更不是最优的，仅供读者参考。个人能力有限，缺点错误一定不少，望读者批评指正。

本书底稿的完成、审阅，插图的绘制，得到大连工学院的蔡照太、白同亮、李学伟、杨文喜、赵振海、王振中以及其他院校的彭洪涛、陈显文、杨德荣、包文华、隋德修、李永贵等老师的大力协助，特向这些老师表示谢意。

周　玉　政

一九七八年四月

目　录

一、有关化简的习题

Ⅰ．有关代数式化简的习题

1．化简：$(a^2-b^2-c^2+2bc)\div\dfrac{a+b-c}{a+b+c}$．

提示：$a^2-b^2-c^2+2bc=a^2-(b-c)^2$．

答：$(a+c)^2-b^2$．

2．化简：$\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot\left[1+\dfrac{(a+b+c)(b+c-a)}{(a-b+c)(a+b-c)}\right]$．

略解：原式$=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\cdot\dfrac{[a^2-(b-c)^2]+[(b+c)^2-a^2]}{a^2-(b-c)^2}$

$$=\frac{4bc}{2bc}=2.$$

3．化简：$\left(x^2-\dfrac{2x}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\div(x^3+x^2+x)$．

答：$\dfrac{x-2}{x-1}$．

4．化简：$x[1+(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+(1-x)^4]$．

提示：括号内是一个公比为$(1-x)$的等比级数，利用求和公式可得$1-(1-x)^5$．

5．化简：$\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1}+\dfrac{x^3+1}{x^3-2x^2+2x-1}-\dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1}$．

提示：$\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1}=\dfrac{x-1}{x+1}$，

$\dfrac{x^3+1}{x^3-2x^2+2x-1}=\dfrac{x+1}{x-1}$．

答：0．

6．计算：$\left(\dfrac{2a^2+5ab+2b^2}{a^2-ab-2b^2}\div\dfrac{a+2b}{a-2b}\right)$

$\cdot\left(\dfrac{2a-b}{3a+b}-\dfrac{12a^2-b^2}{6a^2+5ab+b^2}+\dfrac{3a-b}{2a+b}\right)$。

答：$\dfrac{a-b}{3a+b}$。

7．计算：$\left(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$

$\div\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}-a}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$.

略解：原式$=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$\div\dfrac{a\sqrt{ab}-a^2+b\sqrt{ab}+b^2-b^2+a^2}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$

$=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{ab}(a+b)}$

$=\sqrt{b}-\sqrt{a}$.

8．化简：$\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$.

略解：原式

$=\dfrac{(a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2})+(ab-a^{-1}b^{-1})(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$

$=\dfrac{(a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2})+(a^2b^2-a^{-2}b^{-2}-a^2-b^2+a^{-2}+b^{-2})}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$

$=1$.

9．化简：$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}$，$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$。

提示：$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}=\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$

或：$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}=-\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}=-\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}$。

答：$-\sqrt[3]{2}$.

10. 化简：$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$。

略解：
$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}+1^2}$$
$$=\sqrt{x-1}+1。$$
$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$$
$$=\begin{cases}\sqrt{x-1}-1, & (x\geqslant 2);\\ 1-\sqrt{x-1}, & (1\leqslant x<2).\end{cases}$$

∴ 当 $x\geqslant 2$ 时，原式 $=2\sqrt{x-1}$；

当 $1\leqslant x<2$ 时，原式 $=2$。

11. 化简：$\sqrt{45}+\sqrt{8}-\sqrt{80}-\sqrt{18}+\sqrt{7+\sqrt{40}}$。

提示：
$$\sqrt{7+\sqrt{40}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{10}+(\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt{5}+\sqrt{2}.$$

答：0。

12. 化简：$\dfrac{x^{3n}}{x^n-1}-\dfrac{x^{2n}}{x^n+1}-\dfrac{1}{x^n-1}+\dfrac{1}{x^n+1}$。

答：$x^{2n}+2$。

13. 化简：$\dfrac{a^2+ab^2+b^3-b^2}{a^2+(b^2-2b)a-b^3+b^2}$。

略解：分子 $=(a+b)(a-b)+b^2(a+b)$
$$=(a+b)(a-b+b^2),$$
分母 $=(a^2-2ab+b^2)+(ab^2-b^3)$
$$=(a-b)(a-b+b^2),$$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{a+b}{a-b}$.

14．化简：$\sqrt{\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{12}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$.

答：$\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

15．化简：$\left(\sqrt{10+\sqrt{51}}+\sqrt{10-\sqrt{51}}\right)^2$.

答：34。

16．化简：$(2+3^{\frac{1}{2}})^{-3}+(2-3^{\frac{1}{2}})^{-3}$.

提示：原式 $=\dfrac{(2-\sqrt{3})^3+(2+\sqrt{3})^3}{(2+\sqrt{3})^3(2-\sqrt{3})^3}=52$.

17．化简：$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

答：1。

18．化简：$\sqrt{2+\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}$

略解：原式 $=\sqrt{2+\sqrt{3+2\sqrt{5+12(\sqrt{2}+1)}}}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3+2(3+2\sqrt{2})}}$

$=\sqrt{2+1+2\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}+1$.

19．化简：$\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2$.

略解：原式 $=\left(\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}\right)^2$

$=\left[\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{3}+1}+\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2-(\sqrt{3}-1)}\right]^2$

$=\left(\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}}\right)^2$

$$=\left(\frac{6\sqrt{2}}{6}\right)^2=2.$$

20．化简：$\dfrac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$.

提示：原式$=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+3}$.

再将分母有理化。　　答：1.

21．化简：$\left[16+\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}-\dfrac{2(x-a)}{x+a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

答：$\dfrac{4(x^2+a^2)}{x^2-a^2}$（当 $x^2>a^2$ 时），

$\dfrac{4(x^2+a^2)}{a^2-x^2}$（当 $x^2<a^2$ 时）。

22．若 $3y=x+2z$，化简：$x^3-27y^3+8z^3+18xyz$.

提示：利用公式：

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

23．若 $4x^2-4x-3\leqslant 0$，

化简：$\sqrt{4x^2+4x+1}+\sqrt{4x^2-12x+9}$.

略解：解不等式得 $-0.5\leqslant x\leqslant 1.5$.

原式$=\sqrt{(2x+1)^2}+\sqrt{(2x-3)^2}$

$=(2x+1)+(3-2x)=4.$

24．计算：$\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{x^2-10x+25}$.

答：当 $x\leqslant -3$ 时，得 $4-3x$，

当 $-3<x\leqslant 2$ 时，得 $10-x$，

当 $2<x\leqslant 5$ 时，得 $x+6$，

当 $\quad x>5$ 时，得 $3x-4$.

25. 求下面 n 个二项式的乘积：

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\cdots\cdots\left(x^{2^{n-1}}+\frac{1}{x^{2^{n-1}}}\right).$$

提示：先将原式乘以$\left(x-\frac{1}{x}\right)$，再除以$\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

答：$\dfrac{x^{2^{n+1}}-1}{x^{2^{n}-1}(x^2-1)}$.

26. 计算：$\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

提示：$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

将 $n=1$、2、3 ……$(n-1)$、n 代入后

两边分别相加.

答：$\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

27. 化简：$\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\dfrac{4}{5!}+\cdots\cdots+\dfrac{n-1}{n!}$.

提示：$\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$.

将 $n=3$、4、5……n 代入后

两边分别相加.

答：$\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{n!}$.

28. 约简：$\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$，（n 和 m 为大于 1 的正整数）.

并计算当 $x=1$ 时的值.

提示：$\dfrac{x^n-1}{x^m-1}=\dfrac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots\cdots+x+1}$.

答：$\dfrac{n}{m}$.

29．化简：$\dfrac{x_2}{x_1(x_1+x_2)}+\dfrac{x_3}{(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)}$

$$+\frac{x_4}{(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3+x_4)}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{x_n}{(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1})(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1}+x_n)}.$$

提示：$\dfrac{x_n}{(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1})(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1}+x_n)}$

$$=\frac{1}{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1}}-\frac{1}{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1}+x_n}.$$

答：$\dfrac{x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n}{x_1(x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n)}$.

30．化简：$\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

略解：① 原式$=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+1)=\sqrt{10}.$$

② $\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$

$$=\sqrt{(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}})^2}$$

$$=\sqrt{6+2\sqrt{9-5}}=\sqrt{10}.$$

31．化简：$\cos10°\cdot\cos20°\cdot\cos30°\cdot\cos40°\cdot\cos50°\cdot\cos60°\cdot\cos70°\cdot\cos80°\cdot\cos90°$.

32．化简：$(\sin15°\cos15°+\sin30°\cos60°+\sin45°\cos75°)\lg \operatorname{tg} 45°$.

33．化简：

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{p+q}{p-q}}\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{p-q}}+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\right].$$

略解：原式$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-\frac{p+q}{p-q}}\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{p-q}}+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\right]$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left[\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right]$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}=2.$$

34．化简：$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}+\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}+\frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$.

略解：原式$=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$=2(\sqrt{6}+\sqrt{5}).$$

35．化简：$\frac{a+x}{(a-b)(a-c)}+\frac{b+x}{(b-c)(b-a)}+\frac{c+x}{(c-a)(c-b)}$.

答：0。

36．求　$21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}$的一个平方根。

解：设所求平方根为$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$

则　$21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}$

$$=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}.$$

令　$2\sqrt{xy}=8\sqrt{3}$

$2\sqrt{xz}=4\sqrt{5}$

$2\sqrt{yz}=4\sqrt{15}$

上面三式相乘可得　$xyz=240$。

即　$\sqrt{xyz}=4\sqrt{15}$。

∴　$\sqrt{z}=\sqrt{5}$，$y=2\sqrt{3}$，$\sqrt{x}=2$。

且　$x+y+z=4+12+5=21$。

故所求平方根为　$2+2\sqrt{3}-\sqrt{5}$。

37．求　$26+15\sqrt{3}$　的实立方根。

解：令　$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=x+\sqrt{y}$，

$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=x-\sqrt{y}$。

则　$\sqrt[3]{26^2-15^2\cdot 3}=x^2-y$。

即　$x^2-y=1$。

又∵　$26+15\sqrt{3}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}$

∴　$x^3+3xy=26$。

将　$y=x^2-1$　代入上式

$$x^3+3x(x^2-1)-26=0$$

即　$4x^3-3x-26=0$

即　$(x-2)(4x^2+8x+13)=0$

由此得实数根　$x=2$，再求得　$y=3$。

故所求的实立方根为　$2+\sqrt{3}$。

38．化简：

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$$

答：$\dfrac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}$。

Ⅱ．有关指数式、对数式化简的习题

1．计算：$100^{1-\lg\frac{5}{2}}$

答：16。

2. 计算：$(\log_2 6)\left(\lg\frac{1}{8}\right)+\lg\frac{54}{250}$。

解：原式 $=\frac{\lg 6}{\lg 2}\cdot(-3\lg 2)+3\lg\frac{3}{5}$

$$=-3\left(\lg 6-\lg\frac{3}{5}\right)=-3.$$

3. 计算：$3+\lg 1.25-\lg 2.28+\frac{1}{2}\lg 8.1225-6\lg 5$。

解：原式 $=\lg\frac{1250\times\sqrt{8.1225}}{2.28\times 5^6}=\lg\frac{28.5}{285}=\lg\frac{1}{10}=-1$。

4. 计算：$\log_{2\sqrt{2}}32\sqrt[5]{4}$。

解：原式 $=\frac{\log_2 32\sqrt[5]{4}}{\log_2 2\sqrt{2}}=\frac{\frac{27}{5}}{\frac{3}{2}}=\frac{18}{5}$。

5. 计算：$\log_9 \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}+\log_8 \sin\frac{3\pi}{4}$。

解：原式 $=\frac{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}{\log_3 9}+\frac{\log_2 2^{-\frac{1}{2}}}{\log_2 8}$。

$$=\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{-\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{12}.$$

6. 计算：$\log_{27}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}+\log_{16}\cos\frac{7\pi}{4}-\log_3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$。

答：$-\frac{7}{24}$。

7. 计算：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lg 2 \\ 2 & \lg 2 & \lg 2 \\ 4 & \lg 16 & 0 \end{vmatrix}$。

答：0。