高等学校试用教材

初等代数研究 下册

余元希 田万海 毛宏德

高等教育出版社

高等学校试用教材

初等代数研究

下册

余元希　田万海　毛宏德

高等教育出版社

内容提要

本书是初等代数研究的下册，内容联系中学代数，居高临下地讨论了初等函数、方程、不等式、排列与组合、数列等课题，各章配有习题，可作为高等师范院校数学系、科的试用教材，也可供中学数学教师参考。

高等学校试用教材

初等代数研究

下册

余元希　田万海　毛宏德

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 8　字数 191,000
1988年2月第1版　1988年8月第1次印刷
印数 0001－3200

ISBN7-04-000266-3/O·288
定价 1.90 元

目　录

第十章　初 等 函 数

在初等数学范围内研究的函数是定义在实数集上的一元函数，其性质主要是由实数的概念和函数解析式的研究来反映的.

解析式分为代数式和初等超越式两大类，因而初等函数相应地分为代数函数和初等超越函数两大类. 初等函数的研究内容就是通过代数式或初等超越式的运算反映这两大类函数的基本性质及其应用. 但初等函数的研究在这里仅局限于运用初等的方法，即代数式与初等超越式的有限次运算与恒等变形.

§10.1　函数的一般概念

1. 函数的定义

函数的概念是随着数学的发展而发展的. 函数的定义在数学的发展过程中，不断地改进，不断地抽象. 在现代的初等代数课程中，函数定义的叙述基本上以下述各种定义为基础.

定义 1　有两个互相联系的变量，一个变量的数值可以在某一范围内任意变化，这样的变量叫做自变量. 另一个变量的数值随着自变量的数值而变化，这个变量称为因变量，并且称因变量为自变量的函数.

这样的定义是十九世纪法国数学家哥西（A. L. Cauchy 1789～1857）给出的.

定义 2　在某变化过程中，有两个变量 x 和 y. 如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值，按照某个对应关系，y 都有唯

一确定的值和它对应，那么就把y称为x的函数：x称为自变量.

这样的定义是由十九世纪德国数学家黎曼(G. F. B. Riemann 1826～1866)和狄里赫勒(L.P.G.Dirichlet 1805～1859)分别给出的. 这个定义指出了变量y与变量x之间的对应关系，但与定义1一样，都是把变量y称为变量x的函数.

十九世纪七十年代，德国数学家康托(G. Cantor 1845～1918)的集合论问世以后，函数便被明确地定义为集合之间的对应关系.

定义3 A和B是两个集合，如果按照某种对应关系，使A的任何一个元素在B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应关系称为从集合A到集合B的函数.

这个定义中的对应关系是单值对应.

在高等代数课程中给出了映射的概念. 因此，函数的定义又可叙述为

定义4 从集合A到集合B的映射f：$A\to B$称为从集合A到集合B的函数，简称为函数f.

这个定义仍然包含了意义并不明确的"对应"这一概念.

二十世纪初，特别是在六十年代以后，广泛采用的函数定义只涉及"集合"这一概念，而集合作为原始概念是不予定义的. 为了建立函数概念的现代定义，需要应用以下一些概念：

如果(a, b)是一个序偶，那么分别称a、b为这个序偶的第一元素、第二元素.

对于集合A与集合B，以A中的元素作为序偶的第一元素，B中的元素作为序偶的第二元素. 集合$\{(a, b)|a\in A$，并且$b\in B\}$称为集合A与集合B的笛卡儿积，并记作$A\times B$. 特别，当A是空集，或B是空集时，认为$A\times B$也是空集.

$A\times B$的子集称为从A到B的一个关系. 因此，当且仅当

$r\subseteq A\times B$ 时，r 是一个从 A 到 B 的关系.

集合 $\{x \mid x\in A$，并且存在 $y\in B$，使 $(x, y)\in r\}$ 称为从 A 到 B 的关系 r 的定义域，并且记作 $D(r)$.

集合 $\{y \mid y\in B$，并且存在 $x\in A$，使 $(x, y)\in r\}$ 称为从 A 到 B 的关系 r 的值域，并且记作 $R(r)$. 显然，$D(r)\subseteq A$，$R(r)\subseteq B$. 特别情形，当 $A=B$ 时，将 r 称为集合 A 中的一个关系. 例如，$r=\{(x, y) \mid x\in R, y\in R, x^2+9y^2=9\}$ 是实数集 R 中的一个关系，即 $R\times R$ 的子集. 这就是通常称之为椭圆的曲线. 这个关系的定义域 $D(r)$ 是集合 $\{x \mid x\in R, -3\leqslant x\leqslant 3\}$，值域 $R(r)$ 是集合 $\{y \mid y\in R, -1\leqslant y\leqslant 1\}$.

对于集合 A 中的一个关系 $\{(x, y) \mid x\in A, y\in A, x=y\}$（这个集合可更为简单地表示成 $\{(x, x) \mid x\in A\}$）称为集合 A 中的恒等关系，记作 I_A.

如果 r 是一个从 A 到 B 的关系，那么集合 $\{(y, x) \mid y\in B, x\in A, (x, y)\in r\}$ 是一个从 B 到 A 的关系，并且称为是 r 的逆，记作 r^{-1}. 可以证明，从 A 到 B 的关系 r 的逆是唯一的. 这个证明留给读者完成.

利用关系这个概念便可给出只涉及原始概念"集合"的函数一般定义：

定义 5 从集合 A 到集合 B 的函数 f 是满足以下条件的从 A 到 B 的一个关系：

(1) $D(f)=A$；

(2) 如果 $(x, y)\in f$，并且 $(x, z)\in f$，那么 $y=z$.

函数 f 记作 $f: A\to B$.

这个定义表明一个从 A 到 B 的函数是从 A 到 B 的一个特殊的关系. 在这个关系中不存在两个不同的序偶有同一个第一元素.

如果给定了函数 $f: A\to B$，并且 $(x, y)\in f$，那么 y 称为

x 的象，并且记作 $y=f(x)$. 显然，集合 A 的元素的象的全体称为 f 的值域. 在不引起混淆的情况下，认为一个函数的值域就是这个函数的定义域的象.

因为序偶 (a, b) 可定义为集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$①，所以上述函数定义 5 只涉及"集合"的含义，既不需要用到"对应"，又避免了"序"的定义. 只要集合理论适用的一切数学领域，这样给出的函数定义总是适用的. 利用这个定义，可以更为概括地表述函数的一般理论.

2. 逆函数的定义

为了研究已知函数 $f: A\to B$ 在什么情形下由关系 f 的逆关系也能确定一个函数，需要首先研究函数的类型. 这些类型的产生是由于进一步考虑到函数一般定义所蕴含的各种可能情形. 函数的各种类型由以下定义表明.

定义 6 设有集合 A 与 B 及函数 f: $A\to B$.

(1) 当 $(x_1, y)\in f$ 并且 $(x_2, y)\in f$ 时，总有 $x_1=x_2$，则称函数 f 是一对一的函数，并记作 $f: A\xrightarrow[1\text{-}1]{} B$（图 10-1）；

(2) 如果函数 f 不是一对一的，那么称函数 f 为多对一的函数（图 10-2）；

(3) 如果 $R(f)=B$，那么称 f 是从 A 到 B 上的函数，记作 f: $A\xrightarrow{Onto} B$（图 10-3）；

(4) 如果 f 不是到 B 上的，那么称 f 是到 B 内的函数；

(5) 如果函数 f 是一对一的，并且是到 B 上的，那么称 f 为 A 与 B 之间的一一对应，并且记作 f: $A\xrightarrow[1\text{-}1]{Onto} B$（图 10-4）.

如果要证明函数 f 是一对一的，可以证明当 x_1 与 x_2 是 f 的定义域中的任意元素，并且 $f(x_1)=f(x_2)$ 时有 $x_1=x_2$，但也可

① 波兰数学家库拉托夫斯基（Casimir Kuratowski 1896～）于 1921 年给出了这个定义.

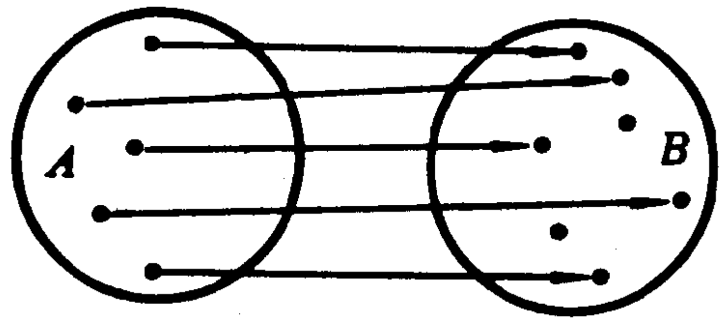


图 10-1

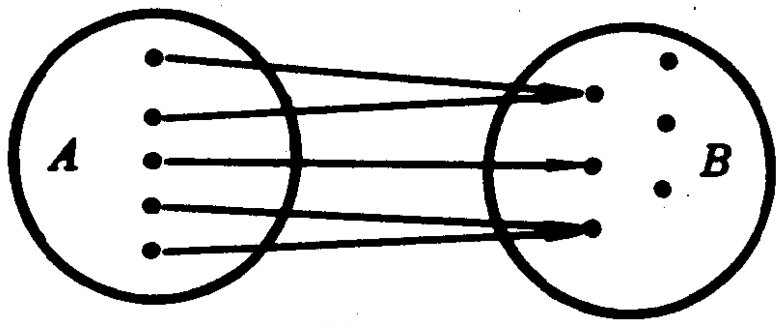


图 10-2

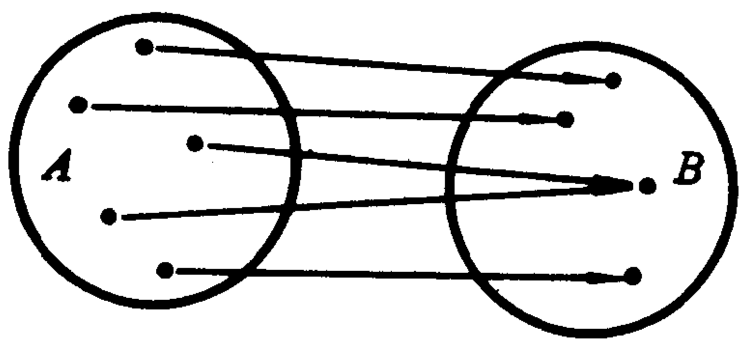


图 10-3

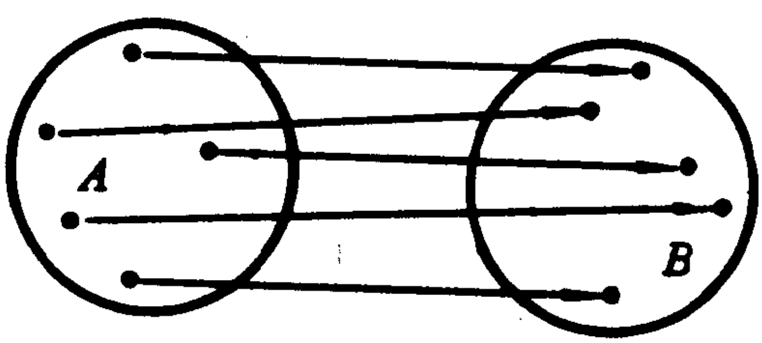


图 10-4

以证明它的逆否命题，即证明当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 例如，已知函数 $f=\{(x, y) \mid x\in R, y\in R, y=2x+3\}$. 容易证明，如果 $(x_1, y)\in f$，并且 $(x_2, y)\in f$，那么 $x_1=\frac{y-3}{2}$，并且 $x_2=\frac{y-3}{2}$，因此，$x_1=x_2$，从而函数 f 是一对一的.

如果要证明函数 f 是到上的，可以证明 $B\subseteq R(f)$. 因为 f 是从 A 到 B 的函数，显然有 $R(f)\subseteq B$，于是有 $R(f)=B$，这样就证明了 f 是从 A 到 B 上的函数.

因为从 A 到 B 的函数 f 是一个关系，必然有一个逆关系 f^{-1}. 但是 f^{-1} 未必是一个从 B 到 A 的函数. 这是因为当 f 不是到 B 上的函数时，$R(f)\neq B$，于是 $D(f^{-1})\neq B$，这不满足定义 5 的条件(1)；另一方面，当 f 是一个多对一的函数时，f^{-1} 便不满足定义 5 的条件(2). 排斥了这两种情形，便可由 f^{-1} 给出一个从 B 到 A 的函数.

定义 7 如果有 $f:A\xrightarrow[1\text{-}1]{Onto}B$，那么 f 的逆关系 f^{-1} 是一个从 B 到 A 的函数，并且称它为 f 的逆函数.

根据这个定义，不难证明下述定理.

定理 1 如果有

$$f:A\xrightarrow[1\text{-}1]{Onto}B,$$

那么就有 $$f^{-1}:B\xrightarrow[1\text{-}1]{Onto}A. \qquad \square$$

3. 函数的收缩

根据函数 f $A\longrightarrow B$ 确定一个 f 的子集，使它具有 f 所不具备的性质，这对函数的研究是起重要作用的. 例如，如果 f 是到上的，但不是一对一的，那么可以考虑确定一个 f 的子集，使它仍然是到上的，但是一对一的. 这时，新的关系的定义域与原来 f

的定义域是不同的，并且这个关系已不再是从 A 到 B 的函数，而是从 A 的某个子集到 B 上的一对一的函数．这样限定一个函数的定义域称为函数的收缩．

定义 8 如果有函数 $f:A\to B$，集合 A' 是 A 的一个子集，那么 $\{(x,\ y)\mid(x,\ y)\in f$ 并且 $x\in A'\}$ 称为 f 在 A' 上的收缩，并记作 $f\mid A'$．

容易证明 $f\mid A'$ 是一个从 A' 到 B 的函数．

定义 9 如果 f 与 g 是函数，并且 g 是 f 的一个收缩，那么 f 称为 g 的一个扩张．

例如，$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，从 A 到 B 的函数 $f=\{(a,1),(b,1)(c,2),(d,3)\}$．$f$ 的收缩可以是：

(1) $f\mid C=\{(a,\ 1),\ (b,\ 1)\}$，这里的 $C=\{a,\ b\}\subset A$．

(2) $f\mid D=\{(b,1),(c,2),(d,3)\}$，这里的 $D=\{b,c,d\}\subset A$．

显然，f 的收缩与 $D(f)$ 的子集一样多，而如果一个给定的函数原来的定义域不是全体实数，那么它的扩张是无限多的．例如，$\{(a,\ 1),\ (b,\ 1),\ (c,\ 2),\ (d,\ 3),\ (e,\ 1)\}$ 就是上述函数 f 的一个扩张．这个函数的定义域是 A 的扩集，即集合 $\{a,b,c,\ d,\ e\}$．

又如，$f=\{(m,\ 2),\ (n,\ 3),\ (p,\ 2),\ (q,\ 1),\ (r,\ 1)\}$ 是从 M 到 N 上，但不是一对一的函数，这里的 $M=\{m,n,p,q,r\}$，$N=\{1,\ 2,\ 3\}$．$f\mid M'=\{(n,\ 3),\ (p,\ 2),\ (q,\ 1)\}$ 与 $f\mid M''=\{(m,\ 2),\ (n,\ 3),\ (r,\ 1)\}$ 都是函数 f 的收缩，并且是一一对应，这里的 $M'=\{n,\ p,\ q\}$，$M''=\{m,\ n,\ r\}$．除此以外，还可举出一些成为一一对应的 f 的收缩．

在定义一个函数的逆函数时，需要利用函数的收缩．例如，正弦函数 $\sin:R\to I$ 不是一一对应函数，这里的 $I=\{y\mid y\in R,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$．如果 R 的子集 R' 是 $\left\{x\mid x\in R,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，那

么正弦函数的一个收缩 $\sin|R'$: $R' \to I$ 便成为一一对应的函数，由此就可以定义它的逆函数.

4．函数的复合

定义 10 如果有函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$，那么集合 $h=\{(x, z) | x \in A, z \in C$，并且存在 $y \in B$，使得 $y=f(x)$，$z=g(y)=g(f(x))\}$ 称为函数 g 与函数 f 的复合，记作 $g \circ f$.

根据这个定义，$h(x)=z=g(f(x))$ 的意义就是存在 $y \in B$，使得 $(x, y) \in f$，$(y, z) \in g$，并且 $(x, z) \in h$. 由此，可以进一步证明以下两个定理：

定理 2 如果有函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$，那么 $h=g \circ f$ 是一个从 A 到 C 的函数.

证 根据定义，$h=g \circ f$ 是 $A \times C$ 的一个子集，因此，$h=g \circ f$ 是一个从 A 到 C 的关系，于是，$D(h) \subseteq A$.

设 $X \in A$，于是有 $D(f)=A$，并且存在 $y \in B$，使得 $y=f(x)$. 但 $D(g)=B$，并且由于 $y \in B$ 而存在 $z \in C$，使得 $z=g(y)$. 因此，$z=g(f(x))$.

由于 $x \in A$ 和 $z \in C$ 而有 $z=h(x)=(g \circ f)(x)$. 因此，$x \in D(h)$ 因为 x 是集合 A 中的任意元素，所以，$A \subseteq D(h)$，从而有 $D(h)=A$. 这表明从 A 到 C 的关系 h 满足定义 5 的条件(1).

设 $(x, z_1) \in h$，$(x, z_2) \in h$，那么存在 $y_1 \in B$，$y_2 \in B$，使得 $y_1=f(x)$，$y_2=f(x)$，并且又有 $g(y_1)=z_1$，$g(y_2)=z_2$.

因为 f 是一个函数，所以，$y_1=y_2$；因为 g 是一个函数，所以，$z_1=z_2$. 这表明关系 h 满足定义 5 的条件(2). 于是，$h=g \circ f$ 是一个从 A 到 C 的函数. □

对于任意一个 $f: A \xrightarrow[1\text{-}1]{Onto} B$，根据定理 1 与定理 2，总有 $f^{-1} \circ f=I_A=\{(x, x) | x \in A\}$ 及 $f \circ f^{-1}=I_B=\{(y, y) | y \in B\}$，这里的恒等关系 I_A 与 I_B 都是成为一一对应的函数，通常将这样

的函数称为恒等函数.

根据定义可以证明，对于任意函数 $f: A \to B$，都有 $f \circ I_A = f$ 及 $I_B \circ f = f$. □

定理 3 如果有函数 $f: A \to B$，$g: B \to C$，$h: C \to D$，那么，$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

证 设 (u, v) 是 $h \circ (g \circ f)$ 的一个元素，于是有 $u \in A$, $v \in D$，并且存在 $z \in C$，使得 $(u, z) \in g \circ f$，$(z, v) \in h$. 但由 $(u, z) \in g \circ f$，可知存在 $y \in B$，使得 $(u, y) \in f$，并且 $(y, z) \in g$.

由 $(y, z) \in g$ 和 $(z, v) \in h$ 可得 $(y, v) \in h \circ g$. 又由 $(u, y) \in f$ 而得到 $(u, v) \in (h \circ g) \circ f$. 因此，$h \circ (g \circ f) \subseteq (h \circ g) \circ f$.

同理可证 $(h \circ g) \circ f \subseteq h \circ (g \circ f)$，于是，$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

在高等代数中，对于非空集合 A，把 $A \times A$ 到 A 的一个映射称为集合 A 的一个代数运算①. 因为函数就是映射，所以，从 $A \times A$ 到 A 的函数是一个代数运算，并且称这样的代数运算为关于集合 A 的二元运算.

利用上述函数的一般概念和有关性质可以解释一个很重要的代数系统.

设 A 是一个非空集合，$F = \{f \mid f: A \xrightarrow[\text{1-1}]{Onto} A\}$. 如果 f, $g \in F$，那么可以证明 $f \circ g: A \to A$ 仍然是一对一的，并且是到上的(习题十第 9 题). 因此，$f \circ g \in F$，从而有 $\circ: F \times F \to F$，即 $\circ$ 是一个关于 F 的二元运算.

因为恒等函数 $I_A \in F$，并且就 $f \in F$ 来说，有

$$f \circ I_A = I_A \circ f = f.$$

根据定理 1，$f^{-1}: A \to A$ 是一对一的并且是到上的函数，所以，$f^{-1} \in F$.

---

① 参阅张禾瑞、郝鈵新编《高等代数》(第三版)，高等教育出版社一九八三年九月出版.

因为有 $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I_A$，并且 $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$，于是关于 F 和 $\circ$ 可综述下列四条性质：

（i） $\circ$： $F\times F\to F$.

（ii） 存在 $I_A\in F$，对于任何 $f\in F$ 都有

$$f\circ I_A=I_A\circ f=f.$$

（iii） 对于任何 $f\in F$，存在 $f^{-1}\in F$，使得

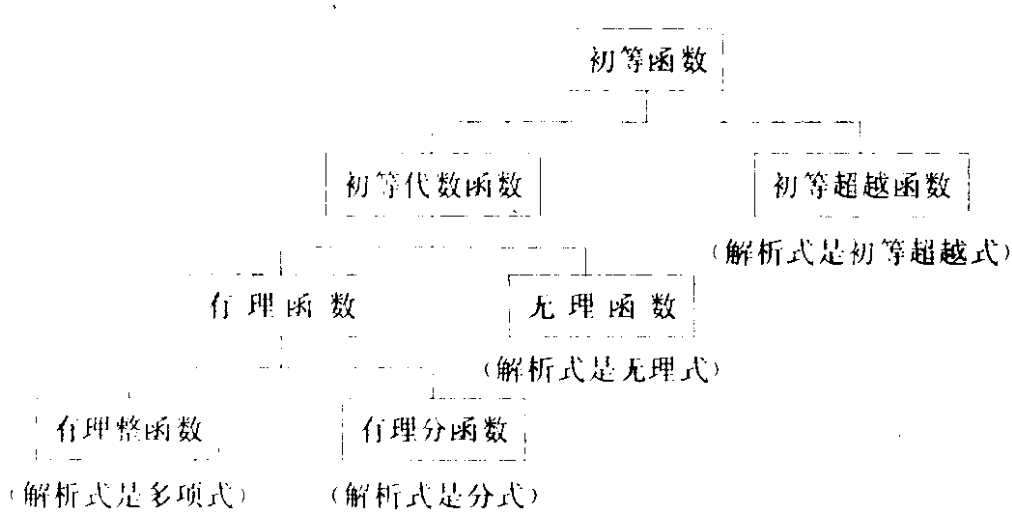
$$f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I_A.$$

（iv） 如果 f、g、$h\in F$，那么 $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

任何具有一个二元运算而又满足性质(i)—(iv)的集合称为群．这里给出的群 F 记作$(F,\circ)$．F 的元素通常称为变换，并且称 F 为变换群．

§10.2 初等函数的分类

研究函数主要研究具有解析表达式的函数．解析式分为代数式和初等超越式两大类．由这两大类解析式构成的函数是多种多样的．但从分类来说可首先确定幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数．这五种函数统称为基本初等函数．初等函数是对于基本初等函数施行有限次四则运算(加、减、乘、除)以及有限次复合步骤所构成的，并且是用一个解析式表达的函数．因



此，初等函数的解析式所包含的运算仍然是代数运算或者初等超越运算.

相应于解析式的分类，初等函数的分类如上表所示.

初等代数函数仅指代数显函数，通常又简称为代数函数. 严格地说，代数函数具有更为广泛的意义：

代数函数 y 是以变数字母 x 的多项式为系数的方程

$$p_n(x)y^n+p_{n-1}(x)y^{n-1}+\cdots+p_1(x)y+p_0(x)=0$$

的根. 代数函数便是由这个方程所确定的函数 y. 在一般情形下，这个方程的根不一定能以变数字母 x 经有限次的代数运算所组成的解析式明显地表示出来. 初等代数函数 $y=f(x)$ 只是代数函数一般定义下的特例.

不是代数函数的函数称为超越函数.

初等超越函数仅指由初等超越式给出的基本初等函数及由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合而构成的函数.

综上所述，一切初等函数都是由基本初等函数构成的. 因此，任何初等函数的性质的研究都取决于基本初等函数的性质. 在中学数学和数学分析课程中已经给出了各个基本初等函数的定义，并且分别较为详尽地研究了它们的性质. 这里要进一步说明的是在基本初等函数的一系列性质中，某些性质可以作为各个基本初等函数的特征性质，也就是说，各个基本初等函数是由其特征性质确定的.

定理 1 满足性质(1) $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ 与(2)单调递增的函数 $f(x)$ 是一个以 $a(a=f(1)>0)$ 为底的指数函数.

证 设 $f(x)$ 是满足性质(1)与(2)的函数，并且设 $a=f(1)$.

由性质(1)可得 $f(0)f(1)=f(0+1)=f(1)$.

因此，$f(0)=1$.

由性质(2)可知 $f(0)<f(1)$.

因此，$f(1)>1$，即 $a>1$.

设 m, n 为任意自然数. 由性质(1)可得

$$f(m)=f(m-1)f(1)=f(m-2)f(1)f(1)$$
$$=\cdots=[f(1)]^m=a^m;$$
$$\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n=f\left(\underbrace{\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}_{n个}\right)=f(m)=a^m,$$

因此，
$$f\left(\frac{m}{n}\right)=a^{\frac{m}{n}}.$$

因为，
$$f\left(-\frac{m}{n}\right)f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(-\frac{m}{n}+\frac{m}{n}\right)=f(0)=1,$$

所以，
$$f\left(-\frac{m}{n}\right)=\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^{-1},$$

即
$$f\left(-\frac{m}{n}\right)=a^{-\frac{m}{n}},$$

于是，$f(r)=a^r$ 对于所有 $r\in Q$ 都成立.

根据定义正实数 a 的无理数指数幂的过程(§8.1 定义 4 与定义 5)可知 $f(\alpha)=a^\alpha$ 对于任何 $\alpha\in R$ 都成立, 即

$$f(x)=a^x(a>1,\ x\in R).\quad \square$$

在定理 1 的条件中限定 a 是正实数的原因已在 §8.1 中说明. 如果将定理 1 所含有的性质(2)换为单调递减, 那么容易得出相应的结论

$$f(x)=a^x(0<a<1,\ x\in R),$$

由此可见，
$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$$

与单调递增(减)是确定一个指数函数的充分条件，事实上也是必要的条件，所以，将这两条性质称为指数函数的特征性质.

定理 2 满足性质(1) $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 与(2)单调递增的函数 $f(x)$ 是一个以 a 为底的对数函数，即存在适当的数 a，使得 $f(x)=\log_a x$.

证 由性质(1)可得

$$f(x)=f(1\cdot x)=f(1)+f(x).$$