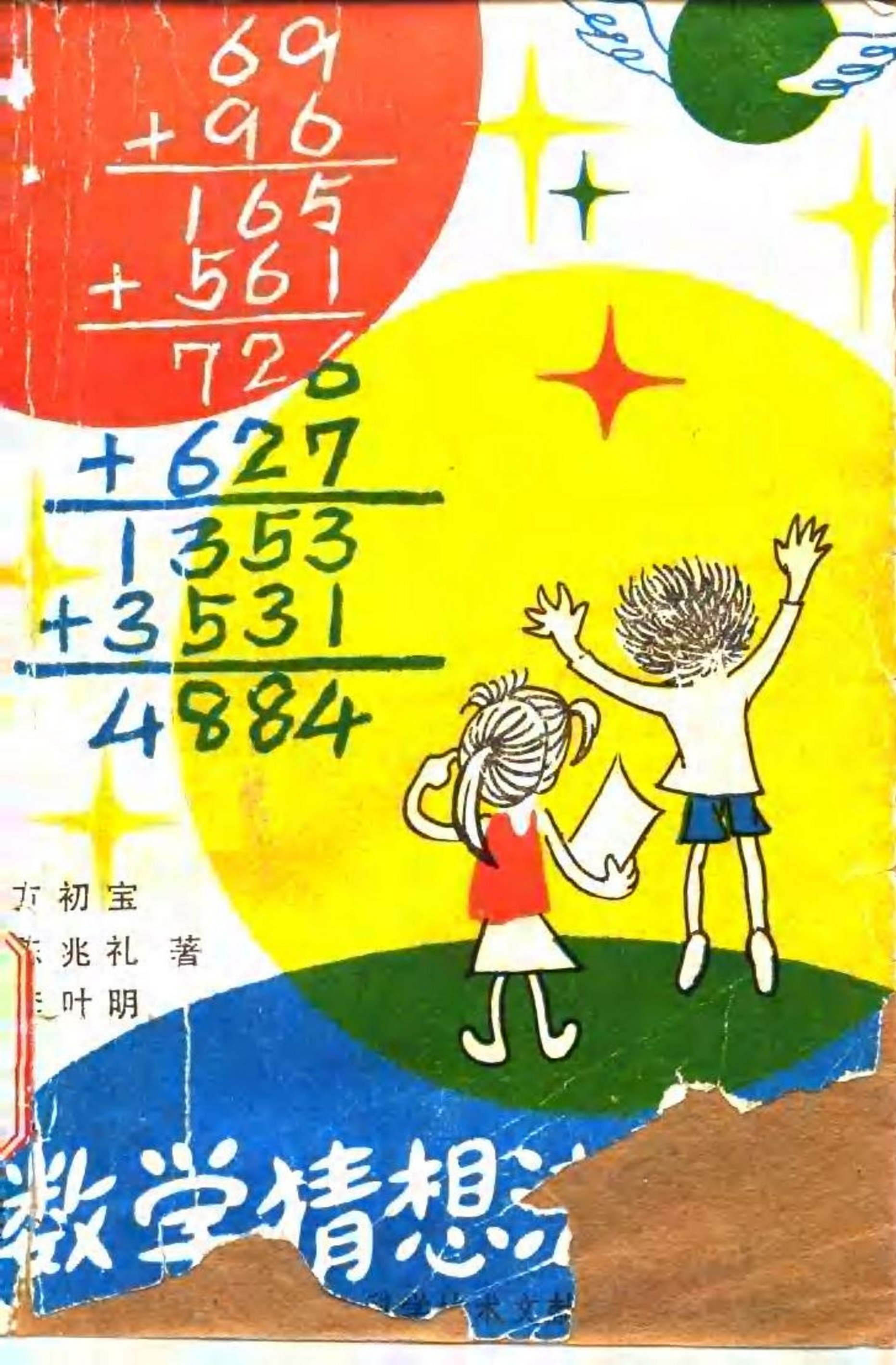

69
+96
165
+561
726
+627
1353
+3531
4884
初宝
兆礼 著
叶明
数学猜想

数学猜想法浅谈

方初宝 陈兆礼 李叶明 著

科学技术文献出版社重庆分社

内 容 简 介

数学猜想法是数学中的发现法，是一种创造性的思维方式。本书通过具体例子，介绍了归纳法、类比法、一般化与特殊化、几何直观法、物理模拟法以及“灵机一动”等常用的数学猜想法。全书分七讲，每讲附有习题和解题提示。

本书可供各级学校教师，高等院校数学系学生，中学生及广大数学爱好者阅读。

数学猜想法浅谈

方初宝 陈兆礼 李叶明 著

责任编辑 栾季生

科学技术文献出版社重庆分社 出版

重庆市市中区胜利路132号

新华书店重庆发行所 发行

中共重庆市委机关印刷厂 印刷

开本：787×1092毫米1/32 印张：9 字数：18万

1988年10月第1版 1988年10月第1次印刷

科技新书目：180—283 印数：1—6500

ISBN7-5023-0245-X/G·113 定价：2.20元

要善于严谨，也要善于不严谨（代序）

麦雨农

数学教育，一向强调严谨性.方初宝老师素以治学严谨著称，但他在本书却也提倡不严谨的“猜想”或“合情推理”，为什么？我想，可以从猜想的性质和作用来看.为此，先看一些事例.因为，说明问题，最好举例.

一

从最简单的（一阶）等差数列

A_1: 1, 2, 3, …, n

开始，取它的各个部分和

$S_1^{(1)}=1$, $S_2^{(1)}=1+2$, …, $S_n^{(1)}=1+2+3+\cdots+n$

构成二阶等差数列

A_2: 1, 3, 6, 10, …, $S_n^{(1)}$;

又用A_2的各部分和$S_l^{(2)}=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+l)$

构成三阶等差数列

A_3: 1, 4, 10, 20, …, $S_n^{(2)}$;

如此继续下去，直到，比如说，A_{k+1}，共得$k+1$个数列

A_1: 1, 2, 3, 4, …, n

A_2: 1, 3, 6, 10, …, $S_{n}^{(1)}$

A_3: 1, 4, 10, 20, …, $S_n^{(2)}$ （1）

……………………………………………………………………

A_{k+1}: 1, $S_2^{(k)}$, $S_3^{(k)}$, ………, $S_n^{(k)}$

有时为了方便，补充定义“零阶等差数列A_0”为各项都等于1的数列。系列（1）的构造规则是

$$S_1^{(i)}=1,\quad S_j^{(i)}-S_{j-1}^{(i)}=S_j^{(i-1)},\ \text{即}\ S_{j-1}^{(i)}+S_j^{(i-1)}=S_j^{(i)} \tag{1.1}$$

问题是求数列A_{k+1}的通项$S_n^{(k)}$，也就是求k阶等差级数$S_n^{(k)}$的和.（由于系列（1）的递推性，应当从$S_n^{(1)}$开始.）

1. $S_n^{(1)}$很容易用不同的方法来求，其结果是众所周知的，但现在为了说明猜想的性质和作用，我们假定这个结果也是“未知待求”的.由（1.1）得

$$S_n^{(1)}-S_{n-1}^{(1)}=n \tag{2}$$

因此，如果能把$S_n^{(1)}+S_{n-1}^{(1)}$用n的代数式表示，问题就解决了.观察数列A_2开头的几项，容易看出一个局部性的实况：

$$S_{n-1}^{(1)}+S_n^{(1)}=n^2 \qquad (n=2,3,4) \tag{3'}$$

因此，自然会提出一个全局性的猜想：

$$S^{(1)}_{n-1}+S^{(1)}_{n}=n^2 \qquad (n=2,3,4,\cdots) \qquad (3)$$

到此，应当先判明猜想（3）是否真确，然后才好进行下去．用数学归纳法容易证明（3）对一切自然数n都是真确的．现在可以放心继续进行如下：公式（2）+（3），并且整理结果，即得

$$S^{(1)}_{n}=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (4)$$

摘要（摘取与猜想有关的重要信息）

在推求 $S^{(1)}_n$ 的中途，利用一个成功的猜想，其“不完善—完善”的过程是：

事实（3′）—→猜想（3）←—证明．

2．现在推求 $S^{(2)}_n$，回顾过去，注意到 $S^{(0)}_n=n$，$S^{(1)}_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，分别是$n$的一次、二次整式，因此，可以猜想 $S^{(i)}_n$ 是n的（i+1）次整式，特别是

$$S^{(2)}_{n}=an^3+bn^2+cn+d \qquad (5')$$

其中a、b、c、d可以用常用的待定系数法来确定．

这似乎过于大胆．为了慎重，先用它把 $S^{(1)}_n$ 核验一下：

设$S^{(1)}_n=an^2+bn+c$．

$$\left.\begin{array}{l} n=1: a+b+c=1 \\ n=2: 4a+2b+c=3 \\ n=3: 9a+3b+c=6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3a+b=2 \\ 5a+b=3 \end{array} \Big\} \; 2a=1.$$

$$a=\frac{1}{2}, \quad b=2-3a=\frac{1}{2}, \quad c=1-a-b=0.$$

$$S_n^{(1)}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+0$$

与(1)中所得的结果(4)相符. 又,常数为0可以这样理解:$n=0$时,$C=S_0^{(1)}$,而根据部分和的原意,可以认为$S_0^{(1)}=0$.这个"认为"是不严谨的,但却是合情的. 这样,我们大胆进一步把猜想(5′)修改为

$$S_n^{(2)}=an^3+bn^2+cn \tag{5}$$

于是,依次取n=1,2,3,得

$a+b+c=1$,$8a+4b+2c=5$,$27a+9b+3c=15$,

解之,得$a=\frac{1}{6}$,$b=\frac{1}{2}$,$c=\frac{1}{3}$,即

$$S_n^{(2)}=\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \tag{6}$$

这还只是猜想,是猜想(5)的具体化和改进. 改进之处在于它对$n=1,2,3$为真,但是,对$n>3$是否为真,还有待证明. 用数学归纳法容易证明(6)对一切的$n\in N$成立.

摘要

对于$S_n^{(2)}$,我们径直从猜想开始,又根据一定的事实和推想把猜想简化,然后用它和n=1,2,3的确实材料推导出对n=1,2,3为真的关系式(6),最后用数学方法证明"半真的"(6)为全真. 全过程可以简单地示意如下:

猜想(5′)⟶(5)⟶(6)⟵证明

3. 按次序现在该轮到$S_n^{(3)}$,但是,我们不大愿意慢吞吞地一步一步地推,而想跃进一下. 为此,应该回顾过去,以

期有所发现。我们已经取得的成果是：

$$S_n^{(0)}=n,\ S_n^{(1)}=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_n^{(2)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\ \cdots\cdots \tag{7'}$$

分母不是可以写成1！，2！，3！么？这就提示我们猜想：

$$S_n^{(k)}=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{(k+1)!} \tag{7}$$

这很可能是正确的.试用数学归纳法来证明它：假定猜想(7)对（$k-1$，$n\in N$）及对（k，$n=l$）成立，即

$$S_n^{(k-1)}=\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \tag{8}$$

$$S_l^{(k)}=\frac{l(l+1)\cdots(l+k)}{(k+1)!} \tag{9}$$

根据（1.1）和（9）、（8），有

$$S_{(l+1)}^{(k)}=S_l^{(k)}+S_{l+1}^{(k-1)}$$

$$=\frac{l(l+1)\cdots(l+k)}{(k+1)!}$$

$$+\frac{(l+1)[(l+1)+1]\cdots[(l+1)+(k-1)]}{k!}$$

$$=\frac{(l+1)[(l+1)+1][(l+1)+2]\cdots[(l+1)+k]}{(k+1)!}.$$

又，容易验证（7）对$S_n^{(1)}$及$S_1^{(k)}$成立，所以，（7）对一切的k、$n\in N$成立.〔证毕〕

摘要

部分事实(7′)⟶全面性猜想(7)⟵严谨的数学证明.

4. 一下子完全地解决了系列（1）的问题，产生它的通项公式的一般形式.那么,关于系列（1）没有什么搞头了吗？不！即使限于使用猜想法，也还有一题多变的问题.在此，我们只搞一变：系列（1）只是一个特殊的高阶等差系列，一般的高阶等差系列如何呢？

回顾过去，相信猜想（5）可以一般化，因此我们猜想：

k 阶等差数列b_1，b_2，b_3，…，b_n的通项是

$$b_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n \tag{10}$$

k阶等差级数$C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$的和是

$$S_n = a_0 n^{k+1} + a_1 n^k + \cdots + a_k n.$$

猜想（10）的事实根据只是系列（1），应当至少对系列（1）以外的数列（级数）试用一下.例如，求

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$ 的和$S(n)$.

解 $n(n+1) - (n-1)n = 2n$，

$$2n - 2(n-1) = 2 \qquad (n \in N)$$

$\longrightarrow$二阶等差级数.

$$S = an^3 + bn^2 + cn.$$

$$\begin{aligned}
n=1:&\quad a + b + c = 2 \\
n=2:&\quad 8a + 4b + 2c = 8 \\
n=3:&\quad 27a + 9b + 3c = 20
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
6a + 2b &= 4 \\
30a + 6b &= 16
\end{aligned}
\qquad 12a = 4$$

$$a = \frac{1}{3},\ b = 2 - 3a = 1,\ c = 2 - a - b = \frac{2}{3}.$$

$$S(n) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \tag{11}$$

证明 假定(11)对$n = l$成立，即

$$S(l) = \frac{l(l+1)(l+2)}{3}.$$

则$S(l+1) = S(l) + (l+1)[(l+1)+1]$

$$=\frac{l(l+1)(l+2)}{3}+(l+1)(l+2)$$

$$=\frac{(l+1)[(l+1)+1][(l+1)+2]}{3}.$$

即（11）对$n=l+1$也成立.又，容易验证$S(1)$成立.所以（11）对一切的$n\in N$成立.〔证毕〕

上例是对猜想（10）的一次核验，成功的结果增强了我们对它的信心，促使我们去证明它的真确性。但是，这项证明工作早已有人做了（参阅关于循环数列（级数）的专著）.上例是在假定不知（10）是定理的情况下做出来的.如果知道了（10）是定理，径直引用它，则上例以及诸如此类的工作就可以简化，即略去其后面部分的"证明"，并且，更重要的是，可以交给电子计算机去完成.当然，上例很简单，还是"手动"较为"经济"，但若等差阶数很高，则判明阶数和运用待定系数法的工作量都很大，交给电子计算机去做就大为"经济"，甚至是必要的了.又，如果对"证明（10）"的工作有志趣，那就是在知识技能增长上和智力发展上一次很有益的爬山运动了.

摘要

从（5）到（10）是科学探索和发现工作从小范围成功地闯进较大范围的事例之一.猜想（10）的成功给数列（级数）理论这个数学分支增添了一个有用的定理.

二

以上作为举一反三之用的几个猜想都是成功的，都经历了"从不严谨到完全严谨"、"从不完善到完善"的全过程。这个过程，前段是创新，后段是立新.有创，才能有立，才

能发展．新生事物总是不完善的，加工完毕、入库待销的产品则应当是100%合格的．几千年来，数学及其日益增多的分支，就是这样产生和发展起来的，并将永远这样发展下去．这就是数学猜想或合情推理以及其他创造性手段的根本性质和主要作用．数学教本中所写的都是100%合格的数学产品，其中源自猜想的则是"合情推理一逻辑证明"的后段成果，这是对的，因为它是"成果汇编"、"产品介绍"。但在传统的、因循的数学教育的实践中，大都"以教本为主"，并且"照本宣科"，因而只突出了后段，而忽视前段。教育和教师的任务是为国育才，要求多出人材，特别是多出具有创新、立新精神和智能的人材．忽视前段创新才能的教育实践是片面的，不对的．因此，加上其他许多理由，

让我们教猜想吧！

数学从来是"善始善终"的典范，是善于"从不严谨到严谨"的典范，是不断"纳新"而无需"吐故"因而永葆青春的典范．数学一向可靠，永远可靠，其原由就在于此。我们应当将这个"传家之宝"整个地一代一代传下去，而不仅仅传半个．

让我们教创新、立新的全过程吧！

不成功的猜想形形色色，一言难尽．应当指出的是，它们也会起到或小或大，甚至很大的作用．四元术、非欧几何等分支的产生就是两个著名的事例．下面举一个不大为人们注意到的颇有意味的事例：费马（Fermat，1601—1665）根据 $n=0$，1，2，3，4的实况，提出

形如 $2^{2^n}+1$ 的数是素数　（12）

的猜想，被欧拉（Euler，1701—1783）用 $n=5$ 的反例

$$2^{32}+1=641\times6700417$$

否定了，但高斯（Gauss，1777—1855）把（12）中的“的数是素数”改成“的素数”，用来正确地陈述“正多边形几何作图可能的充要条件”，并证明了充分性（后来另一个数学家证明了必要性）．我们的结论是：

请教猜想！成功的选教一些，失败的也选教一些！

前　言

数学向来以严谨、精确著称．从小学、中学到大学，凡是编入数学教科书的数学知识都是经过严格证明、百分之百地正确的。而猜想则未必正确．这两者之间究竟有什么关系呢？

当代深负众望的美国数学家、数学教育家G·波利亚教授指出："数学被人看作是一门论证科学．然而这仅仅是它的一个方面．以最后确定的形式出现的定型的数学，好象是仅含证明的纯论证性的材料，然而，数学的创造过程是与任何其他知识的创造过程一样的．在证明一个数学定理之前，你先得猜测这个定理的内容，在你完全作出详细证明之前，你先得推测证明的思路．你先得把观察到的结果加以综合，然后加以类比．你得一次又一次地进行尝试．" 这段话告诉我们，数学教科书中那些精辟的结论，深刻的定理，巧妙的证法，不是从天上掉下来的，而是数学家们运用各种各样的猜想法得到的．因此，数学猜想法是数学中的发现法，是一种创造性的思维方式．我们在学习数学时，不仅要掌握前人已经得到的成果，更重要的是要学习前人获得这些成果的思维方法（包括数学猜想法），并运用这些方法去获得新的成果。只有这样，数学才能不断发展，为人类社会的进步作出越来越大的贡献．

也许有些人认为，学习数学思维方法只是从事数学研究和数学教学工作的人的事，其实不然．不管干哪一行工作，要想把工作做得好一点，就必须具有一定的思维能力和想象

能力，都应掌握思考问题的一般方法，能够分析和解决工作中遇到的各种问题；进一步地，要想把工作做得很出色，开创新局面，或搞点发明创造，为社会作出较大的贡献，还必须有浓厚的创造意识和创造精神，具备一定的创造能力，我们把这些统称为能力。这些能力的培养，是各级各类学校各门课程的共同任务．数学素有“思维训练的体操”之称，是辩证法的辅助工具和表现形式，通过数学教学来培养上述能力，看来是最合适不过的。数学作为中小学的一门主课，它在培养学生的能力方面所起的作用是别的学科难以替代的．当今社会，数学的思维方法已日益广泛地渗透到各行各业和人们的日常生活，并在其中产生越来越大的影响．一些受过良好的数学思维方法训练的大学数学系毕业生改行从事其他工作，将数学思维方法与行政、经济管理等科学知识结合起来，必将产生出明显的效果．这一事实已经引起专家们的注意，并将逐步为人们所了解．正因为如此，现代数学教学观认为，在传授数学知识的同时，应该加强思维方法的训练，注重能力的培养；甚至认为后者比前者更为重要。这不仅是培养未来的数学专业人才的需要，而且是培养各行各业杰出人才，提高广大劳动者素质的需要．

我们现在数学教学的现状又如何呢？在数学教科书中，为使结构严谨与文字精炼，大部分内容的叙述都采用先给出结论后给出证明，在证明时又是从已知到未知，从条件到结论．一些缺乏教学经验的教师，往往简单地照本宣科．这样一来，发现定理、公式及其证明方法的过程，探求解题思路的过程等，这些数学思维的最精彩、最生动活泼的部分都被掩盖起来，学生不能从老师那里学到发现问题、分析和解决问题的方法．对他们来说，数学变成了定义、定理、公式

的堆砌，莫明其妙的推理和演算，以及为应付考试而进行的“程序输入”式的解题训练．这就极大地妨碍了学生思维能力的培养，影响教学质量的提高，甚至使学生对数学感到厌恶和可怕．要根本改变这种状况，需要进行多方面的综合治理，包括教学方法的改革．大力提倡教师教猜想，学生学猜想，无疑是数学教学方法改革的一项重要措施．波利亚曾经说过：“在数学教学中必须有猜想的地位．教学必须为发明作准备，或至少给一点发明的尝试．无论如何，教学不应该压制学生中间的发明萌芽．……教师应该说明，在数学领域中，猜想是合理的，值得尊敬的，是负责任的态度．请允许我在此向教授所有班级的数学教师们呼吁：**让我们教猜想吧！**”

波利亚教授的呼吁深深地打动了我们的心．近两年来，我们在教学中进行了教猜想的尝试，收到了初步的效果．为了引起广大师生对数学猜想的重视，为了与同行交流教猜想的经验，给中学生、师范院校数学系的学生以及数学爱好者提供一些学猜想的方法，我们以波利亚的名著《数学与猜想》为主要参考资料，结合自己的一些体会，在本书中介绍了归纳法、类比法、一般化与特殊化、几何直观法、物理模拟法以及“灵机一动”等一些常用的数学猜想法．这些猜想法既有联系，又有相对的独立性．它们对许多读者来说并不完全陌生．在本书中，我们除了从认识论上作一些初浅的探讨和简单的介绍以外，主要是通过例子来说话，借助例子介绍猜想的一般方法；对其中某些猜想还给出了详细的证明．所选例题多属初等数学范畴，高中学生就能看懂其中的大部分．对于少数属于高等数学的例题，看不懂的可以越过去，对领会本书的大意无多大影响．

本书先由方初宝在1985年秋构思出整个轮廓，搭起了架子，陈兆礼、李叶明参与了讨论、修订、增补，然后分头执笔，写成幻灯片说明的形式，作为数学思维方法训练系列讲座的材料，与广西师范学院、广西教育学院、河池师专数学系（科）的学生以及部分中学数学教师见面，反应尚可．1987年暑假，我们对这份材料做了进一步的提炼、充实和修订，改写成了目前这本书．第一、五、七讲由方初宝执笔，第二、三、四讲由陈兆礼执笔，第六讲由李叶明执笔，最后由方初宝统编、定稿．

波利亚说过："没有极简单的猜想方法，因此，也就不能有任何教猜想的极简单的方法．"我们这本书远没有把全部数学猜想法都包罗进来，而且限于我们的水平，对所介绍的几种猜想法的论述也是肤浅的，甚至可能有谬误之处，但波利亚说："教猜想不是不可能的"相信我们的同行在这方面有精深的见解和丰富的经验，只要我们继续进行不懈的实践、探讨，通过总结、交流，定能形成一套适合我国数学教学实际情况的、行之有效的教猜想、学猜想的方法．

广西数学会理事长、广西师范大学数学系麦雨农教授对本书自始至终给予极大的关怀、鼓励和支持，并在百忙中亲自为本书写了序言，我们表示衷心的感谢．广西师范学院数学系李浩智、李日光老师，广西教育学院数学系江业勤老师分别仔细审阅了本书各讲的稿件，提出了宝贵的修改意见．在此谨向他们表示谢意．

著　者

1987年10月于南宁

J311159112

目　　录