经济应用数学

王力加　张　硕　主编

地　质　出　版　社

经济应用数学

主　编　王力加　张　硕
副主编　米据生　韩树新　程海奎　郑淑智
编　委　（以姓氏笔划为序）
于莲花　马凤皎　王玉苏　石俊娟
刘永炎　安广毅　张春花　李东泉

地质出版社
·北　京·

内 容 提 要

经济应用数学是解决经济工作中所遇实际问题的一门数学学科。本书是作者根据多年实践经验编写而成的，其实用性较强。它包括微积分、概率论、线性代数和线性规划四大部分。既可作为经济类、商业类大中专经济数学课程的教材，也可作为夜大、职大的教材。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/王力加，张硕主编.-北京:地质出版社，1997.1
ISBN 7-116-01404-7

Ⅰ.经… Ⅱ.①王… ②张… Ⅲ.经济数学 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第00273号

地质出版社出版发行
(100083 北京海淀区学院路29号)
责任编辑:赵 薇
*
北京兴谷印刷厂印刷 新华书店总店科技发行所经销
开本:787×1092 1/32 印张:12.75 字数:284000
1997年1月北京第一版·1997年1月北京第一次印刷
印数:1—6000册 定价:14.80元
ISBN 7-116-01404-7
G·115

前　言

随着我国社会主义市场经济的发展，经济应用数学有了广泛的应用。为此，我们联合编写了《经济应用数学》教材。本书可作为经济类、商业类大中专经济应用数学课程的教材，亦可作为夜大、职大教材。

本书介绍了经济工作中常用的数学基础知识，列举了数学方法在经济工作中应用的大量例子，内容包括微积分、概率论、线性代数和线性规划四大部分。在编写过程中，力求适应当前市场经济的要求和加强基础知识的需要，较为通俗地叙述了有关数学理论和方法。为了巩固书中所学知识，各章均配有适量习题，并附有答案。

本书由王力加、张硕提出写作大纲并担任主编工作。全体编写人员是分别来自河北师范学院的张硕、米据生、程海奎同志；河北物资学校的王力加、韩树新、马凤皎、王玉苏、杜增林同志；衡水体校的张春花同志；张家口市财经学校的刘永炎同志；石家庄市第六中学的石俊娟同志；石家庄市城乡建设学校的赵云霞同志；衡水农机化学校的郑淑智、安广毅、于莲花同志；邢钢子弟中学的李东泉同志；邢台市农业学校的庞延兴同志；邢台经贸职工中专学校的崔凤巧同志。

由于作者水平有限，书中难免有一些不妥之处，敬请各位专家和读者给予指正，以便及时修改。

目　录

第一章　函　　数

函数是微积分学研究的对象．在中学我们已经学习过函数概念，但由于它的重要性，我们要对函数的内容作较系统的复习与进一步地提高．

§1.1　函数的概念

一、函数的定义

定义 1.1　设 x 与 y 是两个变量，D 是一个给定的数集．如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$．数集 D 称为这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量．

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$．函数值的全体叫做函数的值域．

函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素．由此，我们说两个函数相同，是指它们有相同的定义域和相同的对应法则．

二、函数的表示法

在中学课程里，我们已经知道函数的表示方法主要有三种：即解析法（或称公式法）、列表法和图象法．

此外，有些函数在自变量不同的变化范围内，对应法则要用两个或两个以上不同的式子来表示．这类函数称为分段函

数．

例 1 已知 $f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ \sin x & 0\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$ 求 $f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$，$f(0)$，$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$，指出 $f(x)$的定义域并作出其图形．

解： $f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=-\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$，

$f(0)=\sin 0=0$，

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.

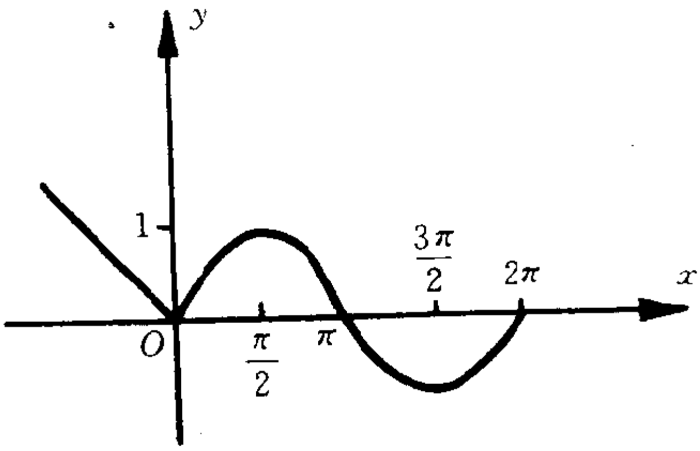

图 1-1

定义域为$(-\infty,2\pi]$

其图形如图 1-1.

例 2 用分段函数表示函数 $y=|x-1|-2$，并作其图形．

解： 当 $x-1<0$ 即 $x<1$ 时，

$|x-1|=-(x-1)=-x+1$，

当 $x-1\geqslant 0$ 即 $x\geqslant 1$ 时，

$|x-1|=x-1$，

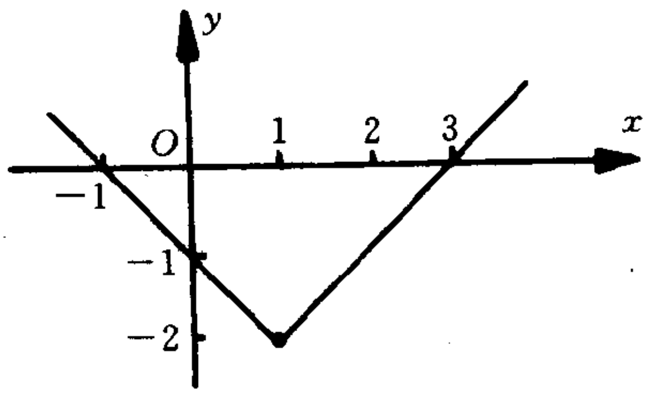

图 1-2

因此 $y=\begin{cases}(-x+1)-2 & x<1,\\ (x-1)-2 & x\geqslant 1,\end{cases}$ 即 $y=\begin{cases}-x-1 & x<1\\ x-3 & x\geqslant 1,\end{cases}$

其图形见图 1-2.

三、函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 内有定义，如果存在正数 $M>0$，对任意 $x\in D$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内有界．如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 内无界．

例如：正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对任何实数 x，$|\sin x|\leqslant 1$.

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内单调增加；如果当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在 (a,b) 内单调减少．

单调增加与单调减少函数统称单调函数．

例如：$f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的．

3. 函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 对于其定义域内的任何 x，都满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数．

如果函数 $y=f(x)$ 对于其定义域内的任何 x，都满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．

奇函数的图形是关于原点对称的；偶函数的图形是关于 y 轴对称的．

例如：$y=\sin x$ 是奇函数，$y=x^2$ 是偶函数，$y=\sin x-\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数．

4. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在非零常数 T，使得对定义域内的任何 x，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数．

通常称最小正数 T 为周期函数的周期.

例如:$y=\sin x$, $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数,$y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sin 2x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

四、反函数

研究两个变量的函数关系时,自变量与因变量的选取是相对的.例如:某商品的价格为 P,当销售量为 Q 时的销售收入为 R. 则 $R=PQ$,这时,称 R 是 Q 的函数,Q 是自变量.

由此,又有 $Q=\dfrac{R}{P}$,这个关系式表明销售量随销售收入而定,则 Q 是 R 的函数.我们把 $Q=\dfrac{R}{P}$ 叫作 $R=PQ$ 的反函数,或称它们互为反函数.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Y,如果对 Y 中的每一个 y,都存在唯一的一个 x 值,使得 $y=f(x)$,则得到一个定义在 Y 上的函数 $x=\varphi(y)$,称之为 $y=f(x)$ 的反函数.常记作 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上,用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,于是 $y=f(x)$ 的反函数通常写成 $y=f^{-1}(x)$.

由定义 1.2 可知:单调函数才有反函数.

可以证明:函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 求函数 $y=3x+2$ 的反函数.

解: 由 $y=3x+2$ 解出 x, $x=\dfrac{y-2}{3}$. 改变变量符号,$y=\dfrac{x-2}{3}$ 即为所求的反函数.$y=\dfrac{x-2}{3}$ 与 $y=3x+2$ 互为反函数.

§1.2 初等函数

一、复合函数

定义 1.3 设 $y=f(u)$是 u 的函数，$u=\varphi(x)$是 x 的函数，且 $\varphi(x)$的值域或其中一部分在 $f(u)$的定义域内，则 y 通过 u 而成为 x 的函数，称为由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数．记作 $y=f(\varphi(x))$．x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量．

例如：$y=e^{\sqrt{x^2+1}}$可看成是由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 三个函数复合而成的．

二、基本初等函数

基本初等函数是指下面六种最常见的函数：

1．常函数 $y=C$ （C 为常数）．

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，图形为平行于 x 轴、过点$(0,C)$的一条直线．

2．幂函数 $y=x^\alpha$ （α 为常数）．

其定义域随 α 而异，但不论 α 为何值，$y=x^\alpha$ 在$(0,+\infty)$内总有定义，图形都经过$(1,1)$点．

3．指数函数 $y=a^x$ （$a>0,a\neq1$）．

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，当 $a>1$ 时单调增加；当 $0<a<1$ 时单调减少．图形都经过$(0,1)$点．

4．对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0,a\neq1$）．

其定义域为$(0,+\infty)$，当 $a>1$ 时单调增加，当 $0<a<1$ 时单调减少．图形都经过$(1,0)$点．

5．三角函数

正弦函数 $y=\sin x$，定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$，奇

函数，以 2π 为周期，有界．

余弦函数 $y=\cos x$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域 $[-1,1]$，偶函数，以 2π 为周期，有界．

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，奇函数，以 π 为周期．

余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，定义域为 $x\neq k\pi$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，奇函数，以 π 为周期．

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

6. 反三角函数

$y=\arcsin x$，定义域 $[-1,1]$，值域 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$，单调增加，有界．

$y=\arccos x$，定义域 $[-1,1]$，值 $[0,\pi]$，单调减少，有界．

$y=\arctan x$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，单调增加，奇函数，有界．

$y=\operatorname{arc\,cot} x$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(0,\pi)$，单调减少，有界．

三、初等函数

定义 1.4 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成，并可用一个式子表示的函数称为初等函数．

分段函数不是初等函数．

§1.3 经济中常用的函数

用数学方法解决实际问题，首先要把实际问题转化为数

学问题，即建立数学模型，通常是要找函数关系．经济理论是分析经济活动中数量间的关系的，如供求、价格、利润等．下面介绍几个常用的经济函数．

一、需求函数与供给函数

1. 需求函数

消费者对某种商品的需求量与诸多因素有关，商品价格的变化是影响需求量的主要因素．因此，可把需求量 Q 看成是价格 P 的函数，称 $Q=f(P)$ 为需求函数．

一般地，需求量随价格的升高而减少．因此，需求函数是价格 P 的递减函数．

2. 供给函数

设商品供应者对社会提供的商品量为 S，商品价格为 P，称 $S=S(P)$ 为供给函数．一般地，商品供给量随价格的上涨而增加．因此，供给函数是价格 P 的递增函数．

同一商品当市场上需求量与供给量正好相等时，就认为这时市场处于平衡状态．此时的价格 P_0 称为均衡价格，商品量称为均衡数量．

例 1　设某商品的需求函数为 $Q=b-aP(a,b>0)$，供给函数为 $S=cP-d(c,d>0)$，求均衡价格 P_0.

解：由 $b-aP_0=cP_0-d$，得 $P_0=\dfrac{b+d}{a+c}$.

二、成本函数

从事生产，就要有投入，也就是要有成本．它由固定成本和可变成本两部分组成．固定成本是在短时间内变化不大或不明显地随产品数量的增加而变化的成本，如厂房、设备等．通常用 C_1 表示．可变成本是随产品数量的变化而直接变化的部分，如原材料、能源等，通常用 C_2 表示，它是产品数量 Q

的函数，即 $C_2=C_2(Q)$.

于是，生产 Q 个单位的产品的总成本为 $C=C_1+C_2(Q)$，平均成本 $\overline{C}=\dfrac{C(Q)}{Q}=\dfrac{C_1+C_2(Q)}{Q}$.

三、总收益函数

总收益是指商品售出后的全部收入．它等于售出产品的数量 Q 与产品单价 P 的乘积．常用 R 表示．于是 $R=P\cdot Q$.

平均收益 $\overline{R}$ 是平均每售出一个单位的商品的收益，$\overline{R}=\dfrac{R}{Q}=\dfrac{PQ}{Q}=P$.

四、利润函数

销售一定数量的商品的总收益与总成本之差就是它的总利润．记作 L，则 $L=R-C$.

利润是产量的函数，$L=L(Q)$.

例 2　设生产某种产品的固定成本为 20000 元，每生产一件产品成本增加 15 元．若每件产品的销售价为 25 元，求总利润函数．

解：总成本函数：$C=20000+15Q$.

总收益函数：$R=25Q$.

于是总利润函数：$L=R-C=10Q-20000$.

五、库存函数

设某商品的年需求量为 S，分若干批进货，每批进货费为 A. 产品均匀投入市场，且上一批售完后立即进下一批．此时，平均库存量为批量的一半．若每年每件库存费为 C 元，显然，批量大则库存费高，批量小则批数多因而进货费用高．为了选择最优批量，需建立一年内库存费与进货费之和与批量间的函数关系．

设批量为 x，库存费与进货费之和为 P.

于是：每年的进货次数为$\frac{S}{x}$；年进货费为 $A\cdot\frac{S}{x}$；平均库存量为$\frac{x}{2}$；年库存费为$C\cdot\frac{x}{2}$；故 $P=\frac{A\cdot S}{x}+\frac{C}{2}x$.

复 习 题 一

1. 设 $f(x)=x^2-2$，求 $f(1)$，$f(x_0)$，$f(\frac{1}{x})$，$f[f(x)]$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & -1<x<2\\ 9-x^2 & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f(1)$，$f(3)$，$f(4)$.

3. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x\cdot\sin x$，　　(2) $f(x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$，

(3) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$，

(4) $f(x)=\sin x-\cos x+1$，

(5) $f(x)=xe^x$，　　(6) $f(x)=\frac{\cos x}{1-x^2}$.

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=2x-5$，　　(2) $y=\frac{x+3}{x-3}$，

(3) $y=\sqrt[3]{x+1}$，　　(4) $y=1+\lg(x+3)$.

5. 下列函数是由哪些函数复合而成的？

(1) $y=\sqrt{x^2-2}$，　　(2) $y=\sin(1+\ln x)^3$，

(3) $y=a\sqrt[3]{1-x}$，　　(4) $y=\sqrt{\ln(\sqrt{x}+1)}$，

(5) $y=4^{\cos^2 x}$，　　(6) $y=\lg^2\arcsin x^4$.

6. 作出下列函数的图形：

(1) $y=\frac{1}{2}x-3$，　　(2) $y=x^{\frac{1}{2}}$，