高等学校教材

# 微积分与数学模型(上)

# Calculus and Mathematical Models (vol.1)

● 主编 贾晓峰 副主编 石 冰

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots \quad x\in(-1,1]$$

$$x_n = x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-in\omega x}\,dx$$

CHEP 高等教育出版社

Springer 施普林格出版社

高等学校教材

N019117

# 微积分与数学模型

## （上）

主　编　贾晓峰
副主编　石　冰
编　委　张明学
杨　晋
王玉民
范庆民

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

（京）112号

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分与数学模型　上册／贾晓峰等　编．—北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，1999.8

ISBN 7-04-007599-7

Ⅰ．微…　Ⅱ．贾…　Ⅲ．①微积分-高等学校-教材　②数学模型-高等学校-教材　Ⅳ．0172.1②022

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第17641号

| | | | |
|---|---|---|---|
| **书　名** | 微积分与数学模型(上册) | | |
| **作　者** | 贾晓峰 主编 | | |
| **出版发行** | 高等教育出版社　施普林格出版社 | | |
| **社　址** | 北京市东城区沙滩后街55号 | **邮政编码** | 100009 |
| **电　话** | 010—64054588 | **传　真** | 010—64014048 |
| **网　址** | http://www.hep.edu.cn | | |
| **经　销** | 新华书店北京发行所 | | |
| **印　刷** | 北京民族印刷厂 | | |
| **开　本** | 880×1270　1/32 | **版　次** | 1999年8月第1版 |
| **印　张** | 15.25 | **印　次** | 1999年8月第1次印刷 |
| **字　数** | 430 000 | **定　价** | 21.00元 |

# 前　言

本书是我们承担高等学校工科数学课程教学指导委员会《微积分与数学模型》课程试点的改革教材，是用以替代原《高等数学》教材的.

近 20 年来，科学技术正发生着飞速进步，特别是电子计算机技术的高度发展和广泛普及，已经对社会的方方面面产生了深远的影响；另一方面，改革开放也使我国平稳地走向了全面的市场经济. 这两方面的巨大变化，将推动我们迅速地进入“知识经济”时代. 就数学而言，将越来越直接地服务于经济和科学技术的发展，“数学技术”也将越来越深入地被各行各业用于管理、控制、预测及探索经济及自然规律.

在这种形势下，高等学校非数学专业原来使用的《高等数学》教材已在诸多方面显示出了尖锐的不适应，改革势在必行.

《微积分与数学模型》课程改革的宗旨是在不降低原教材中对微积分知识要求的基础上，增添数学模型教学的内容和数学建模的实践环节，“启发应用意识、提高应用能力”，促进学生知识、能力和素质的溶合. 为此，我们对原教材中相应内容进行了增补和整理，改变原教材中只注重数学知识体系的脉络，而许多数学应用内容则显得支离破碎、难以总结规律或分量不足的缺点，强调了微积分本身的数学模型特征，并突出了微积分中数学模型的应用规律. 另外，针对原教材中对改革要求的不适应，还作了以下三方面的改进：

1. 注重“说理”，即加强对数学原理的直观阐述.

原教材有重推理、不重说理的倾向，这对培养学生的数学思维能力和数学应用能力都是不利的. 本书编写中注重了对这些问题的改进，强调了对知识背景及数学思维原理的介绍.

2. 强调近似公式及近似计算.

微积分的巨大威力很大程度上要借重于它给出的各种近似公式及近似算法. 所以本书在编写中特别注意了对这类内容的强调和重视，这

一点尤其在计算机使用日益广泛深入的情况下对提高学生数学应用能力很有利，也可以改变学生“解数学题就是求解析解或精确解”的片面观点.

3. 适当添加微积分的经济应用内容.

除了专用于经济类教材之外，原教材中均不包括经济应用方面的内容. 事实上，微积分在经济中的应用已越来越重要，添加经济应用内容不但对拓宽学生的应用基础是必要的，而且有利于加深学生对微积分本身意义的理解.

本教材可以有两种用法. 当要求强调数学建模教学时，除了加强数学模型的教学外，每学期可增添两次数学建模作业，要求学生完成两篇数学建模论文，并以适当比例计入考试成绩，这是我们教学改革中的做法. 当不要求强调数学建模教学时，这部分教学内容及实践环节可适当压缩[1,2].

本书用于专科教学时，可删去十二章全部及十一章部分内容.

本书编写分工情况如下：贾晓峰任主编，提出编写思路，与全体编者商定后拟订编写方案，并对全书进行统稿，具体编写部分为：第一章、第四章（不包括第三节、第四节）、第六章、第九章第八节、第十章第二节、第八节，并与范庆民合写附录中的科学论文初步知识；张明学编写第二章、第三章、第八章；石冰编写第七章、第十章第一节、第三节至第七节，并担任上册副主编；杨晋编写第五章、第九章前六节及附录中的积分表，并担任本书下册副主编；王玉民编写第十一章、第十二章及附录中的常用平面曲线及其方程；范庆民编写第四章第三节、第四节、第九章第七节、第九节及附录中的参考书目等.

本书也是我们参与原国家教委“面向21世纪高等工程教育教学内容和课程体系改革计划”中由我校矿业工程学院承担课题的改革教材.

特别感谢山西省教委领导的远见卓识，以及对改革和教材出版的鼎力支持，使本书得以与读者见面. 本书在编写过程中还受到高等学校工科数学课程教学指导委员会副主任汪国强教授的指导和支持，受到复旦大学谭永基教授、清华大学姜启源教授、北京航空航天大学李心灿

教授等的支持,我校邱宜坪、白其峥二位教授一直关心并支持该项改革和教材编写,编者对他们致以衷心的感谢.

[1] 贾晓峰,张明学,一般工程高校高等数学的教学现状与改革模式探讨,数学的实践与认识,1997,Vol. 27 增刊 140～146.

[2] 贾晓峰,工程高校《微积分与数学建模》改革思路与实践,工科数学,Vol. 14. No3,70～72.

《微积分与数学模型》教材编写组

1999 年 6 月

# 目　　录

# 第一章　函数·初等模型

## 第一节　常量与变量·函数关系

### 一、常量与变量

客观世界是发展、变化的．事物发展变化有两种状态，相对静止的状态与显著变化的状态．这两种状态表现在数量上就有常量与变量之分．具体讲，在我们考虑的范围和尺度上，保持一定数值不变的量称为**常量**，可以取不同值而变化的量叫**变量**．

例如，物理学中规定的“常数”和“单位”都是常量，数学中的圆周率 $\pi$ 也是常量，这些常量一般认为不随着时间和位置的变化而变化，所以被用作尺度或标准来度量或表示其它数量．还有的量只在我们考虑的一定范围内静止不变，例如两站之间铁路列车上的载客数量及行李总重量、重力加速度 $g$ 等，这些都可以称为常量．但丰富多采的客观世界和工程技术问题中，涉及到的许多量都是不断变化的．例如：行驶的列车到前后两站的距离、列车的速度以及车上燃油存量都在不断改变．地球上同一地区的气温也在不断改变，股票交易所里的股票指数也永远是动荡不定的．这些我们都可以称为变量．

一般来说，常量和变量这两种概念是相对的．例如重力加速度 $g$，在较粗略的情形下，我们可认为地球表面物体的重力加速度是恒定不变的，但精确的测量表明，地表各地的重力加速度并不相等．又譬如在通常情况下，我们认为一个物品的尺度（如长度、面积、体积）和重量是不变的，但在很精确的测量中，这些量又随着环境、测量精度而改变．这些都说明常量与变量的概念是相对的．同一数量在不同问题中，既可能被当作常量对待，又可能被当作变量来对待，要看问题的具体情形而定．

在本书中，我们常用 $a$、$b$、$c$ 等字母表示常量，而用 $x$、$y$、$z$ 等字母表示变量．

## 二、几个实例

在客观世界中，变量的变化都不是独立的，而是遵循一定规律相互关联的. 不同变量间常常具有某种相关的数量关系. 把这些数量关系用图形、表格或数学式子来表示，就为我们更好地把握和深入研究它们提供了方便. 为了说明这种关系，我们看几个实例：

**例 1** 在电子技术中，常会遇到各种波形. 如图 1.1 是“锯齿波”中的一个波形，横坐标表示时间 $t$，纵坐标表示电压 $u$. 从图上知道，电压 $u$ 随时间 $t$ 的变化而变化，在区间 $0 \leqslant t \leqslant 30$ 中，每确定一个 $t$ 值，都有一个确定的 $u$ 值与它对应. $u$ 和 $t$ 的关系也可以用数学表达式表示：

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{10}t, & 0 \leqslant t < 10 \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{20}t, & 10 \leqslant t \leqslant 30 \end{cases}$$

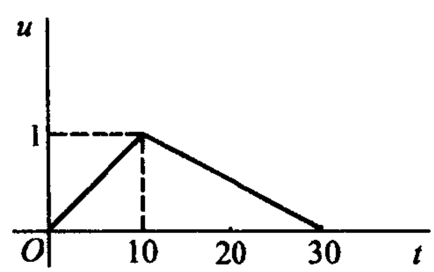


图 1.1

象例 1 这样在不同区间上有不同表达式的变量关系在工程科技及经济学中很常见.

**例 2** 由实验测出某地区大气中空气密度 $\rho$ 随着海拔高度 $h$ 的变化情况如下表：

| $h$ /m | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 2000 | 3000 | 4000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$/(kg/m$^3$) | 1.22 | 1.17 | 1.11 | 1.06 | 1.01 | 0.91 | 0.82 |

上表反映了 $\rho$ 与 $h$ 的依赖关系. 根据这个表，当 $h$ 取表中某一值时，对应的 $\rho$ 值也随之确定. 反之，当 $\rho$ 取表中某值时，对应的 $h$ 值也随之确定. 有一种在飞机上使用的高度计就是依照这一原理设计的.

**例 3** 下图是美国道·琼斯工业指数从 1976 年 12 月到 1977 年 3 月的变化情形. 由此图可以看出在这段时间中,股票指数随时间的变化.

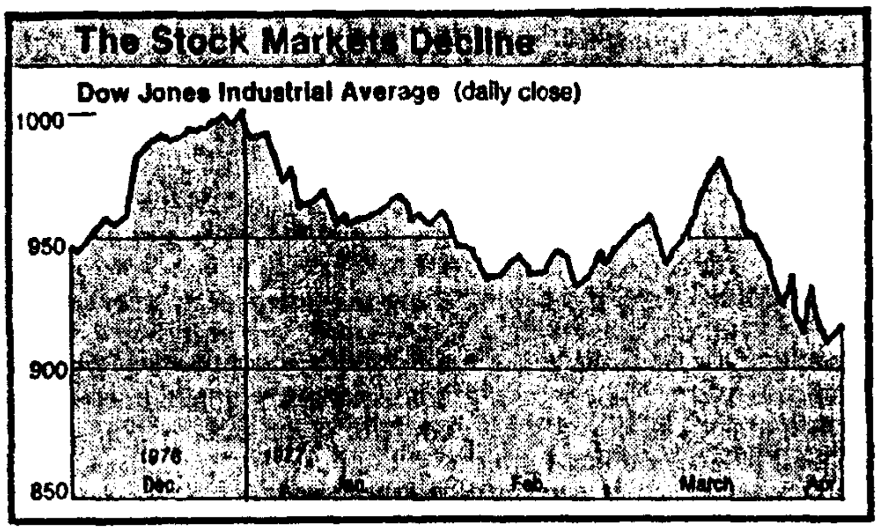


图 1.2

**例 4** 某企业的成本可分为两部分:一是不受业务量影响的部分(如设备折旧费等),称为**固定成本**;随业务量成正比例增长的另一部分称为**变动成本**. 该企业年固定成本总额为 1500 千元,产品单价为 10 千元,单位变动成本 6 千元,若产品可以全部售出,且税率依 10%计算,试求企业保本经营的最低产销量(或称**盈亏临界点**).

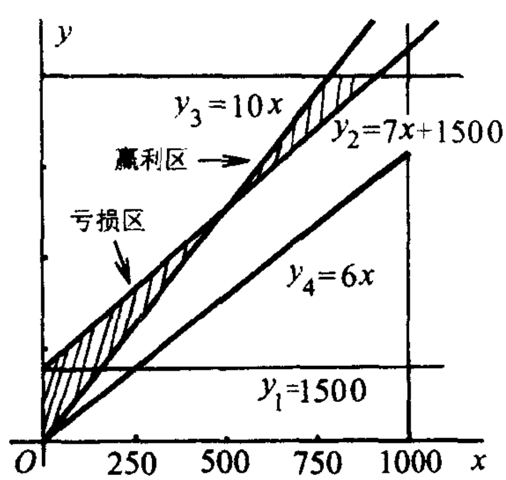


图 1.3

图 1.3 的横轴表示产品销售量,纵轴表示所发生费用. 设产量为 $x$,由图容易看出 $y_1=1500$ 为固定成本,企业总支出为

$$\begin{aligned} y_2 &= \text{固定成本} + \text{变动成本} + \text{税费} \\ &= 1500 + 6x + 10x \cdot 10\% \\ &= 7x + 1500 \end{aligned}$$

销售总收入为 $y_3=10x$,总支出线与总收入线在 $x=500$ 处相交,所以

$x < 500$ 为亏损区，$x > 500$ 为赢利区，$x = 500$ 为盈亏临界点.

该问题用盈亏临界图分析有利于直观地看出产品成本，利润依赖于产销量的各种变化情形，所以在企业经济活动分析中有着广泛的应用.

## 三、函数的定义

以上各例中，撇开各个数量的实际意义，可以发现这些问题最基本的共同点是：问题涉及两个变量，两变量间有一个确定的依赖关系（即对应规则），虽然对应规则的表达方式不同（可以采用解析表达式、表格、图象等），但是，当其中一个变量在某一范围内取值时，另一变量按照对应规则就有确定的值与之对应. 两个变量的这种对应关系实质上就是函数关系. 下面给出函数的定义：

**1.1 定义　设有两个变量 $x$ 和 $y$，$D$ 是一个给定的数集，$x \in D$. 若对 $D$ 中的每一个确定值 $x$，变量 $y$ 按照一定的法则总有确定的值与之对应，则称 $y$ 为 $x$ 的函数.**

上述定义中数集 $D$ 叫做这个函数的**定义域**，$x$ 叫做**自变量**，$y$ 叫做**因变量**或**函数**.

关于函数，还有下列几点值得注意：

1. 由函数的定义，可以看出构成函数的基本要素有两个：一是**对应法则**或称**对应规律**，二是**定义域**.

若两个函数的对应法则和定义域都相同，则两函数恒等，否则不能认为它们是相同的函数.

2. **函数的定义域：通常在用解析式表示一个函数时，是使该式有意义的自变量取值范围**. 这是函数定义域的数学意义. 但对有实际意义的问题，定义域的确定不仅要保证解析表达式在数学上有意义，还要依照问题的实际意义进一步加以限制. 比如例 4 中涉及的几个函数，当其自变量表示某产品的产量时，就只能取不小于 0 的整数.

3. 函数的对应法则，可以由表格、图象、解析式来表示. 在工程技术、经济活动中大量出现以表格形式表示的函数关系. 以图象表示的函数关系由于最直观也常常被使用. 但由于解析表达式含义准确，且便于使用数学手段进行处理，对进行深入研究具有特别重要的意义，所以我

们一般提到函数时,总假定它有一个解析表达式,可记为 $y=f(x)$ 等,其中字母"$f$"就表示了一个对应法则.我们同时提到不止一个函数时,又可以用 $y=\varphi(x)$,$y=f(x)$ 等加以区别.

4. 在函数定义域中,只说 $y$ 总有确定的值与 $x$ 对应,通常情形下,我们理解为 $y$ 有唯一确定的值与 $x$ 对应,这样的函数我们称为**单值的**.若对自变量 $x$ 的同一取值,函数 $y$ 有不止一个值与之对应,我们称这样的函数为**多值的**.例如,函数 $y=x^2$,$y=a^x$ 等都是单值函数,而圆 $x^2+y^2=r^2$ 上点的纵坐标 $y$ 常与横坐标 $x$ 形成双值对应,因为从圆方程中解出 $y$,可得

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2},\ -r\leqslant x\leqslant r$$

对有限多值的函数,我们可以将其分为不同的**单值分支**进行研究,这样就能保持单值性.

5. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$,则对一个具体的确定值 $x=a\in D$,我们一般说 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处是**有定义**的.此时,**记号 $y=f(a)$ 就表示当 $x=a$ 时对应的函数值**,也可以记为 $y|_{x=a}=f(a)$.函数值的全体叫做函数的**值域**.

6. 在定义域的不同区间上有不同表达式的函数(如例 1 中的函数),叫做**分段函数**.例如

$$y=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0\\ x^2+1, & x<0\end{cases}$$

分段函数有极其广泛的应用.

## 习　题　1.1

1. 求下列函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的定义域.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$, $g(x)=x\sqrt{x-1}$;

(3) $f(x)=\lg x^{\frac{2}{3}}$, $g(x)=\frac{2}{3}\lg x$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\arcsin\frac{x-3}{4}$;  (2) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{3}}$.

4. 已知 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，求 $f(\lg x)$、$f(\sin x)$ 的定义域.

5. 下面的函数称为**符号函数**，画出其图形.

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

6. 以$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数，此函数称为**取整函数**. 画出取整函数的图形.

7. 设 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.

8. 设 $f(x)=\sqrt{2+x^2}$，求下列函数值：

$$f(0),f(-2),f(\frac{1}{a}),f(x_0),f(x_0+h)$$

9. 某公司生产一批产品. 单位变动成本为 12 元，固定成本为 90000 元，产品出售单价为 18 元.

(1) 将总成本 $C$ 表示为产量 $x$ 的函数；

(2) 将总收入 $R$ 表示为产量 $x$ 的函数；

(3) 将总利润 $P$ 表示为产量 $x$ 的函数；

(4) 求该企业保本经营的最低产量.

## 第二节 函数的几种特性

有的函数具有某些特殊性质，掌握这些性质对研究函数很有帮助. 现分别介绍如下：

## 一、函数的奇偶性

若函数 $y = f(x)$ 当自变量 $x$ 只改变符号时，函数值也只改变符号，即 $f(-x) = -f(x)$，则称此函数为**奇函数**. 若函数 $y = f(x)$ 当自变量 $x$ 只改变符号时，函数值不变，即 $f(-x) = f(x)$，则称此函数为**偶函数**. 例如：$y = x, y = x^3, y = \sin x$ 等都是奇函数，而 $y = x^2$，$y = x^4, y = \cos x$ 等都是偶函数. 而函数

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$$

既不是奇函数又不是偶函数. 易见奇函数或偶函数的定义域 $D$ 必关于原点对称.

从几何上看(图 1.4)，奇函数的图形必对称于原点，偶函数的图形必对称于 $y$ 轴(为什么?).

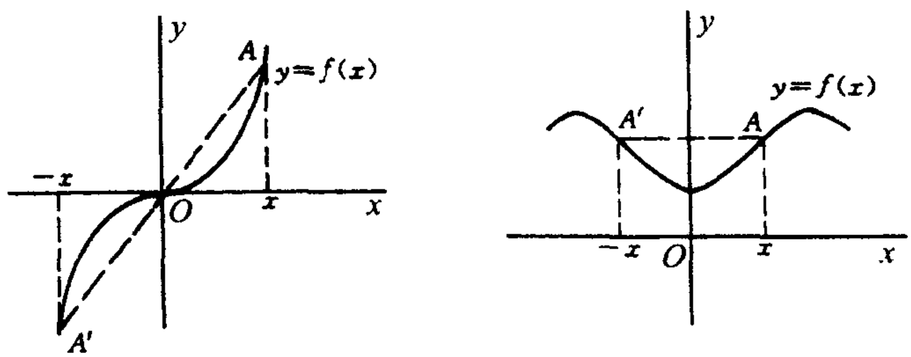


图 1.4

## 二、函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D$，对于数集 $X \subset D$，若存在确定的实数 $M > 0$，使任一 $x \in X$ 所对应的函数值都满足 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上**有界**. 若这样的 $M$ 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上**无界**.

例如，函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为对任何实数 $x$，$|\sin x| \leqslant 1$ 总成立，这时任何实数 $M \geqslant 1$ 都可以作为该函数的"界". 而函数 $y = \tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的，因为找不到这样的