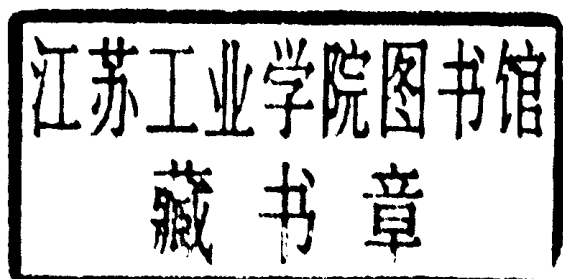




# 板壳稳定性理论

吴连元 编著



华中理工大学出版社

|                                               |                         |
|-----------------------------------------------|-------------------------|
| $q$                                           | 法向荷载集度                  |
| $R_1, R_2$                                    | 主曲率半径                   |
| $r, \theta, z$                                | 柱面坐标系                   |
| $T$                                           | 温度或温升                   |
| $t$                                           | 时间或切向方向                 |
| $U, U_m, U_b$                                 | 应变势能、薄膜应变能、弯曲应变能        |
| $V$                                           | 外力势能                    |
| $W$                                           | 外力功                     |
| $u, v, w$                                     | 位移分量                    |
| $X, Y, Z$                                     | 直角坐标系或坐标方向              |
| $x, y, z$                                     | 坐标值                     |
| $Z (= \sqrt{1 - \mu^2 L^2 / Rh})$             | 巴特多夫 (S. B. Bathorf) 参数 |
| $\alpha, \beta$                               | 主曲率线坐标                  |
| $\Gamma$                                      | 高斯 (K. F. Gauss) 曲率     |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$       | 切应变                     |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | 线应变                     |
| $\bar{\theta} (= m\pi R / nL)$                | 屈曲波形的波长比                |
| $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$             | 曲率及扭率                   |
| $\Lambda$                                     | 比例加载系数                  |
| $\mu$                                         | 材料泊松 (P. O. Poisson) 比  |
| $\Pi$                                         | 系统总势能                   |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$                | 正应力                     |
| $\sigma_{cr}$                                 | 临界应力                    |
| $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$             | 切应力                     |
| $\Phi, \phi$                                  | 应力函数                    |
| $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$                   | 曲率变化量及扭率变化量             |
| $\omega$                                      | 转角变量                    |

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

板壳稳定性理论/ 吴连元 编著

武汉:华中理工大学出版社,1996 年 1 月

ISBN 7-5609-1159-5

I. 板…

II. 吴…

III. 板-壳体(结构)-薄壳结构-结构稳定性-理论

N. TU33

## 板壳稳定性理论

吴连元

责任编辑:湛柏琼

\*

华中理工大学出版社出版发行

(武汉·武昌·喻家山 邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社照排室排版

华中理工大学出版社印刷厂印刷

\*

开本:850×1168 1/32 印张:9.25 字数:228 000

1996 年 1 月第 1 版 1996 年 1 月第 1 次印刷

印数:1-1 000

ISBN 7-5609-1159-5/O · 138

定价:7.40 元

## 内 容 简 介

本书详尽阐明板壳稳定性的物理本质和基本概念,系统介绍板壳稳定性的基本理论、各种解法及近代稳定性理论。全书共分七章,内容包括基本概念和基本方程;薄板稳定性;薄板后屈曲;壳体稳定性;壳体后屈曲;板壳塑性屈曲;板壳动力稳定性、热屈曲及蠕变屈曲。

本书可作工程力学及机械、土木、航空、船舶、能源等工程结构专业的研究生教材,并可供有关专业的教师、研究人员和工程技术人员参考;在删节部分内容后,也可供本科高年级学生使用。

# 前 言

随着材料科学的发展,工程中板壳结构的应用日益广泛。稳定性问题是板壳结构设计中的一个突出问题,尤其是宇航、航空、舰船、精密仪表以及各种大型工程结构的现代设计,遇到了各种类型的板壳稳定性问题。板壳稳定性理论可分为经典线性理论和非线性稳定理论。稳定性问题本质是属于非线性的,经典线性理论是数学上线性化的近似理论。由壳体经典线性理论得到的临界荷载预测值与实验结果往往不一致,尤其对于圆柱壳体受轴向压力和球形壳体受均匀外压的情况,通常实验值仅相当线性理论临界值的 $1/5 \sim 1/2$ 。如果仅用线性稳定性理论计算,常常会对结构承载能力作出过高的估计,甚至导致灾难性破坏。这一严重的事实使工程师、力学家们十分重视板壳稳定性的研究。近代航空航天技术、建筑及海洋工程的发展,更推动了板壳稳定性理论的发展与应用。

为了解释线性理论与实验的差异,在长期的研究中形成三个主要研究方向:几何非线性的影响、失稳前应力状态的影响及原始缺陷的影响。40年代初冯·卡门(T. Von Kármán)和钱学森提出非线性大挠度稳定性理论,开辟了后屈曲性态的研究。60年代中期施泰因(M. Stein)提出的前屈曲一致理论考虑了失稳前应力的不均匀性及支承边界条件的影响。但是这两种理论都是以理想完善结构为对象,而实际结构总是存在各种不完善因素(原始缺陷)。唐奈(L. H. Donnell)早期研究了原始缺陷的影响,科依特(W. T. Koiter)在1945年提出(60年代才被广为传播)考虑原始缺陷影响的初始后屈曲理论。这三种理论是近代稳定性理论的主要组成部分。

板壳稳定性研究的重要内容是确定失稳临界荷载。近代稳定性理论的核心问题是后屈曲性态的研究。非线性力学研究的深入

推动了板壳后屈曲理论的发展。有限单元法的应用开辟了数值求解板壳稳定性问题的新领域。工程中的板壳稳定性问题,除各向同性材料的板壳结构在各种静荷载作用下的弹性稳定性外,还经常遇到各向异性、夹层板壳稳定性,板壳塑性稳定性,板壳动力稳定性以及热屈曲和蠕变屈曲等问题。

本书按基本理论的系统将各类板壳稳定性分为七章论述。在第一章中首先以非线性弹性力学为基础,系统地介绍板壳非线性弯曲的基本方程。它不仅是研究稳定性问题的基础方程,也有助于掌握稳定性问题的非线性本质。第二、四章讨论板壳的前屈曲性态,介绍各种求解临界荷载的方法。第三、五章重点研究板壳后屈曲性态。第六章讨论物理非线性的板壳塑性稳定性。第七章介绍板壳稳定性的若干时态问题。各章节间保持相对独立性,可根据教学的需要进行选择。

扁壳理论是工程中普遍应用的壳体近似理论。本书以扁壳理论为体系建立基本方程。但由于这种理论使用范围受到一定限制,因而也介绍一些修正理论作为基本方程体系的补充。

本书是作者在多年使用板壳稳定性的讲义基础上编著而成的。在编写中注重系统阐述基本概念与基本方程,对数学推导力求思路清晰、步骤明确;注重突出物理模型的抽象过程和数学模型的建立过程以及理论联系实际。书中给出一定数量的习题。

承蒙上海工业大学何福保教授认真和详细地审阅了全部书稿,提出了许多宝贵的修改意见。本书在编写过程中也得到华中理工大学黄玉盈教授、衡阳工学院孙德纶教授以及上海交通大学沈为平教授、刘正兴教授的热情支持,在此一并表示深切谢意。

由于作者水平有限,书中疏漏及不妥之处在所难免,恳切希望读者指正。

吴连元

1993年6月于

上海交通大学

## 基本符号

|                        |                       |
|------------------------|-----------------------|
| $A$                    | 面积                    |
| $A, B$                 | 主曲率坐标的曲面拉梅(G. Lamé)系数 |
| $B(=h^2/12R^2)$        | 壳体几何参数                |
| $a, b$                 | 矩形板 $X, Y$ 方向的边长      |
| $C_i$                  | 常数或系数                 |
| $D(=Eh^3/12(1-\mu^2))$ | 板的抗弯刚度                |
| $E, E_t, E_s$          | 材料的弹性模量、切线模量、割线模量     |
| $e_1, e_2, e_n$        | 曲线坐标的单位矢量             |
| $G$                    | 切变模量                  |
| $H(=L^2/Rh)$           | 壳体几何参数                |
| $H_1, H_2, H_3$        | 正交曲线坐标的曲面拉梅系数         |
| $h$                    | 板壳厚度                  |
| $I$                    | 截面的惯性矩                |
| $J(=Eh/(1-\mu^2))$     | 薄膜抗拉刚度                |
| $K$                    | 刚度矩阵                  |
| $k$                    | 临界荷载系数                |
| $L, l$                 | 长度或跨度                 |
| $L(\cdots)$            | 微分算子                  |
| $M_x, M_y$             | 弯矩                    |
| $M_{xy}$               | 扭矩                    |
| $N_x, N_y, N_{xy}$     | 薄膜内力                  |
| $m, n$                 | 屈曲波数                  |
| $p_c, p_s$             | 分支点荷载、极值点荷载           |
| $p_x, p_y, p_{xy}$     | 面内压力荷载                |
| $p_{cr}$               | 屈曲临界荷载                |
| $Q_x, Q_y$             | 横向切力                  |



# 目 录

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 第一章 基本概念和基本方程         | (1)   |
| § 1.1 基本概念            | (1)   |
| § 1.2 判别平衡稳定性的准则      | (4)   |
| § 1.3 稳定性问题的非线性性质     | (9)   |
| § 1.4 平板大挠度弯曲基本微分方程   | (19)  |
| § 1.5 壳体大挠度弯曲基本微分方程   | (24)  |
| § 1.6 板壳能量变分方程        | (27)  |
| 第二章 薄板稳定性             | (34)  |
| § 2.1 矩形板稳定性的静力平衡法    | (34)  |
| § 2.2 矩形板稳定性的能量变分法    | (43)  |
| § 2.3 圆形板的稳定性         | (52)  |
| § 2.4 加劲矩形板的稳定性       | (58)  |
| § 2.5 正交各向异性板及夹层板的稳定性 | (61)  |
| § 2.6 有限差分法的应用        | (68)  |
| § 2.7 薄板屈曲分析的有限单元法    | (71)  |
| 习题                    | (75)  |
| 第三章 薄板后屈曲             | (79)  |
| § 3.1 板的非线性大挠度屈曲理论    | (79)  |
| § 3.2 各种边界条件下矩形板的后屈曲  | (84)  |
| § 3.3 矩形板的剪切后屈曲       | (87)  |
| § 3.4 圆板后屈曲           | (92)  |
| § 3.5 板的屈曲极限强度        | (96)  |
| § 3.6 初始后屈曲理论         | (100) |
| § 3.7 后屈曲分析的数值法       | (107) |
| 习题                    | (113) |

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| <b>第四章 壳体稳定性</b> .....      | (115) |
| § 4.1 壳体弹性屈曲基本微分方程 .....    | (115) |
| § 4.2 轴压、外压作用下圆柱壳的稳定性 ..... | (123) |
| § 4.3 受扭转、弯曲的圆柱壳的稳定性 .....  | (131) |
| § 4.4 非浅柱壳的稳定性 .....        | (140) |
| § 4.5 边界条件对临界应力的影响 .....    | (145) |
| § 4.6 组合荷载作用下的圆柱壳屈曲 .....   | (148) |
| § 4.7 加劲壳的稳定性 .....         | (153) |
| § 4.8 夹层壳的稳定性 .....         | (160) |
| § 4.9 旋转轴对称壳体的屈曲 .....      | (164) |
| § 4.10 前屈曲一致理论 .....        | (170) |
| 习题 .....                    | (176) |
| <b>第五章 壳体后屈曲</b> .....      | (178) |
| § 5.1 引言 .....              | (178) |
| § 5.2 非线性大挠度屈曲理论 .....      | (179) |
| § 5.3 圆柱壳体扭转后屈曲的精确解法 .....  | (190) |
| § 5.4 球壳大挠度屈曲 .....         | (193) |
| § 5.5 非线性缺陷理论 .....         | (197) |
| § 5.6 初始后屈曲理论的虚功法 .....     | (202) |
| 习题 .....                    | (211) |
| <b>第六章 板壳塑性屈曲</b> .....     | (212) |
| § 6.1 引言 .....              | (212) |
| § 6.2 平板的弹塑性屈曲 .....        | (216) |
| § 6.3 板壳塑性屈曲的一般全量理论 .....   | (224) |
| § 6.4 加劲圆柱壳的塑性屈曲 .....      | (230) |
| § 6.5 板壳塑性屈曲的增量理论 .....     | (240) |
| <b>第七章 板壳稳定性的特殊问题</b> ..... | (245) |
| § 7.1 板壳动力稳定性基本方程 .....     | (245) |
| § 7.2 平板的动力屈曲 .....         | (246) |

|            |                     |       |
|------------|---------------------|-------|
| § 7.3      | 圆柱壳体的动力屈曲 .....     | (250) |
| § 7.4      | 充液圆柱壳体的动力屈曲 .....   | (254) |
| § 7.5      | 板壳热屈曲基本方程 .....     | (258) |
| § 7.6      | 板壳在稳态温度场下的热屈曲 ..... | (260) |
| § 7.7      | 多层壳的热屈曲 .....       | (263) |
| § 7.8      | 蠕变屈曲的概念 .....       | (267) |
| § 7.9      | 壳体蠕变屈曲理论 .....      | (271) |
| § 7.10     | 圆柱壳体的弯曲蠕变稳定性 .....  | (274) |
| 参考文献 ..... |                     | (278) |

# 第一章 基本概念和基本方程

## § 1.1 基本概念

板壳稳定性理论是固体力学的一个分支。它是研究板壳构件及其组合结构在各种形式的压力作用下产生变形以至丧失原有平衡状态和承载能力的一门学科。物体在外力作用下的平衡状态具有三种形式:稳定的平衡状态、不稳定的平衡状态和随遇平衡状态。所谓稳定平衡是指物体受微小扰动使其在平衡位置附近作无限小的偏离,当扰动去除后,若物体能回到它原来的平衡位置,这种平衡状态称为稳定平衡状态。如果物体在扰动去除后,不能再回到它的原来平衡位置,反而继续偏离下去,这种平衡状态称为不稳定平衡状态,又称丧失稳定状态,简称失稳。随遇平衡状态通常是从稳定平衡状态向不稳定平衡状态过渡的中间状态。薄板、薄壳在外力作用下处于稳定平衡状态的应力、变形计算理论,通常在板壳理论书籍中已有详细讨论<sup>[1~5]</sup>,本书专门讨论在各种荷载作用下板壳稳定性问题。

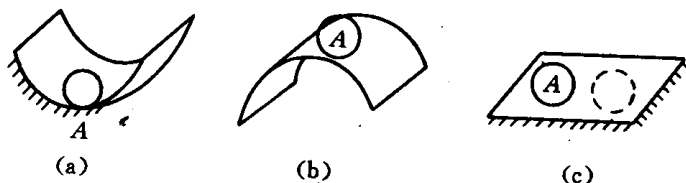


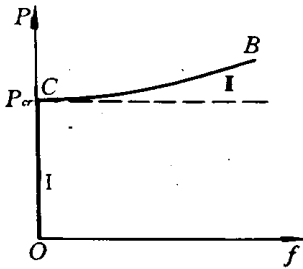
图 1.1 物体的平衡形式

(a)稳定平衡; (b)不稳定平衡; (c)随遇平衡

刚性小球在光滑面上的平衡状态有着不同的平衡性质。刚性小球在凹面最低点 A 处的平衡是稳定的(图 1.1(a));刚性球在凸

面顶点 A 处的平衡是不稳定的(图 1.1(b));刚性球在水平面上任何点处的平衡是随遇的(图 1.1(c))。

弹性变形构件与结构也具有这三种平衡形式。欧拉(L. Euler)压杆问题就是一个典型的例子。欧拉压杆的失稳挠度  $f$  与轴向压力  $P$  的关系如图 1.2 所示。图中线段表示出压杆的平衡路径,路径上每一点都表示杆件的一个平衡状态(又称平衡位形)。



当  $P$  小于临界荷载时,杆件维持直线状态下的稳定平衡,相应于图中 OC 段平衡位形。这种平衡状态称为基本状态,记作 I 状态。当  $P = P_σ$  (临界压力)时,杆的直状态达到临界状态,相当于图中 C 点状态。此时,任何微小干扰都会使杆件由直变弯,即杆件失稳或屈曲。与此相应的变形称为失稳波形(又称位形或构形)。图中线段 CB 表示相邻的平衡位形,记作 II 状态。图中 C 点是临界点。在 C 点状态开始发生平衡状态的分歧,这种类型的临界点称为分支点(或称分叉点)。与分支点对应的荷载称为平衡分支荷载  $P_σ$ 。从理论上讲,分支点的切线是水平的,分支点是不定平衡点,它可以是稳定的,也可以是不稳定的。越过分支点之后称为后屈曲(过屈曲或超临界),杆件可能出现多种平衡形式,其中有的稳定,有的不稳定。

当荷载达到分支荷载时,在任何微小干扰下结构将由压力作用面内变形的转变为侧向弯曲变形。在发生这类失稳的过程中,结构的应力状态由屈曲前的均匀压缩变成弯曲应力状态。因此,分支点失稳(分支点屈曲)的基本特征是在稳定平衡的基本状态 I 附近存在着另一个相邻的平衡状

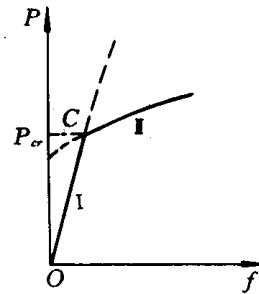


图 1.3 分支点失稳

态Ⅱ,如图 1.3 所示。在分支点处将发生平衡状态的转变,由原平衡状态转变到不同性质的平衡状态,从而也导致结构的变形状态、应力状态发生性质的变化。

另一种结构的失稳形态是极值点失稳。在极值点失稳过程中不出现分支点,即平衡状态不发生性质的改变。整个过程只是平衡形态的数量变化,在极值点处存在最大荷载值,如图 1.4 所示。当达到最大荷

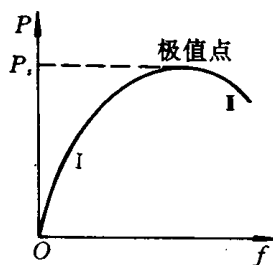


图 1.4 极值点失稳

载后,变形迅速增加,这种现象称为极值点失稳(又称极值点屈曲)。极值点对应的最大荷载  $P_c$  称为极值点荷载或称压溃荷载。

弹性薄板在面内压力作用下(图 1.5(a))也存在平衡稳定性问题。当压力  $p_x$  小于临界荷载  $p_{cr}$  时,平板处于面内压缩变形的稳定平衡状态(图 1.5(b))。可是自然界一切物理现象都是按照最容易的路径发生。当荷载增加到临界荷载  $p_{cr}$  时,平板由变弯来降低外力势比缩短更为容易,因而平板将突然发生侧向凸屈(图 1.5(c)),称为平板丧失稳定性,简称板失稳或称板屈曲。由此可见,稳定性问题是属于变形问题。

分支点和极值点统称为临界点。分支荷载  $P_c$  和压溃荷载  $P_c$ ,

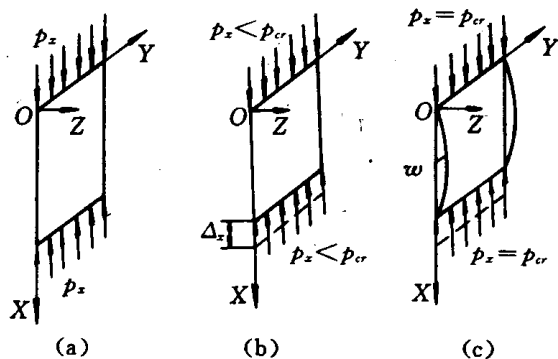


图 1.5 板的平衡形式

均为临界荷载  $P_{cr}$ 。在临界状态之前的平衡状态(平衡位形)称为前屈曲平衡状态(前屈曲平衡位形)。超过临界状态之后的平衡状态称为后屈曲平衡状态(后屈曲平衡位形)。也有的书中把后屈曲平衡状态称为过屈曲或超临界平衡状态。

除了按照临界状态的特性将结构失稳分为分支点失稳和极值点失稳外,还可以按照其他性质将稳定性问题分类为:弹性失稳(屈曲)与塑性失稳(屈曲);线性小挠度失稳与非线性大挠度失稳;静力失稳与动力失稳;完善结构的失稳与非完善结构的失稳;局部失稳与总体失稳;局部缺陷失稳与总体缺陷失稳,等等。

板壳的稳定性和强度(应力)问题均属板壳理论的重要内容。稳定性问题和强度问题性质上的严格区别表现在计算理论的不同。严格地说,平衡方程应是结构变形之后的平衡条件。对于小变形结构应力问题,以未变形的结构位置来建立力的平衡关系具有足够的近似性。为了进行比较,我们把这种忽略变形对力的作用的影响,并且变形几何采用线性关系所建立的近似计算理论称为一阶理论;而考虑变形对平衡条件的影响,但变形几何仍采用线性关系所建立的计算理论称为二阶理论;考虑变形对平衡条件的影响,而且采用非线性(大挠度)变形几何关系所建立的计算理论称为三阶理论。由于稳定性问题的重要前提是必须以失稳变形后的结构为对象,因而变形引起的力的附加项使稳定性平衡方程变成非线性。于是稳定性问题必须以非线性的二阶理论或三阶理论来建立它的计算理论。对于小挠度失稳,通常假设失稳中载荷不变,则将二阶理论的平衡方程线性化,从而相应地形成板壳稳定的线性小挠度屈曲理论和非线性大挠度屈曲理论。可见稳定性问题本质是非线性力学问题,并且需要研究板壳变形几何的非线性关系。

## § 1.2 判别平衡稳定性的准则

为了判别平衡状态是否稳定,必须建立平衡稳定性的判别准

则。确定稳定性准则具有重要的理论和实际意义。判别平衡稳定性的准则可分为两大类：平衡的小稳定性准则和平衡的大稳定性准则。

对于分支点失稳是研究分支点处无限接近的两个平衡状态，可以认为基本平衡状态与邻近的另一平衡状态差别是无穷小的，因而可以使用线性化的理论来研究分支点附近无限小域的稳定性。平衡的小稳定性准则是以小挠度线性理论为基础。如果研究分支后屈曲平衡状态、极值点屈曲等大范围稳定性就应使用非线性有限变形理论。不论哪一类准则，判别平衡稳定的根本准则是从平衡稳定性的基本概念出发，即假设对处于平衡状态的体系施加一微小干扰，当干扰去除后，如果体系能回复到原来的平衡位置，则该平衡状态是稳定的；反之，若体系偏离原来的平衡位置越来越远，则该平衡位置就是不稳定的。

对于保守力系统的分支点失稳问题，可以使用三个等价的小稳定性准则。这就是从根本的判别准则出发，由随遇平衡的静力特征可得到判别平衡稳定性的静力准则；由平衡状态的能量特征可得到判别平衡稳定性的能量准则；由稳定平衡和随遇平衡的动力特征可得到判别平衡稳定性的动力准则。

### 一、静力准则

平衡稳定的静力准则可表达为：若系统处于某一平衡状态，且与其无限接近的相邻位置也是平衡的，则这一平衡状态是随遇的。用静力准则确定平衡分支荷载，首先要对新的平衡状态建立静力平衡方程。这种在外荷载不变的情况下，考虑干扰变形影响的静力平衡方程显然是对干扰状态的一组齐次方程。这组方程如果存在非零解，就表示非零的干扰状态是另一平衡位置，则原来的平衡状态处于随遇平衡状态，因而平衡稳定问题便转化为在齐次边界条件下求解齐次方程组的特征值问题。这样求得的状态对应于分支点 $C$ ，最小特征值即为稳定性问题的临界荷载。对应于每个特征值



都可得到特征函数,即失稳波形。用静力准则确定临界荷载的方法称为静力平衡法。静力准则广泛应用于连续弹性体系稳定性问题的求解。

## 二、能量准则

对于保守力体系,能量准则可用势能表示。结构系统的总势能可写成

$$\Pi = U + V = U - W \quad (1.1)$$

式中: $U$  为应变势能; $V$  为外力势能;而 $(-V)$ 等于外力功 $W$ 。

连续结构体系的平衡条件及稳定准则可以使用变分计算。根据势能驻值原理,当系统处于平衡状态时,其势能 $\Pi_1$ 的一阶变分等于零,即

$$\delta \Pi_1 = \delta(U - W) = 0 \quad (1.2)$$

若研究弹性系统基本平衡状态是否稳定,则需考察在该平衡位置附近微干扰位置的势能 $\Pi_1$ 的变化: $\Delta \Pi = \Pi_1 - \Pi_1$ 。如果结构系统应变能的增量大于外力功的增量,即 $\Delta \Pi > 0$ ,则当干扰去除后体系将能回复到原来平衡位置,平衡状态是稳定的。反之,当外力功的增量大于应变能的增量时,即 $\Delta \Pi < 0$ ,则系统所处的平衡状态是不稳定的。而当应变能的增量等于外力功的增量时,即 $\Delta \Pi = 0$ ,平衡状态是随遇的,即处于临界状态。

上述能量准则在应用中常将干扰状态的势能 $\Pi_1$ 在初始平衡位置附近展开成泰勒(G. I. Taylor)级数

$$\Pi_1 = (U - W)_1 = \Pi_1 + \delta \Pi_1 + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi_1 + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi_1 + \dots$$

因而系统势能的变化为

$$\Delta \Pi = \delta \Pi_1 + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi_1 + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi_1 + \dots \quad (1.3)$$

考虑变分式(1.2),由于干扰变形为微小量,若仅保留二阶小量,则