预应力混凝土弹性-徐变状态统一计算理论

金问鲁 著
劳远昌 审

中 国 铁 道 出 版 社
1990年·北京

内 容 提 要

本书作者金问鲁同志根据固体力学的基本理论，将预应力混凝土看成混凝土和预应力钢索的复合材料，提出了严谨的预应力混凝土弹性-徐变状态统一计算理论。这个理论以及数值方法考虑了预应力构件的水平变位和垂直变位，可以统一地求解弹性和弹-徐性问题，解决了当前通用方法计算所得结果存在较大误差的问题。书中分别对预应力混凝土梁板对应于有粘结和无粘结两种情况推导了理论并做了例题。在附录中介绍了弹性变分原理和弹-徐状态变分原理的Laplace变换形式，提供了徐变度C_1的决定方法，扁壳的基本原理和有限元构式以及非线性弹-徐理论的导引。本书可供土木建筑设计人员、科研人员及大专院校师生参考。

预应力混凝土弹性-徐变状态统一计算理论

金问鲁 著

劳远昌 审

中国铁道出版社出版

（北京市东单三条14号）

责任编辑 刘启山 封面设计 王毓平

中国铁道出版社发行 各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：850×1168mm $\frac{1}{32}$ 印张：9.75 字数：257 千

1990年12月 第1版 第1次印刷

印数：1—3000 册

ISBN 7-113-00912-3/TU·202 定价：8.10元

前　言

从20世纪50年代以来，预应力混凝土技术有了很大的发展。

水泥工业和混凝土工艺以及高强度钢冶炼技术的进步，是促进预应力混凝土发展的重要因素。高标号混凝土和高强钢材保证了足够的预应力。当前轻质高强混凝土的发展更开拓了预应力混凝土的应用范围。

预应力混凝土的优点在于强度较高，从而减轻了结构自重，而且构件经常处于压力状态，不出现裂缝，钢材和混凝土都具有较好的耐久性。对于大跨结构，由于普通钢筋混凝土要求体型过大而无法实现，只有采用预应力混凝土，从而显示了它的特殊优越性。由于预应力混凝土构件一般具有足够的保护层，所以防火能力并不降低。

在结构型式上预应力混凝土的应用也有很多发展。初期阶段预应力混凝土只用在简支或悬臂式的静定梁，后来发展到连续梁，当前预应力混凝土已广泛地应用于刚架以及平板、薄壳等空间结构。

由于电子计算机的发展，结构的计算理论和计算方法有了巨大进步，表现在准确化和精密化；可以算得局部的应力分布，从而给予合理的构造处理。

从力学观点看来，预应力混凝土的计算理论应当建立在混凝土和钢筋作为复合材料的基础上。预应力使混凝土处于压力状态，可以看成弹性-徐变材料，这是很早就建立的公认概念。但是如何应用弹-徐性复合材料理论构成结构系统的数理方程和边界条件，作者未见到有关这方面的系统论著。当前，预应力混凝土仍是按弹性问题计算，有两种方法：第一种是将预应力混凝土看成一般的钢筋混凝土，如果已知预应力筋的张力，则可用静力学

方法求得梁截面的应力分布；第二种是林同炎（T.Y.Lin）提出的荷载平衡法[1]。林同炎是预应力混凝土界的先驱，这个方法的提出开拓了预应力混凝土在连续梁和平板等领域的应用，获得了巨大的经济效益。这个方法在预应力混凝土理论上有重大突破，已将预应力混凝土看成预应力筋和混凝土的组合结构，引用了悬索静力学。如所周知，对于单索，如果索的下垂形状和荷载分布为已知时，则可求出索的水平张力。必须指出，索的形状和荷载分布相互关连，而非相互独立。相反地说，如果已知索的形状和水平张力则可求得索在各点的垂直荷载密度。在预应力混凝土构件中按如上方法所求出的垂直荷载应当是混凝土施加于预应力筋的内力。按静力学原理，预应力筋对混凝土作用着大小相等、方向相反的向上垂直反力，林同炎称它为平衡荷载。将平衡荷载结合外载可按一般力学方法求出构件的内力。

以上两种方法中都是假设预加应力钢筋的水平张力是已知的，而且沿整个预应力筋长度，钢筋的水平张力不变。这个假设只符合于预加应力时的初始状态，这时预应力筋的水平张力是已知的，并设索道摩阻力很小，则全段水平张力可以看成常数。一般在初始施加预应力时外载仅有自重。在改变荷载时预应力同时改变，当预应力筋和周围混凝土之间存在足够的粘着力保证钢筋和混凝土在接触面上变形一致，则沿着预应力筋长度水平张力将逐点变化。其次，以上两种方法仅作静力学的考虑，不考虑混凝土和钢筋的变形，不能精确地用来分析超静定结构。但是第二种方法较第一种方法有巨大的改进，主要是将预应力混凝土看成预应力筋和混凝土的组合结构。本书沿用这个观点，又引入了精密的悬索变形理论。

在本书中要建立关于预应力混凝土准确的弹性理论。预应力混凝土是两种材料——预应力钢筋（索）和混凝土的组合结构。在弹性理论中，两种材料都看作是弹性的。按照不同的预应力工艺，在本书中提出两种理论，第一种适用于预应力筋和混凝土具有充分粘结的情况，第二种适用于无粘结的情况。两种理论的共

同假设是：混凝土梁、板、壳的变位和内力可按通常的梁、板、壳的弹性理论计算，预应力筋（索）的变位和内力可按悬挂结构中的单索或索网的理论计算[2][3][4]。这两种理论的不同在于混凝土和预应力筋之间具有不同的变形协调条件。第一种情况中假设沿预应力筋长度各点的垂直变位和水平变位分别与邻接的混凝土相应变位相等，当荷载改变时，预应力改变量也逐点变化。第二种情况中假设沿预应力筋长度各点的垂直变位与邻接混凝土的垂直变位相等，但在水平变位中并无约束，仅须假定在预应力筋的锚固处钢筋和混凝土的垂直、水平变位都相等。注意在预应力混凝土结构计算中必须同时考虑结构的水平变位和垂直变位。

注意，在悬索理论中首先要确定一个初始态，其中预应力筋的曲线形状和张力是已知的，通过基本方程和初始态比较可以求得加荷状态的变位和内力。为了准确决定各种荷载状态的内力，首先必须准确确定初始态时预应力筋的张力。由于以后张拉的预应力筋会影响先前张拉的预应力筋的张力，所以分批张拉预应力筋时采取对每批施行分级张拉的办法是比较适宜的。

徐变是混凝土的一个重要性质，由于徐变使混凝土在受压时逐渐压缩，促使预应力筋的张力逐渐降低，减少了使用时期的安全度。但是徐变作用相当于使混凝土的弹性模量趋于降低，因而由于基础变形和温度变化在预应力混凝土结构中产生的内力实际上要远较由弹性理论算得的为小。为了深刻了解预应力混凝土结构的性质，必须掌握混凝土的徐变理论。在五十年代已有不少有关混凝土徐变的试验报告和论文，其中有代表性的是阿鲁秋宁（Н.Х.Арутюнян）的弹性徐变理论[5]。在一般应力情况，徐变应变和应力之间是线性关系，当应力大时呈现非线性关系。在本书中只考虑线性弹性徐变理论。关于徐变理论研究时间过程问题，Laplace变换是很有效的数学工具。类似于弹性理论中的能量变分原理，本书著者曾提出弹性-徐变性理论中能量变分原理的Laplace变换形式[6]，利用它可将预应力混凝土的弹性理论和弹性-徐变性理论作统一处理，容易求出长久时期的内力和变位。

在本书中也考虑了收缩和温度所产生的内力。

当前的徐变理论中虽然对混凝土的本构性质（变形-内力关系）作了较深入的研究，但是和预应力混凝土的弹性理论相同，着重研究在一个梁截面中内力和变位随时间变化的规律，假设在整个时间过程中弯矩保持不变。这一假定仅在静定梁系统是正确的，所以可以断言：当前流行的徐变理论没有能力分析超静定结构或板、壳系统。

本书提供的理论以及数值方法考虑了预应力构件的水平变位和垂直变位，可以统一地求解弹性和弹-徐性问题。新的理论至少有以下两个优点：1. 由此导出的计算方法可以应用到任何超静定梁或板、壳结构，这正是当前预应力混凝土结构理论所缺少的，因而可以拓广预应力混凝土的使用范围。2. 新的理论可以促进我们对预应力混凝土各种结构增强了解，甚至可以纠正长期建立的笼统概念。例如在规范中所提到的预应力损失，经常认为沿预应力筋全长应力损失值是常数，事实并非如此，在弹性阶段增加荷载时常常造成预应力增加，而非应力减少；在徐变阶段简支梁中预应力筋跨中的应力损失经常较支座附近为小，在将来的规范中徐变度C_1和收缩系数S_0可能是更重要的指标。

在本书中分别对预应力混凝土梁、板对应于有粘结和无粘结两种情况推导了理论并作了例题。在附录中介绍了弹性变分原理和弹、徐状态变分原理的Laplace变换形式，提供了徐变度C_1的决定方法、扁壳的基本原理和有限元构式以及非线性弹、徐理论的导引。

本书第一章综合地叙述了预应力混凝土的弹、徐性质，在以下四章中分别对混凝土和预应力索之间粘结力存在与否，对梁和板作了详细的理论推导，对梁采用三次变位曲线的协同模型，对板分别采用了三角形混杂模型和矩形拟协调模型，并作了例题。在附录四、五中分别对预应力混凝土扁壳和柱壳采用薄壳单元进行了公式推导。附录一中陈述了徐变度C_1的决定方法，附录二中陈述了弹性力学的变分原理。其中单索和索网的变分原理是著者

目　录

第一章 预应力混凝土的弹性-徐变性质

一、材 料

预应力混凝土所采用的混凝土和预应力钢筋都需要具有较高的强度。例如，当水泥的标号为600号时，混凝土的强度一般用30～40MPa。强度过低将造成过大的应力损失，以及粘结力过低或不能承担锚具附近的局部压应力和拉应力，因而不能发挥预应力混凝土的效用。混凝土强度过高时将使造价过分昂贵。混凝土的水灰比一般不大于0.45。按照不同的震捣条件，坍落度用2到10 cm。混凝土的弯曲抗压和抗拉标准强度分别为26～35MPa和2.1～2.55MPa，弹性模量为3×10^4～3.3×10^4MPa。

预应力混凝土所用预应力筋为高强钢材，一般采用如下三种形式之一：钢丝、钢铰线或粗钢筋。高强钢材一般是高碳钢，或在钢中加入锰、硅等合金元素。另一种方法是将现有钢丝或钢筋通过冷拔或冷拉提高其强度。冷拉Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ级钢筋的标准强度各为450、530和750MPa，冷拔低碳钢丝的标准强度为550～750MPa。钢材的弹性模量为1.8×10^5MPa。

二、施 工 方 法

施加预应力可以用千斤顶张拉，或采用自应力水泥浇捣混凝土，当混凝土膨胀时使内部钢筋受拉，从而使混凝土承受压力。也可以用电热法使钢筋伸长，承受张力，它的反作用力压缩混凝土使混凝土得到预应力。按照预应力筋张拉时间，是在混凝土浇筑之前或浇筑之后，分别称为先张法或后张法。先张法一般不设端锚，依靠钢筋和混凝土的粘着力传递预应力，后张法可设置端

锚或不设端锚，但在施工阶段总要设临时锚具。预应力钢筋和混凝土的关系可以是有粘结的，也可以是无粘结的。先张法施工依靠粘结传递预应力，肯定是有粘结的。后张法的预留管道中通过灌浆可使预应力筋和混凝土粘结，也可在预应力筋周围涂油或裹以塑性材料，防止钢筋和混凝土的粘结。无粘结情况总是设置端锚，由端锚传递预应力。

事实上，预应力混凝土的预加应力方式是多种形式的。广义地说，任何一种悬挂结构和混凝土结合时都可看成预应力混凝土，例如斜拉桥的斜拉索使混凝土桥面承受着预加压力。在当前的筒壳、扁壳等修建中也存在着多种预应力方式。

三、预应力混凝土弹性-徐变性质的本构关系

在工作荷载下的预应力混凝土中，钢材处于弹性范畴，混凝土除了弹性性质外，还有徐变性质。考虑徐变有多种理论，而以阿鲁秋宁的弹性徐变理论比较细致和妥当。他所采用的应变-应力关系可以写为：

$$e(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_1}^{t} f[\sigma(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\eta(t,\tau)d\tau \tag{1—1}$$

式中$e(t)$是t时刻的应变；$\sigma(t)$是t时刻的应力；$f[\sigma(t)]$是应力$\sigma(t)$的函数，一般表示成应力和应变的如下非线性关系：

$$f(\sigma)=\sigma+\beta\sigma^2 \tag{1—2}$$

当应力较小时，应力与应变是线性关系，此时$\beta=0$，（1—2）式成为：

$$f(\sigma)=\sigma \tag{1—3}$$

t_1是施加荷载时混凝土的龄期。$\eta(t,\tau)$是在τ时刻施加单位应力$\sigma=1$在t时刻产生的应变。$\eta(t,\tau)$包含弹性应变$1/E(\tau)$和徐变应变$C(t,\tau)$，$C(t,\tau)$又称为徐变度。$C(t,\tau)$和加荷时间长短（$t-\tau$）以及加荷时龄期τ有关，可表示如下：

$$\eta(t,\tau)=\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)$$

$$=\frac{1}{E(\tau)}+\psi(\tau)f(t-\tau)$$

$$=\frac{1}{E(\tau)}+\left(\frac{A}{\tau}+C\right)(1-e^{-r(t-\tau)})$$

（1—4）

如果$E(\tau)=E$（常数），$\Psi(\tau)$近似地为一个常数C_1，即$C(t,\tau)=C_1[1-e^{-r(t-\tau)}]$；且设应变、应力间呈线性关系，并取$\tau=0$，则可将（1—1）式改写为：

$$e(t)=\frac{\sigma(t)}{E}+rC_1\int_0^t\sigma(\tau)e^{-r(t-\tau)}d\tau \quad (1-5)$$

（1—1）式和（1—5）表征混凝土的应变和应力关系，即混凝土的本构关系。（1—1）式较为复杂，但是为了实用起见，可按上述考虑，将（1—1）式简化为（1—5）式。著者推导了寻求（1—5）式中C_1的简化公式并作了详细例题，见附录一。由于（1—5）式形式简单，本书将采用它作为一个基本公式。

四、混凝土的收缩和温度应变

在预应力混凝土中由于混凝土的收缩所造成的预应力损失和收缩的影响不容忽视。温度变化主要有两种：一种是短期的周期变化，如昼夜的温度差，这种变化幅度不大，产生的变形属于弹性性质。另一种是长期的周期变化，如季节的温度差，这种变化幅度较大，变形显著地属于弹-徐性质。考虑弹-徐性质计算所得的应力要远较弹性理论算得的数值为小，这说明为什么在一些混凝土结构中，较大的温差实际上并未造成裂缝。地基的固结沉降也是长期现象，考虑到弹-徐性质后，不均匀沉降应力远较按弹性状态求得的为小，这也说明徐变理论的实际重要意义。温度应变e_T和收缩应变e_S均为时间和空间坐标的函数。设在预应力混凝土中某个固定空间坐标点在时刻$t=0$时温度为T_0，时刻t时温度为T_t，则温度增量为：

$$\Delta T = T_t - T_0 \qquad (1-6)$$

温度应变为：

$$e_t = \alpha \Delta T = \alpha(T_t - T_0) \qquad (1-7)$$

今设温度T是时间 t 的周期函数：

$$T_t = a\sin\omega(t_0 + t) + C \qquad (1-8a)$$

在上式中：$\omega = \frac{2\pi}{365}$，$a = T_{max} - T_{min}$，$T_{max}$和$T_{min}$各为 当地最高和最低温度；$C$为全年的平均温度；$\omega$、$a$、$C$都是已知值。仅有$t_0$是待定值。如图 1 — 1，并用（1—8$a$）式可见，当$t=0$时

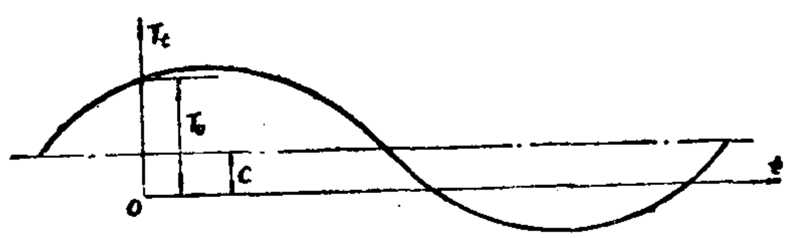

图 1 — 1　全年温度变化曲线

有$T_0 = a\sin\omega t_0 + C$，由此得 $t_0 = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{T_0 - C}{a}\right)$。

则有：

$$\Delta T = T_t - T_0 = a[\sin\omega(t_0 + t) - \sin\omega t_0] \qquad (1-8b)$$

$$e_t = \alpha\Delta T = \alpha a[\sin\omega(t_0 + t) - \sin\omega t_0] \qquad (1-9)$$

混凝土的线膨胀系数是$\alpha = 0.000012$。设混凝土的最终收 缩应变为S_0，则t时刻的收缩应变可认为是：

$$e_S = S_0(1 - e^{-st}) \qquad (1-10)$$

但是收缩应变和混凝土的龄期有关，设在施加预应力时混凝土的龄期为τ_1，则在时刻（$t + \tau_1$）时混凝土的相对收缩量为：

$$e_S = S_0(e^{-s\tau_1} - e^{-s(t+\tau_1)})$$

$$\doteq S_0 e^{-s\tau_1}(1 - e^{-st})$$

如以施加应力的时刻τ_1作为时间的起点，令：

$$S_{0\tau}=S_0 e^{-s\tau_1} \tag{1—11a}$$

则在 t 时刻的收缩应变为：

$$e_S=S_{0\tau}(1-e^{-st}) \tag{1—11b}$$

一般有：$S_{0\tau}<S_0$，所以对龄期较大的混凝土施加预应力将产生较小的收缩预应力损失。在（1—10）式中，S_0一般采用 2×10^{-4}，$S=0.0085$。由于当混凝土不受约束时温度应变和收缩应变不产生应力，所以混凝土的弹-徐性质本构关系式（1—5）式可以改写为：

$$e(t)-e_t(t)-e_s(t)=\frac{\sigma(t)}{E}+\gamma C_1\int_0^t\sigma(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau \tag{1—12}$$

参考文献

〔1〕T.Y.Lin, Ned H.Burns, John Wiley& Sons, Design of Prestressed Concrete Structures, 3rd edition, 1981。

〔2〕金问鲁，悬挂结构计算。中国建筑工业出版社，1975。

〔3〕金问鲁，悬挂结构的计算理论（普遍变分原理的广泛应用），浙江科学技术出版社，1981，8。

〔4〕金问鲁，索网的普遍变分原理及其应用，建筑结构学报，第2卷第1期，1981，2，PP21—39。

〔5〕Н.Х. Арутюнян, Некоторые, Вопросы Теории Ползучести, Москва, 1952。

〔6〕金问鲁，弹、粘性体动力学变分原理的Laplace变换形式、有限元构式及数值方法，应用数学和力学，第5卷第6期，1984,11,pp841—847。

〔7〕Kyuichiro Washizu, Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd edition, Pergamon Press, 1975。

〔8〕钱伟长，变分法及有限元，上册，科学出版社。

〔9〕金问鲁，用谱分解法对结构动力学的有限元法计算（单元动力性质矩阵的构式），英文稿载于国际有限元法论文集，1982，上海。

〔10〕金问鲁，Laplace变换形式变分原理，有限元构式，数值分析法，应用数学和力学，1984，6期。

第二章　预应力混凝土梁弹性-徐变状态统一计算理论

（混凝土和预应力钢筋间充分粘结情况）

在当前预应力混凝土设计中，虽然在施加预应力阶段考虑由于混凝土压缩导致的预应力钢筋的内力变化，但是在施加预应力后由于荷载的变化或活荷载会引起预应力梁的弯曲，这弯曲会使预应力筋的曲线产生变形，同样会导致预应力钢筋的内力变化。要计算这个变化量必须将预应力混凝土看成预应力钢筋和混凝土的复合结构，考虑钢筋和混凝土的相互作用，而且在考虑这相互作用时不能仅考虑一个截面，必须考虑截面之间的影响。据作者所知，当前尚无适当的计算理论和相应公式。同样对于连续梁或框架一类超静定结构，由于预应力混凝土是具有弹性-徐变性质的复合结构，这种杆件的刚度矩阵和普通弹性材料杆件的刚度矩阵必然不同。在以往的文献中也未看到计算弹性-徐变复合结构刚度矩阵的理论和方法，从而对这类超静定结构不能进行准确计算。由于这些问题，使得我们很难对一个预应力混凝土结构具有全面、准确的认识。近20年来由于电子计算机的发展使得计算力学有了长足进步。作者认为，如何利用计算结构力学的成果，提出预应力混凝土计算的新理论、新方法，进一步了解预应力混凝土结构的性质和促进其发展，乃是一个重要的课题。本章是为这个目的服务。首先建立了力学模型的变分原理，其次按照有限元法推导了单元刚度矩阵，最后作了例题。本章仅采用了如下基本假定：1． 梁的平截面假定；2． 预应力混凝土是索和混凝土的组合结构；3． 索和混凝土之间有充分粘结保证变形一致。弹性理论和徐变理论获得统一表示。本章仅考虑了梁理论，至于板与壳理论

将在以下各章中考虑。

一、预应力混凝土梁的变分原理

1. 弹性理论

严格地说，预应力混凝土应当看作钢索和混凝土的组合结构，本章只考虑梁。索和梁的变形见图2—1。作如下假定：梁的变形按照一般梁理论，梁和索之间具有充分的粘结力使它们在接触点处变形一致。在梁和索之间不存在粘结力的情况，另在第四章中考虑。

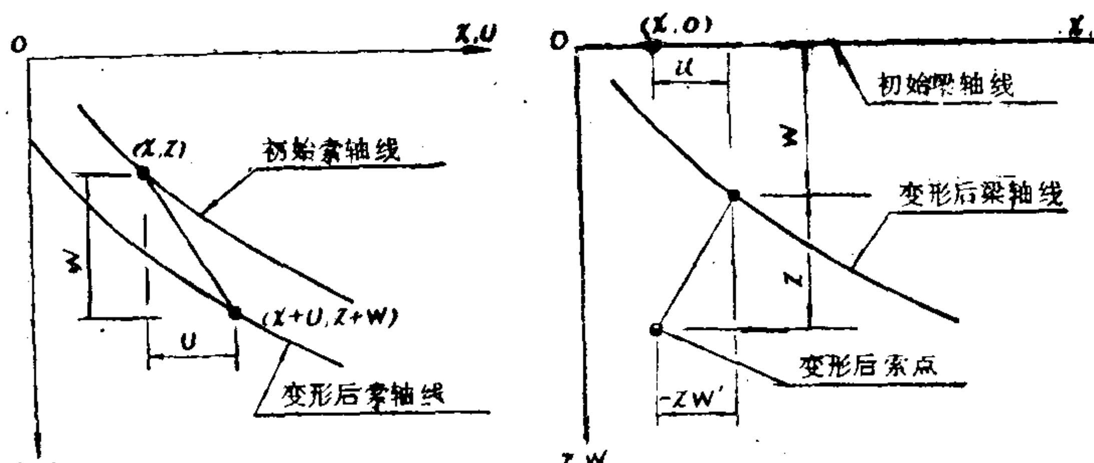

图2—1 索和梁的变形

(a) 索的变形 (b) 梁的变形

考虑预应力混凝土梁是初应力问题，应变能密度A是相应的索应变能、混凝土梁弯曲和轴力应变能的和：

$$A=\frac{1}{2}(E_s a_s f^2\cos^3\phi_0+2H_0 f)+\frac{1}{2}(EI\kappa^2+2M_0\kappa)$$
$$+\frac{1}{2}(Eae^2+2N_0 e) \qquad (2-1)$$

式中H_0是索的初始水平张力，M_0和N_0各为梁的初始弯矩和初始轴力(以张力为正)，f是索的广义应变[1]，[2]，κ是梁的弯曲应变，e是梁的拉应变。E_s和E分别为钢索和混凝土的弹性模量。a_s、a和I分别为钢索截面积，混凝土梁截面积和惯性矩，ϕ_0表示初始状态时索上某点处索的切线和x轴之间的夹角。如图2—1，以

u、w表示梁轴线上一点的水平变位和垂直变位，U、W表示索上一点的相应变位，z表示索点和梁轴线的垂直距离，H、N、M表示相应的变形后内力，则索和梁变位的协调关系为：

$$U=u-zw'、W=w \tag{2—2}$$

今以p表示斜率$\tan\phi_0$：

$$p=\tan\phi_0=\frac{dz}{dx} \tag{2—3}$$

索的应变-变位关系：

$$\begin{aligned} f&=\frac{dU}{dx}+p\frac{dW}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 \\ &=\frac{du}{dx}-\frac{d(zw')}{dx}+p\frac{dw}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \\ &=\frac{du}{dx}-z\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \end{aligned} \tag{2—4}$$

索的内力-应变关系：

$$H-H_0=E_sa_sf\cos^3\phi_0 \tag{2—5}$$

上式的推导见文献〔1〕。

梁的弯曲应变和拉应变：

$$\kappa=-\frac{d^2w}{dx^2},\qquad e=\frac{du}{dx} \tag{2—6}$$

梁内力-应变关系：

$$N-N_0=Eae,\ M-M_0=EI\kappa \tag{2—7}$$

如果所选变位函数w适合指定的边界条件，则总能量泛函为：

$$\begin{aligned} \Pi_1&=\int[A(e,f,\kappa)-(qu+rw)]dx \\ &-\int\left\{\left[f-\left(\frac{du}{dx}-z\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)\right]H\right. \\ &\left.+\left(\kappa+\frac{d^2w}{dx^2}\right)M+\left(e-\frac{du}{dx}\right)N\right\}dx \\ &-\left[\overline{R}w+\overline{Q}u-\overline{M}\frac{dw}{dx}\right]_{力边界} \end{aligned} \tag{2—8}$$

在上式中，$\overline{R}$、$\overline{Q}$和$\overline{M}$各为边界上所给定的垂直外力、水平外力和外力矩；$\overline{R}$以向下为正，$\overline{Q}$以向右为正，$\overline{M}$以逆时针方向旋转为

正。变分原理要求：

$$\delta \Pi_1 = 0 \tag{2-9}$$

将（2—8）式对8个变量进行变分，考虑到，

$$\delta A = (E_s a_s f \cos^3\phi_0 + H_0)\delta f + (EI\kappa + M_0)\delta\kappa + (Eae + N_0)\delta e$$

并且经过分部积分得：

$$\begin{aligned}\delta \Pi_1 = \int\Big\{&(E_s a_s f\cos^3\phi_0 + H_0 - H)\delta f + (EI\kappa + M_0 - M)\delta\kappa + (Eae + N_0 - N)\delta e \\ &- \Big[f - \Big(\frac{du}{dx} - z\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2}\Big(\frac{dw}{dx}\Big)^2\Big)\Big]\delta H \\ &- \Big(\kappa + \frac{d^2w}{dx^2}\Big)\delta M - \Big(e - \frac{du}{dx}\Big)\delta N \\ &- \Big(\frac{dH}{dx} + \frac{dN}{dx} + q\Big)\delta u - \Big(\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{d^2(zH)}{dx^2} \\ &+ \frac{d}{dx}\Big(H\frac{dw}{dx}\Big) + r\Big)\delta w\Big\}dx \\ &+ \Big\{\Big[\pm(H+N) - \overline{Q}\Big]\delta u + \Big[\pm\Big(\frac{dM}{dx} + \frac{d(zH)}{dx} \\ &+ H\frac{dw}{dx}\Big) - \overline{R}\Big]\delta w + \Big[\overline{M} \mp (M \\ &+ zH)\Big]\delta\frac{dw}{dx}\Big\}_{\text{力边界}} = 0\end{aligned} \tag{2-10}$$

在上式的积分中，使δf、$\delta\kappa$、δe的系数为零，分别得到内力-应变条件；δH、δM、δN的系数为零，分别得到各应变-变位条件；δu、δw的系数为零，分别得到平衡方程。使力边界项中δu、δw，$\delta\dfrac{dw}{dx}$的系数为零，可得各力边界条件。由此可见，从变分原理可得全部控制方程。

以下说明当前常用的预应力混凝土弹性理论计算方法仅是本章方法的一个特例。如果略去u的导数以及w的导数的平方项的影响，则有：