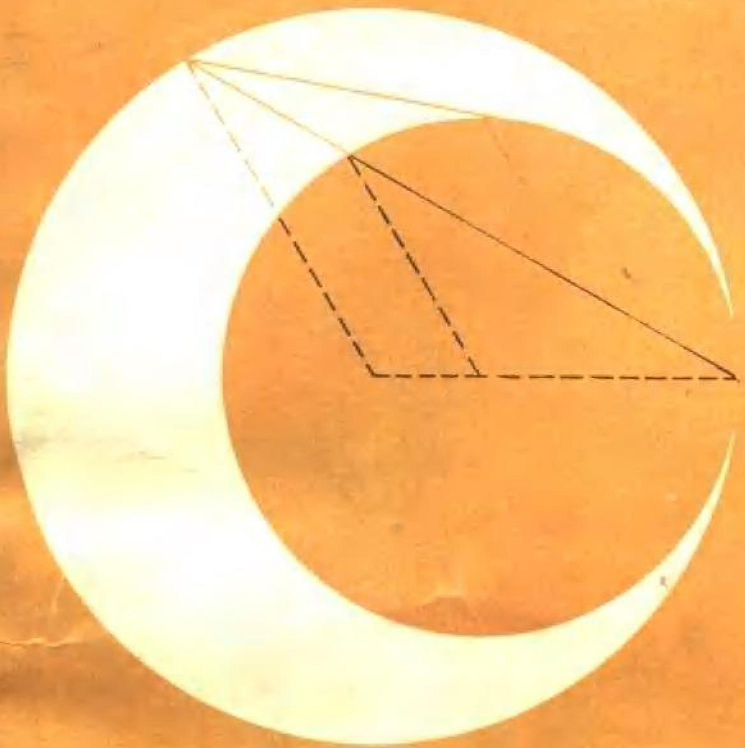

（苏联）И·М·雅格龙著　陈光还译

九种平面几何

九种平面几何

〔苏联〕 И. М. 雅格龙　著
陈光还 译　莫绍揆 校

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书从英译本转译，俄文原名《伽里略相对性原理与非欧几何》，这是本书前半部包括引论、第 I 章、第 II 章所讨论的主要内容．后半部结论部分讨论爱因斯坦相对性原理和洛伦兹变换，引出闵可夫斯基几何．最后三个附录，归结出九种平面几何，介绍它们的公理特征和解析模型，使读者得到全面的了解．本书可供高中以上学生、中学教师、师范院校师生参考．

A Simple non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis

I. M. Yaglom

Springer-Verlag New-York Inc., 1979

九种平面几何

〔苏联〕И. М. 雅格龙 著

陈光还 译 莫绍揆 校

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 丹阳人民印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 11.75 字数 262,000

1985年 2月第1版 1985年 2月第1次印刷

印数：1— 19,000

统一书号：13119·1158 定价：1.60 元

序　言

关于罗巴切夫斯基和鲍耶的非欧几里得几何学，在俄语和其他语言中都有许多专门著作和普及读物，其中的一小部分列出在书末的文献目录中．这种几何学，也称为双曲几何学，是许多大学和师范学院数学系的必修科目．这反映了如下的观点：认为熟悉双曲几何学的基础知识对于将来的高中数学教师是十分有用的．中学里的数学俱乐部对双曲几何学也赋予了很大的注意．而一些关心高中课程改革的数学家和教育工作者相信，在高中必修课中应当包含双曲几何学的基础知识，而选修课中则应包含有关双曲几何学的专题论述[1]．

对双曲几何学的这种广泛的兴趣并不令人感到惊奇．这种兴趣与双曲几何学在数学与自然科学中的应用无关，因为这些应用(例如在自守函数理论中的应用)是颇为专门的．在认真学习(然后去参加考试)双曲几何中平行线定义和双曲平面上直线布局的特征的许多学生中，也只有极少数人会碰到这些应用．对双曲几何发生兴趣的主要原因来自几何学的“非唯一性”，来自有许多几何系统存在这个重要的事实．几何学的非唯一性在下列许多方面给出了新的看法：数学的基本特征；科学中理想化的作用；演绎知识(亚里士多德的“推理知识”)，即从确定的公理系统进行演绎的知识；数学中公理系统的作用，这样的系统所必需满足的要求；以及在抽象的“数学

1) 例如，见[6]第16章．(方括号[　]中的数码是参考文献的编号．)

几何学”与讨论某种物理空间性质的“物理几何学”之间的关系等等．几何学的非唯一性已经证明了在未来的高中教师的思想中排除那种认为欧几里得几何学是“先验的”，“唯一的”，“天然的”或“上帝赐给的”等观点的效果．

在记住欧几里得几何不是唯一的几何学的同时，我们不应当忘记双曲几何也并不是唯一可能的非欧几里得几何学．实际上，在欧几里得几何和双曲几何之外，有着无数个其他的几何系统．

历史上，关于什么东西构成几何学的观点有过多次剧烈的改变．很多世纪以来，人们认为几何学的唯一目的就是彻底研究通常三维欧几里得空间的性质．尽管其他观点在发展着(如球面几何学，它是最早的非欧几里得几何系统，在古时候就已为人们熟知了)[2]，但直到双曲几何发现以前，对欧几里得空间观念是否普遍适用这一点，还没有出现任何的怀疑．高斯(C. F. Gauss 1777—1855)，罗巴切夫斯基(N. I. Lobachevsky 1793—1856)和鲍耶(J. Bolyai 1802—1860)三人在十九世纪前三十年中的革命性发现在数学史中是独一无二的[3]，因为它打破了持续了千百年的观点．

在双曲几何的三个发现者中，每一个都有他特殊的贡献．形式上的优先权属于罗巴切夫斯基，他首先公布了这个发现(1829)，而且毕生致力于双曲几何的研究，并把它发展得比高

2) 球面几何学并不符合欧几里得格式这一事实是黎曼首先强调的，他的几何观念受到双曲几何学发现的强烈影响．见下文．

3) 在俄文文献中，如卡岗的书[63]中有关于发现双曲几何的戏剧性历史的详尽描述．(高斯、鲍耶和罗巴切夫斯基各自完全独立地，而且差不多同时达到了双曲几何的观念．这使得J．鲍耶的父亲F．鲍耶评述道：“对于某种观念好象是有一种合适的时候，它会在不同的地方同时被发现，就象一到春天，凡是有阳光照射的地方，紫罗兰都在开花一样”．)

斯和鲍耶做的更多．高斯似乎是认识新几何系统存在的第一个人，大约在 1816 年，他已懂得新几何系统是与欧几里得几何学同样有效的，而罗巴切夫斯基和鲍耶差不多同时认识这点，但比高斯稍晚（鲍耶大约在 1824 年，罗巴切夫斯基不迟于 1826 年）．最后，似乎是鲍耶对这个发现的意义了解得比高斯和罗巴切夫斯基更深刻．鲍耶为他不能证明他的几何学的无矛盾性而感到十分苦恼，而高斯和罗巴切夫斯基都不太关心这个问题．事实上，罗巴切夫斯基非常接近于发现现在称之为克莱因-贝尔特拉米双曲几何模型的东西，但他并不认为需要这样的模型，也没有沿着这条思路探索下去．鲍耶不象高斯和罗巴切夫斯基那样，没有设法凭实验来断定宇宙的几何学究竟是双曲的还是欧氏的，就现在的知识看来，这一事实可能是有利于鲍氏而不是不利于他．

双曲几何被发现之后，出现了一种观点，认为恰好有两种可容许的几何系统，即欧几里得几何学和双曲几何学．双曲几何学的发现者都坚决地相信这点．但是，这种观点并未持续多久．十九世纪是几何学飞速发展的时代．1854 年，著名的德国数学家黎曼（G. F. B. Riemann 1826—1866）在一篇有名的报告[74]中阐述了关于几何学的极其普遍的观点，极大地扩大了几何学的范围[4]．黎曼指出，有三种（而不是两种）

4） 这篇论文[74]是黎曼对哥廷根大学的全体教员发表的就职演讲，对所有可望成为教授的人都要求的那种演讲．黎曼的演讲远远超越了他的时代，可能只得到高斯的理解和赞赏．（黎曼被授予教职一事，很可能与高斯高度评价这篇演讲有关．）黎曼的演讲由他的学生戴德金发表于 1864 年，那时戴德金还很难说能够完全理解它．黎曼的全部思想是由于爱因斯坦 1916 年的报告《关于广义相对论的基础》和外尔 1919 年的书 [39] 才进入数学的，前者以出色的“黎曼几何”的清晰叙述开始，后者包括了黎曼论文的新版，以及关于黎曼思想的深入讨论．

本书将要讨论的第二个关于几何学的普遍观点是克莱因提出的．有趣的是克莱因的观点也是在就职演讲中提出的，这次是他 1872 年对爱尔兰根大学的成员发表的．

相关的但是不同的几何系统，即通常在高级中学学习的欧几里得几何学，双曲几何学和椭圆几何学，最后一种很接近于球面几何学．这张几何学的表在1870年被德国数学家克莱因(F. Klein 1849—1925)扩大了[73](也可参看[56])．按照克莱因的说法，存在着九种相关的平面几何学[5]，其中包括欧几里得几何学，双曲几何学和椭圆几何学(关于这一点，可参看附录A)．克莱因的观点综合了他的前辈们的几何学观点和英国代数学者凯莱(A.Cayley 1821—1891)的工作，于1872年出现在他的爱尔兰根纲领中(见克莱因[93])．克莱因关于几何学的广泛观点具有可以和黎曼相比的普遍性．

因此，正如罗巴切夫斯基(发表于1829年)、鲍耶(发表于1832年)和高斯的具有根本意义的发现打破了欧几里得几何学的独占地位一样，黎曼和克莱因(1854—1872)的经典研究也打破了双曲几何学的独占地位．然而，直至今天，“非欧几里得几何学”这个术语经常只表示双曲几何学和椭圆几何学(有时，甚至用“非欧几何学”的复数名称来表示双曲几何学)，而其它几何学的存在只有少数专家才知道．看起来，这大体上是受物理空间性质讨论的影响，那些讨论中所表达的观点本来早已丧失了任何科学意义．例如，在克莱因的《非欧几里得几何学》[56]的1928年德文初版中，可以找到下列断言：我们的宇宙空间必须是欧几里得的，双曲的或者椭圆的[6]．在爱因斯坦1905年发表了狭义相对论和1916年发表了广义相对

---

5) 克莱因区分了七种平面几何学．(例如，参见他的书[56]．)克莱因几何学的再次细分是英国数学家沙默维尔(D. M. Y. Sammerville)1910年作出的，他把平面几何学的数目从七个增加到九个．

6) 死后出版的克莱因的书是根据1892年克莱因所发表的油印演讲稿和1893年曾作为哥廷根大学学生教材的一种编订本．克莱因的学生们拿这些演讲稿来出版时所作的修正，我认为是完全不适当的．

论之后，这样的断言至少在它的原来表述上是完全没有科学根据的．这种关于宇宙学的陈旧议论的催眠效果[7]导致了不幸的不平衡：在科学著作和科普读物中，对双曲几何学给予了过多的重视(例如，一大批俄文书和数不清的文章都是关于双曲平面上的几何构造理论这样一个专门问题的．事实上，这个问题并不值得给予这样多的注意)，而对其余的“克莱因的非欧几里得几何学”却过于忽视．本书的目的就是想要帮助纠正这种偏向，书中用广泛易懂的叙述详细介绍了这些几何学中的一种，即关于“事件”(x, t)的二维流形的几何学(x是一条直线上的点的坐标，而t是时间)，它的“运动”就是经典运动学的伽利略变换．

在作了以上不可避免的冗长的历史回顾之后，我愿意再回到强调双曲几何在教育学上是否合适的问题上来．对于未来的数学教师(在一定意义上说，还有中学里对数学感兴趣的高年级学生)来说，通晓一种与他们熟悉的欧几里得几何学有些不同的几何学无疑是重要的．我想，值得讨论的是这种非欧几何的选择问题．我既不偏向于要把双曲几何是第一个被发现的非欧几何这个事实完全抹掉，也不偏向于把它看得过于重要．实际上，双曲几何联系到平行公理的独立性问题，并澄清了这个公理在欧氏几何中所起的作用，这一点是肯定它的教育学价值的有力论据[8]．但另一方面，双曲几何学毋宁说

---

7) 我们将不涉及现代宇宙论，它讨论了(在不同的表述中)就其本质特征而言，宇宙的几何学到底是椭圆的，欧几里得的还是双曲的这个问题．

8) 这一点只对发展那些建立在欧几里得[1]—[3]或希尔伯特[4]基础之上的几何学才较为重要(例如，参看教科书[7])．如果高级中学的几何课本应用了向量方法(这是一种为许多数学家和教师所支持的方法，可参看迪唐奈(Dieudonné)那本写得很热情的书[8])，那么，对于现在和未来的数学教师来说，掌握闵可夫斯基或伽利略几何学就比双曲几何学要好一些(参见附录B)．

是颇为复杂的——它确定地比欧几里得几何学复杂得多——而几何学的非欧几里得性质并不一定意味着复杂性.事实上,本书叙述的几何学——伽利略几何学——就是所有克莱因几何学中最简单的一种;它在许多方面都比欧氏几何简单.这种几何学的主要特点就是它的相对简单性,因而学生用不着耗费大量的时间和精力就能详细地学习它.换句话说,伽利略几何学的简单性使它极易广泛地展开,而对一个新的几何系统,广泛地展开却是把它与欧氏几何进行有效比较的前提.此外,广泛地展开也给学生心理上以信念,相信所研究的结构是无矛盾的.伽利略几何学的另外一个特点是它给对偶性这个富有成果的几何概念作了示范.最后,当然不是最小,本书表述的几何学的一个主要价值,就是它阐明了在克莱因的爱尔兰根纲领和相对性原理之间的重要联系,并对克莱因的几何概念以及物理学中的相对性原理的作用给出了一个新见解[9].这些理由使我认为,人们应当认真地为师范学院考虑一个教学大纲,其中包括三种简单几何学的比较研究,这三种几何学就是:欧几里得几何学,与伽利略相对性原理相联系的几何学以及与爱因斯坦相对性原理相联系的几何学(闵可夫斯基几何学,参看本书第十二节),以及狭义相对论引论.

本书给出了很多可能是有趣的、但却不是必要的细节[10],它是为中学高年级学生,数学教师,大学和师范学院的学生和

9) 人们常常说,双曲几何学可用来判定各种不同的宇宙学假设的价值.然而,这意味着只有欧几里得或双曲几何学才能适合宇宙,在我看来,这将对接受相对性观念有妨碍.从这个观点出发,我想与伽利略相对性原理相联系的几何学更有价值,因为它正好为着了解这些观念铺平道路.

10) 例如,尽管三角形的费尔巴哈定理(三角形的九点圆与它的三个旁切圆相切,也与它的内切圆相切,参见[33])很少科学的应用,本书仍给出了它的伽利略相应定理的三个证明(包括习题在内).

讲师而写的，但并不意味着就是师范学院课程改革的一个蓝本．目前，我们对这种改革显然尚未准备好．要对上面所提的问题作出评价，将要求对与伽利略和爱因斯坦相对性原理相联系的几何学具有广泛的知识，但是本书仍不失为详细分析与伽利略相对性原理相联系的几何学的第一本科学普及读物．

关于这种几何学的详尽而严格的科学叙述是比较晚近的事．有关参考文献可在克莱因的著作(见 [56])中以及详细处理克莱因几何观念的教本中找到．然而，这些参考文献既简短又不够充实．对这种几何学进行详细研究首次出现于1913—1915年，德国几何学家贝克(H.Beek)，鲍姆(F. Boehm)和贝尔瓦尔德(L. Berwald)[11]的论文中．1925—1928年，这种几何学再次出现于英国数学家谢尔贝斯泰因(L. Silberstein)，波尔·格拉斯(Pole S. Glass)，俄国学者科特尼科夫(A. P. Kotel'nikov)和唐纳·佛格(Dane D. Fog)的著作中[12]，这些作者似乎是首先注意到了他们研究的几何学和伽利略的相对性原理之间的联系．然而，直到1950年伽利略几何学才在某种意义上被作了比欧氏几何更为广泛的分析．这种彻底的研究是由著名的荷兰几何学家奎珀(N. Kuiper)，德国几何学家斯特拉贝克尔(K. Strubecker)和我的学生马卡洛娃(N. M. Makarova)进行的(见参考文献目录)．

---

11) 参看贝克："最小曲面的几何学，" *Sitzungsber. Leipziger Berliner Math. Ges.* 12: 14—30, 1913; 鲍姆："空间曲线的等价问题"，*Sitzungsber. Akad. München* 2: 257—280, 1915; 贝尔瓦尔德："最小平面中的运动不变量和初等几何"，*Monatsh. Math. Phys.* 26: 211—228, 1915.

12) 参见谢尔贝斯泰因："伽利略时空中的射影几何学"，*Philos. Mag.* 10: 681—696, 1925; 格拉斯："伽利略几何学与一种特殊的平面几何学"，*Ann. Soc. Polonaise Math.* 5: 20—36, 1926; 科特尼科夫："相对性原理与罗巴切夫斯基几何学"，刊载在《纪念罗巴切夫斯基》第二版，喀山·格拉夫劳卡，1927, 37—66页; 佛格："迷向平面的初等几何"，*Math. Tidskrift, Ser B* xx: 21—33, 1928.

本书所研究的几何学的命名问题需要说明一下．在文献中有着各种不同的名称，如"半欧几里得的"，"标记的"，"抛物的"，"迷向的"和"伽利略的"等等，但所有这些术语都不特别合适．"标记几何学"，"抛物几何学"(或"双重抛物几何学")和"迷向几何学"这些术语的根据很难对那些没有坚实数学基础的读者用初等方法描述．而"半欧几里得几何学"这个术语的价值在于它与"伪欧几里得几何学"接近，后者是用于与爱因斯坦相对性原理相联系的几何学的．然而，只有精通"闵可夫斯基的伪欧几里得几何学"，才能了解术语"半欧几里得几何学"的真正价值．最后，现在流行的名称"伽利略几何学"在历史上说是不正确的：伽利略的工作始于十七世纪初叶，他完全不可能懂得这种几何学，因为这种几何学的发现必须依赖于十九世纪最伟大的理性成就之一——存在着许多合法的几何系统这个观念的出现．较为准确的名称应为"与伽利略相对性原理相联系的几何学"，但是这个名字太长，不便于重复使用，所以，我们还是勉强决定采用"伽利略几何学"这个名字．由于伽利略精彩而完整地阐述了他的相对性原理，而这个原理直接导致本书所研究的(非欧)几何学，这也就部分地证明这个名字是合理的．

最后，说几句关于这本有些不平常的书的计划．由两节组成的长篇引论，三节组成的结论，三个附录，内容广泛的参考文献，异乎寻常地(也许是过份的)长的序言都是在初学者书中难得见到的．本书颇为复杂的结构反映了这个课题不同寻常的性质(当我发现本书书名[13]使人迷惑不解时，我便被迫用长篇序言来开始)，更重要的是，这本书是为各种不同类型的读者写的．虽然参考文献中有许多篇初学者可以读懂，但

13) 本书俄文原名是：《伽利略的相对性原理与非欧几何学》(英译者注)．

这个目录原本是为教师而列的，高中学生可以不管它．小字印刷的材料(部分是为高中数学教师准备的)对于了解本书其余部分并非必需．熟悉引论对理解本书的其余部分却是必不可少的．在初读时，结论可以略去，但我认为在以后读第 11 和 12 节仍是有益的．顺便说一下，结论的风格是简明扼要，作者的意图不是在爱因斯坦相对论的大量通俗读物中再加上一本．阅读第 11 节的读者如能事先熟悉[38]—[55]之一将会很有帮助(我竭力推荐波恩的那本值得注意的书[40])．第 12 节“闵可夫斯基非欧几何学”也是十分扼要的，不希望很快地读过去．这一节对引用的结果差不多都没有给出证明；有心的读者可以试作证明(有关的参考文献将会给予很大帮助)．我愿意指出，我努力把伽利略几何学的现象和有关的欧氏几何现象结合到一起了，这种平行的叙述使本书相对地增大了篇幅．

每节末尾的问题与练习是为着鼓励读者的独创精神和促进思考而设的，所以常常表述得有些含糊．读者不难自己提出其它的问题．标以阿拉伯数字的练习是帮助读者检查他对内容的理解程度的，标以罗马数字的问题比练习更难一些，除此以外，它们的区分完全是主观的．解答这些问题要花费极大的精力，而且所要求的知识超过了阅读本书所需要的范围．但即使这些问题也只有方法论的兴趣而不是科学上的兴趣．书末所选列的答案与提示并不都是详细的，只是使读者知道所要求的解答的特点罢了．

关于附录 A、B 和 C 要说的话是：正如阅读本书的正文不需要先决条件一样，阅读附录也没有先决条件；原则上，一个有毅力的高中学生就可以读懂．这里需要的是毅力．附录是用十分简洁的方式写成的(几乎没有证明)，它是本书最复

杂的部分，是为那些善于思考的读者准备的．尽管附录并不依赖于基础最差的读者所不熟悉的概念和定理，但是它仍然可能只对那些熟悉解析几何和掌握椭圆几何或双曲几何的基本知识的学生才是可以理解的。附录中的材料对理解其余部分并不需要，然而，附录还是有着重要的作用：本书的其余部分包含着对一种简单的非欧几何学的详细说明，而附录提供了对整个几何世界的一瞥，伽利略几何学是其中最简单的一员．

引论，第I章，第II章，结论和附录中的公式(标以阿拉伯数字)，练习和问题都是独立编号的，因此，当在某一部分中提到公式、练习或问题而只说出它的号码时，则应在该部分中去找．其它情况下，将征引适当的章节或页数．

本书是根据1956—1957年我在国立莫斯科大学对中学数学俱乐部的高年级和低年级学生的演讲而写成的．1963—1964年在莫斯科大学的数学夜校中又以扩充了的内容向中学低年级学生演讲过．在某种程度上，本书的内容受到我在列宁国立莫斯科师范学院讲授的一个(更高级与更广泛的)专题课程《相对性原理和非欧几何学》的影响．

对作者来说，对那些帮助过他的人们表示感谢是一件愉快的事．我对古列维奇友好而帮助很大的批评意见表示感谢；我也要感谢本书的编辑吉兹耐尔，在准备本书最后的形式上，她的协助很有价值；最后，我还要感谢科罗列娃极好的工作，她为本书绘图，在她的热情帮助下，本书才得以出版．

И. М. 雅格龙

英译者序言

这是一本很令人注目的书，它只依靠微积分以前的数学，但它的“概念密度”却远远超过许多高级教程．它是一部引人入胜的故事，从一种几何学到另一种几何学，从一个模型到另一个模型，从几何学到代数学，从几何学到运动学，从而跨越了数学的一个领域与另一领域之间，数学与物理之间的人为界线．

书中充满了极有教益的评注、讨论、例子和应用．每节后面的练习和问题中，有些的确是练习和问题，另一些则为较有经验的读者描画出进一步深入的途径．

要指出这是一本不平常的书，上面所说的已经够了．然而，只有在阅读时，才得以领会作者赖以发展许多论题的技巧．可以毫不夸张地说，雅格龙教授为广大读者，从高中学生到师范学院教师，开辟了通向大多数几何学以及代数学和物理学的康庄大道．

下面是有关本书内容的一些技术性的介绍．

引论部分讨论了克莱因关于几何学的概念，力学以及力学的几何化．第Ⅰ和第Ⅱ章(约占全书的一半)是伽利略平面几何学以及伽利略反演几何学的一个初等而不平凡的导论，而以欧几里得平面几何学和反演几何学作它的基础和对比．

平面伽利略几何学可设想为直线上的经典运动学的几何

学或者切变与平移的几何学. 在许多方面，伽利略几何学比欧几里得几何学更简单些. 例如，对于 sing 和 cosg 这两个 sin 和 cos 的伽利略类比概念，有 sing $A\equiv A$ 以及 cosg$A\equiv 1$ 对于所有的角 A 均成立. 象射影几何学一样，伽利略几何学也有对偶原理.

EIG(欧几里得反演几何学)变换的特征性质是它的保(直线和)圆性. 相似地，GIG (伽利略反演几何学)变换的特征性质是它保(直线和)伽利略圆和圈，它们是欧氏圆的伽利略类比概念. EIG 和 GIG 变换令人更为惊奇的特征是它们分别是限制在球和圆柱上的空间直射变换. 附录 C 中，EIG 被证明为下列分式线性变换群的几何学:

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

和 $$w=(a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d),\quad z=a+bi,\ i^2=-1,$$

而 GIG 为下列变换群的几何学:

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

和 $$w=(a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d),\quad z=a+b\varepsilon,\ \varepsilon^2=0.$$

第 I 和第 II 章之后是叫做"结论"的一章. 其中作为伽利略几何学物理基础的经典运动学换成相对论运动学了. 而把相对论运动学几何化就得到了闵可夫斯基几何学，前面的那些问题又在新几何学中进行讨论. 特别地，MIG (闵可夫斯基反演几何学)被刻划为研究限制在单叶双曲面上的空间直射变换. 在附录 C 中，MIG 被证明为下列分式线性变换群的几何学:

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

和 $$w=(a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d),\quad z=a+be,\ e^2=1.$$

附录 A 引入了一个新的概念领域. 作者指出，前面研究的三种几何学中的每一种都以同样的方式度量长度，但对角

的度量却不同．如果对角度和长度都各以三种不同的方式来度量，我们就得到九种平面几何学．在附录A中，一些几何学作为适当空间中单位球的内蕴几何学而实现．在附录B中，这些几何学由适当的公理集刻划．在附录C中，一些几何学又利用解析模型来实现，其中用到复数，对偶数和二重数的代数．

我感谢作者关于参考文献的意见(对于阅读本书的高中学生来说，德文、法文以及俄文的文献目录可能是无用的，但对其他读者也许有用)．斯普林格出版社的纽约编辑部给予了最大的帮助．我对哈代·格兰特阅读本书的译文初稿表示感谢．我特别感谢巴塞尔·戈尔登为译文润色所作的不倦的努力．

关于记号的注释

本书提出了记号方面的一个难题：一种绝对精确而无矛盾的记号往往是十分繁复的．作者的记号既充分精确而又简单，译者效法了作者的榜样．

下面的符号表和记法说明可能会对读者有用．

(1) (第2页) $d=AA_1=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}$ 是线段的正欧几里得长度．

(2) (第19页)在沿着一条定直线运动的情况下，速度常用数而不是矢量来表示．

(3) (第42页) $\tan\delta_{ll_1}=(k_1-k)/(1+kk_1)$ 是从 l 到 l_1 的欧几里得有向角的正切的带符号的量值．

(4) (第42页) $d_{ll_1}=|s_1-s|/\sqrt{1+k^2}$ 是具有公共斜率 k 的两平行直线 l 和 l_1 间的正欧几里得距离，l 和 l_1 的 y 截距

分别为 s 和 s_1.

(5) (第 43 页) $d_{AA_1}=x_1-x$ 是有向线段 AA_1 的带符号的伽利略长度.

(6) (第 43 页) $\delta_{AA_1}=y_1-y$ 是有向特殊线段 AA_1 的带符号的特殊长度.

(7) (第 46 页) δ_{ll_1} 表示从 l 到 l_1 的有向伽利略角带符号的伽利略量值. 如果 l 和 l_1 的斜率分别为 k 和 k_1, 则 $\delta_{ll_1}=k_1-k$.

(8) (第 47 页) d_{ll_1} 表示平行线 l 与 l_1 间的带符号的伽利略距离. 如果 l 和 l_1 分别有 y 截距 s 和 s_1, 则 $d_{ll_1}=s_1-s$.

(9) (第 48 页) d_{Ml} 表示点 M 到直线 l 的带符号的伽利略距离.

(10) (第 46 页) $\overline{NN_1}$ 是有向线段 NN_1 带符号的长度. $\bar{a}$ 是有向线段 a 的带符号的长度. $\bar{A}$ 是有向角 A 的带符号的量值.

(11) (第 46 页) δ_{ll_1} 的力学意义是 l_1 表示的匀速运动相对于 l 表示的匀速运动的速度 v_{l_1l}. 如果 l, l_1 的斜率分别是 k 和 k_1, 则 $v_{l_1l}=\delta_{ll_1}=k_1-k$. 既然 $\operatorname{tang}\delta_{ll_1}=\delta_{ll_1}$(见 53 页, 练习 3), 我们有 $v_{l_1l}=\operatorname{tang}\delta_{ll_1}$ (与相对论力学中的关系 $v_{l_1l}=\tanh\delta_{ll_1}$ 相对照; 见 223 页足注 16).

(12) (第 213 页) $d_{AB}=\sqrt{2S(AKBL)}$ 是 AB 的正闵可夫斯基长度.

(13) (第 214 页) $d_{AB}=\sqrt{|(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2|}$ 是 AB 的正闵可夫斯基长度.

(14) (第 215 页) $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}$ 是 AB 的正实的或复的闵可夫斯基长度.

(15) (第 307 页) 复数 $z=x+iy$ 的模 $|z|$ 由 $|z|=$