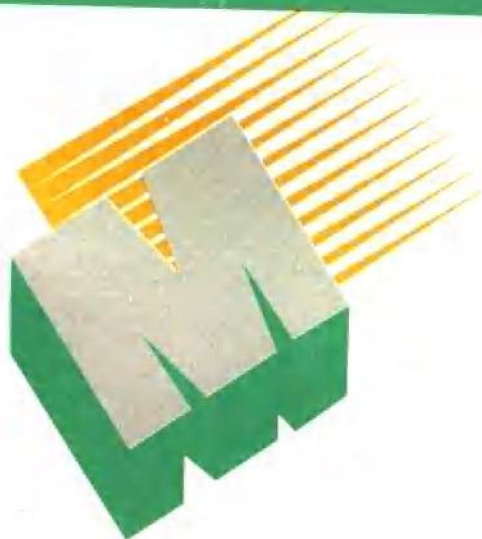


现代数学 引论

杜 珣 编著



北京大学出版社

现代数学引论

杜 珣 编著

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代数学引论/杜 珣 编著. —北京:北京大学出版社,
1995. 12

ISBN 7-301-02967-5/O · 0367

I. 现… II. 杜… III. 数学-普及读物 IV. 01

书 名: 现代数学引论

著作责任者: 杜 珣 编著

责任编辑: 孙 晔

标准书号: ISBN 7-301-02967-5/O · 0367

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

电 话: 出版部 62752015 发行部 62559712 编辑部 62752032

排 印 者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

850×1168 毫米 32 开本 12.75 印张 306 千字

1996 年 9 月第一版 1996 年 9 月第一次印刷

定 价: 15.00 元

内 容 提 要

本书是为了向大学生和科技人员普及现代数学教育而编写的现代数学入门教程. 书中比较全面系统地讲述了现代数学的特点、意义、基本概念、结构体系、基本理论以及像线性算子、泛函、广义函数、张量、流形、微分形式等有广泛应用价值的现代数学工具.

本书特点是用集合和映射的统一观点, 按照各自的结构体系, 把内容组织起来, 论述严谨, 证明完备、起点低, 适于初学, 学员只要有高等数学课的基础就能学习.

本书适用于二、三、四年级大学生、研究生和广大科技人员. 本书是“现代数学”课的教材, 也可作为基础扎实的“泛函分析”课教材.

序

本书是为了在科技界和理、工科非数学专业的大学生中普及现代数学教育而编写的一本现代数学入门教材. 在国内外所有的各种数学教材中目前还找不到这样一本符合上述目标的书来. 事实上如今各门科学技术都发展得很快, 知识积累日益增多, 当前理、工科大学生面临的情况就是要学的东西多, 能花的学时不足, 即使大家都认识到现代数学的重要性, 而实际上能为它提供的学时是很少的. 要在非数学专业的大学生中普及现代数学教育, 这是一项十分艰巨的任务. 面对这样一个艰巨目标, 写出一本现代数学入门教材本身就是一项了不起的探索性的研究工作.

本书编者多年来了解到, 我国大学理、工科各专业除数学而外, 所开设的数学课程基本上没有涉及现代数学的内容, 从而远远不能适应现代科学、技术发展的需要. 许多具有大学毕业文化水平的科学、技术人员在阅读本行专业的现代文献时所遭遇到的困难, 往往首先在于不理解文献中所运用的现代数学工具, 这样使得科技人员对于本行专业的现代发展都失去了共同的语言. 由此可见数学教育的落后已直接影响到我国现代文化水平的人才培养和科学技术的发展. 本书编者充分认识到在我国理、工科大学生和科技界普及现代数学教育是刻不容缓的事. 同时他也意识到要在这方面作出一些贡献, 不仅要有锲而不舍的探索精神, 还必须有充分的教学实践经验. 为此他身体力行, 主动长年固定在数学课程的教学工作岗位上. 多年来他为北大理科、清华理工科的三、四年级大学生开设现代数学引论选修课, 又为北大力学系研究生开设泛函分析公共必修课. 他认真编写了这两门课程的讲义, 并在教学实践中逐年加以修订, 不断提高教学质量. 在精心修订

这两本讲义的基础上,他又反复探讨了现代数学的特点和意义,深入了解广大理、工科大学生和科技人员对于现代数学的需求,总结了多年来的教学实践经验,终于编写出了这本独具特色的现代数学入门教材.

本书有明确的目标.它当然不是一本泛泛介绍些现代数学知识的普通读物,作为一本现代数学的入门教材,应当使读者通过它能够掌握现代数学中最基本的东西和最有应用的东西.要做到这一点必须对现代数学的特点和意义有深刻的理解,同时还必须对读者对象的需求有充分的了解,这样才能做到取材适当.由于本书是为普及现代数学教育服务的,它的起点不能脱离实际情况,它的篇幅不能太长,同时又要求读者能够真正学到手.要妥善处理好这些问题,确实需要经过认真地探索和研究.现在就本书内容的选取、安排和阐述三个方面来分析,我们可以看出它具有如下的特色:

1. 本书在内容的选取上能贯彻少而精的原则.选取的重点放在现代数学的基本概念、基本结构和基本理论上以及若干具有广泛应用的现代数学工具上面.

2. 本书在内容安排上能注意科学系统性.用集合和映射的统一观点,按照各自的结构系统,把全书内容科学地组织在一起.

3. 本书在内容阐述上能做到起点低、推理严密、论证完备.这里所谓起点低即对学员只要求具有大学低年级高等数学课程的基础.

正由于本书具有以上三方面的特色,它才能符合向广大理、工科大学生和科技人员普及现代数学教育的宗旨.作为现代数学入门教材,可以认为本书是第一次成功的尝试.正如序言首段中谈到的,这是一项了不起的探索性的研究工作,它在今后更广泛的教学实践中还要继续前进.普及现代数学教育的工作还只是刚刚起步,任重而道远,甚至是没有止境的.我乐于为本书作序,一方面是编者为普及现代数学教育而长期坚持不懈的探索精神使我十分感

动,希望读者能够理解本书的完成是凝聚了编者无数的心血;另一方面本书的完成还只是普及现代数学教育的起步,它本身也有待改进,希望有志之士能以此为起点共同来推进这项艰巨的任务.

程民德

1993年3月于北京大学

我们需要多一些好的教科书

数学是自然科学的一个重要的工具,也是一种思想方法.因之在大学教育中,数学是许多专业的一门基础课.虽然数学的内容对不同的专业有所不同,但大体上在本世纪五十年代前已基本定形,早已有了在当时合用的教材,一直沿袭下来.

科学是不断发展的,数学也是不断发展的.特别是近三四十年来,数学有了巨大的进展,数学的应用也发生了很大的变化.纯粹数学中一些抽象理论在某些自然科学中得到了有效的应用,这就使不少科学用到的数学与传统的数学分支不同,也就造成科学家们的困难.针对这样出现的情况,改造大学中数学课程的安排就成为大家要解决的问题.困难在于不能把要用到的数学每门都系统地讲,实际上也不需要这样做.教学计划中只允许讲一些基本的东西.如何把要用到的基本概念与基本理论组织起来,给学生一个清楚的理解,打个基础,也为以后进一步学习作准备,这是我们要解决的问题.

杜珣同志为了解决上述问题,1988 年在北京大学开设了“现代数学引论”并写了讲义.他讲了多次,讲义也不断修改,效果是好的.应该说,他进行了一个成功的尝试.现在他打算在讲义的基础上,写成书出版.这样可以有更大的影响,对更多的学生有帮助,也对更多的学校的课程改革提供经验,这是有意义的.杜珣同志在“现代数学引论”中扼要地、清楚地介绍了集合、代数结构、拓扑结构、测度、拓扑线性空间、Hilbert 空间、Banach 空间、流形上的微积分.这些基本概念都是现代数学中重要的概念,也是进一步学习现代数学必不可少的基础.在目前已有的教科书中还缺乏这样一本书,在这个意义上,她填补了一个空白.

我一直认为,要写好一本教科书绝对不能离开教学实践.杜珣同志写这本书不仅从他的教学与科学研究的经验出发,也不仅根据他对现代数学的总体的理解,还认真进行了教学实践,不断总结才写成这本书的.因之,“现代数学引论”是一本较好的教材.

人类的知识是积累的.一本好的教材不只对人才的培养有作用,对科学的发展也有重要的意义.我们期待着出现更多好的教材.

丁石孙

1993年2月28日于中关村

前 言

19 世纪末以来,数学发展进入了现代数学的新阶段.现代数学与经典数学相比,从研究内容到研究方法都有着新的特点,并有更加广泛的应用,现已渗透到自然科学各个领域乃至社会科学各领域.有的科学家明确指出:现代科学技术的巨大发展主要是由于数学的现代发展.然而我国目前大学里理工科数学教育,基本上还是五十年代初学习苏联的版本,内容都属于经典数学范围.而苏联却早已对教材进行了现代化改革.数学教育的落后,直接影响到现代水平的人才培养和科学技术的发展.应该用战略眼光来看待普及现代数学教育的重大意义.有鉴于这方面的切身感受,我不顾自己才力微弱,要竭尽全力为我国普及现代数学教育事业作先行走卒,贡献余生.从 1986 年初,我就筹划着开创一个“现代数学引论”的新课程.1988 年起,每年在北京大学开设“现代数学引论”这一公共选修课,并在清华大学应用数学系等单位讲过此课程.此外每年我都为北京大学力学系研究生开设“泛函分析”课程.两门课程都写有讲义.在讲义的多年使用和修改的基础上,编写了本书.其目的是抛砖引玉,希望有更多的专家和同行们,共同努力,推动我国普及现代数学教育的事业.

本书是面向广大理工科大学生和科技人员的.它不是泛泛地介绍一些现代数学知识,而是既比较全面系统、又扎实认真的现代数学入门教程.由于泛函分析是现代数学的一个中心领域,国内许多理工科大学对研究生都开设了泛函分析课,本书也可作为基础扎实的泛函分析入门教材.

本书有以下特点:

一、内容的选取上,注意少而精.重点是介绍现代数学的基本

概念、基本结构和基本理论;也注意介绍像线性算子、泛函、广义函数、张量空间、流形、微分形式等这样一些有着广泛应用的现代数学工具.

二、内容的安排上,注意科学系统性.用集合和映射的统一观点,按照各自的结构系统,由简单到复合、由一般到特殊地把全书内容组织起来.

三、内容的讲解上,起点低、但推理严谨、证明完备.起点低,读者只要有大学低年级高等数学课基础就行,这符合本书向大学生和科技界普及现代数学教育的宗旨;推理严谨、证明完备,这是为了使读者能真正把内容学到手;尽管起点低,本书还是想尽办法,对每个难度大的定理都给出了完整的证明.因此,本书自成封闭体系,适于初学.

本书在绪论中对什么是现代数学以及它的特点和意义作了介绍.这原来是孙小礼教授和我合写的一篇文章,即《现代数学的特点和意义》(发表在《工科数学》杂志,1992年第2期),我略作删改后作为本书的绪论.为此向孙小礼教授深表感谢.除绪论外,本书共有八章,简介如下:

第一章讲集合和映射.这是现代数学中一切领域的基础.在此章还讲了序结构和实数集,对实数集的完备性作了简单和严格的证明.

第二章讲代数结构.给出了各种常见的代数系统的定义,并着重讨论了和本书后几章内容密切联系的线性空间和张量空间.

第三章讲拓扑结构.既介绍了拓扑空间的一般概念和理论,也详细介绍了距离空间这一重要的特殊情形的理论.

第四章讲测度结构.它不仅一般地介绍了测度空间的有关概念,并讲述了有重要意义的勒贝格积分的理论.

第五章讲拓扑线性空间.这是代数结构和拓扑结构的复合,先由一般到特殊地介绍了各种拓扑线性空间,然后结合应用,介绍了映射微商、张量、广义函数等重要的现代数学工具.

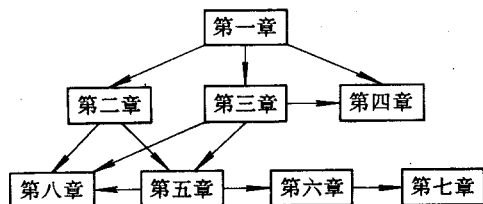
第六章讲 Banach 空间及其上的线性算子理论.

第七章讲 Hilbert 空间及其上的线性算子理论.

六、七两章内容是线性泛函分析方面最基本、最成熟的理论. 这两章和第三章的距离空间理论及第五章的 § 4, § 5, § 6 三节就构成了“泛函分析”课程的主体内容.

第八章讲流形上的微积分. 介绍了微分流形、微分形式、外微分这样一些现代数学中最基本和重要的概念和工具. 最后以优美的广义 Stokes 公式结束本书.

各章之间的前后联系有如下图的箭头所示:



根据我的教学实践,本书的第一、二、三、四、五和第八章(略去第三章中的距离空间完备化定理、Baire 纲定理和第三章 § 9)构成“现代数学引论”课的内容. 本书的第一、二、三、五、六、七章(略去第二章 § 6 和第三章的滤基收敛)构成“泛函分析”课的内容,这两个课程都是一个学期,每周四学时的课.

感谢教过我的老师——程民德教授和丁石孙教授为本书写序. 感谢孙小礼、陈耀松、黄敦、萧树铁、林建祥、马知恩、卢树铭、吴鸿庆、武际可诸教授和孙铭、唐世敏、柴乃埏、盛立刚以及北京大学的许多同志对本书出版的关心和尽力. 为了他们对普及现代数学教育事业的热心支持,我在这里致以最衷心的感谢和敬意.

杜 珣

1993 年 2 月于北京大学

目 录

绪论——现代数学的特点和意义	(1)
一、现代数学是数学发展的新阶段	(1)
二、现代数学的特点	(2)
三、普及现代数学教育的意义	(12)
第一章 集合与映射	(15)
§1 逻辑命题及其相反命题的表述	(15)
§2 集合及其运算	(17)
§3 二元关系	(21)
§4 映射	(23)
§5 序结构	(26)
§6 实数集	(30)
§7 集合的势	(34)
§8 数学系统和其同构	(42)
习题一	(43)
第二章 代数系统	(46)
§1 代数运算及一些常见的运算律	(46)
§2 一些常见的代数系统	(48)
§3 线性空间	(56)
§4 线性算子与线性泛函	(61)
§5 张量空间	(67)
§6 外积和外代数	(71)
习题二	(80)
第三章 拓扑空间和距离空间	(84)
§1 拓扑空间	(84)
§2 距离空间	(88)
§3 拓扑空间中的各种点集	(93)

§ 4	拓扑空间中的收敛	(101)
§ 5	连续映射和同胚映射	(107)
§ 6	拓扑空间中的连通性	(110)
§ 7	完备距离空间	(114)
§ 8	紧集和列紧集	(124)
§ 9	距离空间上的函数族	(132)
习题三		(138)
第四章	测度与积分	(141)
§ 1	可测空间与测度空间	(141)
§ 2	外测度及由它导出的测度	(145)
§ 3	$\mathbf{R}^n$ 上的勒贝格测度	(149)
§ 4	可测函数	(153)
§ 5	可测函数的积分	(159)
§ 6	$\mathbf{R}$ 上的黎曼积分和勒贝格积分	(169)
§ 7	L 空间和 L^2 空间	(173)
习题四		(179)
第五章	拓扑线性空间	(181)
§ 1	基本数学结构的复合	(181)
§ 2	拓扑线性空间	(182)
§ 3	距离线性空间	(184)
§ 4	赋范空间	(186)
§ 5	内积空间	(193)
§ 6	赋范空间中的有界线性算子	(200)
§ 7	赋范空间的微分学	(206)
§ 8	广义函数	(225)
§ 9	欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的张量	(234)
习题五		(240)
第六章	Banach 空间及其上的算子	(244)
§ 1	有限维赋范空间	(244)
§ 2	开映照定理和闭图定理	(248)
§ 3	有界线性泛函的延拓定理	(253)

§ 4 有界线性算子序列	(258)
§ 5 赋范空间中的伴随算子	(263)
§ 6 有界线性算子的正则点和谱点	(266)
§ 7 全连续线性算子	(270)
§ 8 全连续线性算子方程	(277)
习题六	(288)
第七章 Hilbert 空间及其上的算子	(291)
§ 1 正交集和广义富氏级数	(291)
§ 2 Hilbert 空间的正交分解和正交归一基	(296)
§ 3 Hilbert 空间的对偶空间和伴随算子	(303)
§ 4 Hilbert 空间的自伴线性算子	(308)
§ 5 全连续自伴线性算子方程	(314)
§ 6 对线性积分方程的应用	(320)
习题七	(324)
第八章 流形上的微积分	(327)
§ 1 流形	(327)
§ 2 微分流形	(333)
§ 3 流形在欧氏空间中的嵌入	(336)
§ 4 流形上的切空间、余切空间	(340)
§ 5 流形上的微分形式	(346)
§ 6 微分形式的外微分	(353)
§ 7 微分流形的定向	(362)
§ 8 流形上微分形式的积分	(367)
§ 9 广义 Stokes 公式	(375)
习题八	(384)
参考书目	(388)

绪论——现代数学的特点和意义

一、现代数学是数学发展的新阶段

纵观数学的历史发展,可以清楚地划分为初等数学、高等数学和现代数学三个阶段.从古代到 17 世纪初为初等数学阶段;从 17 世纪初到 19 世纪末为高等数学阶段;从 19 世纪末开始,数学进入了现代数学阶段.

按照传统的、经典的说法,数学是研究“现实世界的数量关系和空间形式”的科学,或者简略地说,是研究数和形的科学.然而作为数学对象的数和形,在三个阶段里是很不相同的.在初等数学阶段,“数”是常量,“形”是孤立的、简单的几何形体.初等数学分别研究常量间的代数运算和几何形体内部以及相互间的对应关系,形成了代数和几何两大领域.

高等数学阶段以笛卡儿(R. Descartes)建立解析几何(1637)为起点,17 世纪 80 年代微积分的建立是这一阶段的最显赫的成就和标志.在高等数学阶段,数是变量,形是曲线和曲面,高等数学研究它们之间各种函数和变换关系.这时数和形紧密联系起来,但大体上还是各成系统的.由于发轫于微积分的分析数学的兴起和发展,数学形成为代数、几何和分析三大领域.

现代数学阶段以康托尔(G. Cantor)建立集合论(1874)为起点.正如数学家陈省身所说:“康托尔的集合论,独创新意,高瞻远瞩,为数学立了基础.”20 世纪以后,用公理化体系和结构观点来统观数学,成为现代数学阶段的明显标志,现代数学阶段的研究对象是一般的集合、各种空间和流形.它们都能用集合和映射的概念统一起来,已很难区分哪些属于数的范畴,哪些属于形的范畴了.

二、现代数学的特点

现代数学作为数学发展的新阶段,它必然在数学的固有特点(抽象性、精确可靠性、广泛应用性等)方面有所发展,这些特点相互间又是彼此联系的.

1. 高度的抽象和统一

抽象性是数学这门科学的一个最基本、最显著的特点.而现代数学更加充分、更加积极主动地发挥着这一特点.现代数学的研究对象、研究内容和研究方法,都呈现出高度的抽象和统一.

所谓抽象和统一,就是把不同对象中共同的、本质的东西抽象出来,作为高一层次的对象加以研究,从而把原来许多不同的对象统一起来,求得共同的本质的规律.一个最简单的例子就是各种算术应用问题可用代数统一起来,掌握算术的最好办法就是学会代数.

抽象和统一是一个完整概念的两个方面.为了统一必须抽象,有了抽象就能统一,并且还扩大了范围.集合概念是对数学所研究的各种对象的抽象概括.把一般的集合作为现代数学的研究对象,这就能把数学的各不同领域统一起来,并极大地扩大了数学的范围.例如流形是三维空间中曲线、曲面和区域的抽象概括,流形不仅把它们统一起来,并且推广到高维空间中.

在以前的数学发展中,抽象化的进度是比较缓慢的.只是在它对原来层次的研究已充分详尽地展开,客观上实有必要时才进入更高层次的研究.现代数学的发展状况则完全不同,抽象化的进度大大加快了.正如数学家 L. Loomis 所说:“现代数学的特点之一,就是当一种新的数学对象刚刚定义和讨论不多时,就立即考查全体这样对象的集合.”向高一层次作抽象正是研究原来层次对象的一个重要方法.

我们说,现代数学是高度的抽象和统一,这“高度”二字的含义是指它不断地和积极主动地向更高层次作抽象.数学家们自觉地、运用自如地发挥着抽象化的特点和威力.