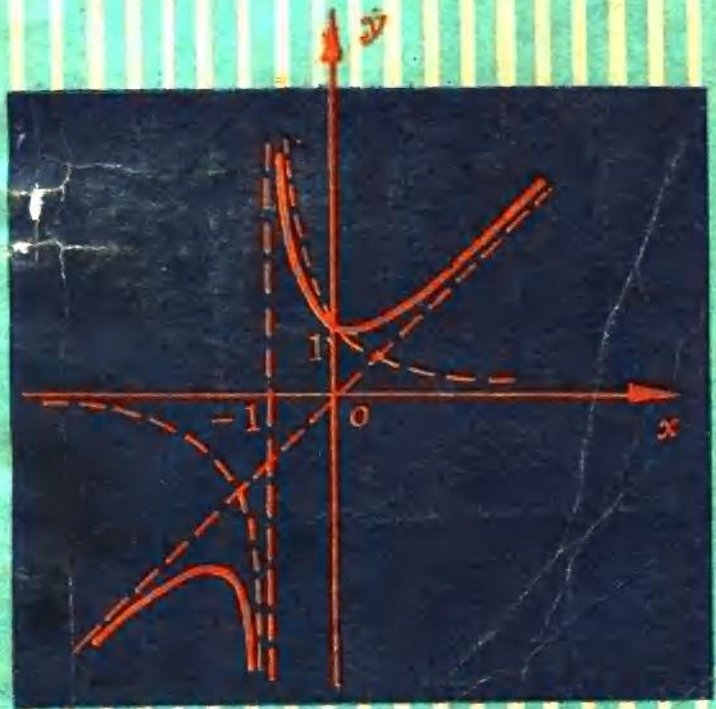
中等专业学校

微积分
解题思路与方法



中等专业学校

微积分解题思路与方法

贵州省中专数学教研会　编写

贵州人民出版社

封面设计 胡朝惠
技术设计 夏 夜

中 等 专 业 学 校
微积分解题思路与方法
贵州省中专数学教研会 编写
贵州人民出版社出版发行
（贵阳市延安中路5号）
贵州新华印刷二厂印刷 贵州省新华书店经销
787×1092毫米 32开本 20.5印张 440千字
1987年3月第1版 1987年3月第1次印刷
印数 1 6,500
书号 7115·945 定价 3.60 元

前　言

近年来，在校际教研活动中，我们深感中专学生缺乏课外读物。同时，随着教育体制的改革，刊授中专、电视中专也在陆续兴办。为了给这一层读者提供学习参考书，我会组织部分教师编写了这本《中等专业学校微积分解题思路与方法》。

本书分六章：函数极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程。包含了工科类中专《高等数学》（公共部分）的全部内容，例题的选配还兼顾财经、农牧等非工科专业的需要。全书选配例题约600道，深度与广度按工科类中专数学教学大纲要求安排。为开阔思路和延拓知识面，每章适当选入少量综合性和技巧性较强、难度较大的题目，供学有余力的读者研习。

本书编写过程中，得到贵州省教育厅职业技术教育处和省数学会的鼓励与支持。贵州师范大学数学系陈信传副教授审阅了初稿，提出了极为宝贵的意见，谨致诚挚的感谢。

参加本书编写的有：省煤炭工业学校程世清、邱惠红（第一章），省水利电力学校滕保华、徐君显、张宝元（第二、三章），省财政学校陈慕兰、省冶金学校曾宪林（第四

章），省建筑工程学校孙立绪、陈金能、武淑娜（第五、六章）。孙立绪、程世清负责全稿的整理。贵州建设银行干校王季权、省畜牧兽医学校谭政柄参加了编写体例的讨论。

为促进教研工作，提高教学质量，请读者不吝指教。

贵州省中专数学教研会

1985年8月15日

目　　录

第一章　函数极限与连续

§1-1　函　　数

“函数”是微积分最基本的研究对象．本节主要研究如下几个问题：

一、函数概念．

二、函数的特性．

三、函数的运算．

四、函数的作图．

一、函数的概念

1．定义

如果对于数集A的每一个数x，按某对应法则或规律f，数集B中有唯一确定的数y与之对应，则称f是确定在A上的函数，记为

$$f: A \to B \text{或} A \xrightarrow{f} B,$$

其中A称为函数f的定义域，与任一数$x_0\in A$所对应的数$y_0\in B$，记为$f(x_0)$，称为f在x_0的函数值．全体函数值所组成的集合

$$f(A)=\{y\,|y=f(x),x\in A\}$$

称为函数f的值域．

如果把x和y分别作为在数集A与B中取值的变量，则函数f也可记为

$$y=f(x),\quad x\in A,$$

其中x称为函数f的自变量，y称为函数f的因变量．有时也说$f(x)$为x的函数．

2．确定函数的要素

（1）定义域（即自变量的取值范围）；

（2）对应法则（即自变量与因变量之间的对应法则）也称对应规律．

3．函数的解析表示法

用数学公式表示函数的对应法则的方法，称为函数的解析表示法（也叫公式法）．解析法是微积分中最常用的一种函数表示法．如下两点应予注意：

（1）有时一个函数是由几个解析式子表示的，即在其定义域的不同部分用不同的解析式表示．这种形式的函数称为分段函数．

（2）如果一个函数只由一个解析式表示，而又没有明确指出函数的定义域，则该函数的定义域应理解为：在实数范围内使此解析式有意义的自变量能取的值的全体．这时，

函数的定义域也称为函数的自然存在域.

1.1 下列各题中的$f(x)$与$g(x)$是否表示同一个函数?为什么?

(1) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$;

(2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$;

(3) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;

(4) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x(x-1)}$;

(5) $f(x)=\arccos x$, $g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$.

分析 由确定函数的两要素知:两个函数相同,是指它们的定义域相同,对应法则也相同.对应法则相同是指对于同一自变量x的值,所对应的函数值y相同,而解析式在形式上不一定相同.因此,判定$f(x)$与$g(x)$是否表示同一函数,就是判定它们的定义域与对应法则是否完全一致.

解 (1) $f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$,$g(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$,并且对于任一$x\in(-\infty, +\infty)$,有

$$g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x=f(x),$$

故$f(x)$与$g(x)$表示同一函数.

(2) $f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$,$g(x)$的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$,且

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

$$g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

它们的定义域和对应法则都不一致，故$f(x)$与$g(x)$不表示同一函数。

（3）$f(x)$的定义域为$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，$g(x)$的定义域为$(0,\ +\infty)$。它们的定义域不同，故$f(x)$与$g(x)$不表示同一函数。

（4）$f(x)$的定义域为$[1,\ +\infty)$，$g(x)$的定义域为$(-\infty,\ 0]\cup[1,\ +\infty)$.它们的定义域不同，故$f(x)$与$g(x)$不表示同一函数。

（5）$f(x)$的定义域为$[-1,\ 1]$，$g(x)$的定义域为$[-1,\ 1]$，并且对于任一$x\in[-1,\ 1]$，有

$$g(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin x=\arccos x=f(x),$$

故$f(x)$与$g(x)$表示同一函数。

1.2 求下列函数的定义域：

（1）　$y=(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$；

（2）　$y=\arccos(1-x)+\lg(\lg x)$；

（3）　$y=\sqrt[4]{\log_a \sin x},(a>0,a\neq 1)$.

解　（1）由于$x-2$对一切实数都有意义，函数定义域取决于$\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$中x的取值范围．要使$\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$有意义，必须$\dfrac{x+1}{1-x}\geqslant 0$.此不等式的解为$-1\leqslant x<1$,故$y=(x-2)\cdot\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$的定义域为$[-1,\ 1)$.

（2）当$\arccos(1-x)$与$\lg(\lg x)$同时有意义时，函数才有定义，即自变量x的取值应满足下列不等式组：

$$\begin{cases} -1\leqslant 1-x\leqslant 1, \cdots\cdots① \\ \lg x>0 . \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

由①式得 $0\leqslant x\leqslant 2$。由②式得 $x>1$。这两组解的公共部分为 $1<x\leqslant 2$，故函数$y=\arccos(1-x)+\lg(\lg x)$的定义域为$(1, 2]$。

（3）要使$\sqrt{\log_a \sin x}$（$a>0$，$a\neq 1$）有意义，必须$\log_a \sin x\geqslant 0$，且$\sin x>0$，即自变量x的取值范围应满足下列不等式组：

$$\begin{cases} \log_a \sin x\geqslant 0 , \cdots\cdots① \\ \sin x>0 . \cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

①式中$\sin x$的取值范围由a的取值决定，分两种情况讨论：

（i）$a>1$时，$\sin x\geqslant 1$，只能取$\sin x=1$。此时结合②式 $\sin x>0$，得 $\sin x=1$，$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即$y=\sqrt{\log_a \sin x}$($a>1$)的定义域为一些孤立的点$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$($k\in J$)。

(ii) $0<a<1$时，$0<\sin x\leqslant 1$，这已包含②式的要求，得 $2k\pi<x<2k\pi+\pi$，即$y=\sqrt{\log_a \sin x}$($0<a<1$)的定义域为$(2k\pi, (2k+1)\pi)$，($k\in J$)。

由本题知：根据函数解析式确定函数定义域以五种基本初等函数的定义域为基础，并注意下列各点：

① 偶次方根的根底式不小于零；

② 分式的分母不等于零；

③ 若函数式中含有几种不同的运算时，其定义域是分别使各种运算都有意义的 x 的取值范围的公共部分；

④解析式中含表示常数的字母，且字母的取值影响定义域时，要就字母取值的不同情况加以讨论。

1.3 若$f(x-1)=x^2$，证明 $f(x+1)=(x+2)^2$。

分析 $f(x-1)$是以（$x-1$）为自变量的函数。已知$f(x-1)=x^2$，并未用（$x-1$）的式子表示$f(x-1)$，即如何根据 $x-1$ 的值来计算函数值的对应法则 f 尚未明确。因此，证明的关键在于明确对应法则 f。可通过下列办法达到这一目的。

① 设 $x-1=t$，有 $x=t+1$，代入原式两边，得出用 t 表示的函数式$f(t)$；

② 将x^2变形，用 $x-1$ 的式子表出。

但是，如果将$f(x-1)=x^2$理解为$f[(\quad)-1]=(\quad)^2$，则对应法则 f 是明确的，只需将 $f(x+1)$表为 $f[(\quad)-1]$即可。

由上分析，可得三种证法。

证一 设 $x-1=t$，有 $x=t+1$，代入已知等式两边，得 $f(t)=(t+1)^2$，故

$$f(x+1)=[(x+1)+1]^2=(x+2)^2.$$

证二 由 $f(x-1)=x^2=(x-1)^2+2(x-1)+1$，有

$$f(x+1)=(x+1)^2+2(x+1)+1=(x+2)^2.$$

证三 由 $f(x-1)=x^2$，即$f[(\quad)-1]=(\quad)^2$，有

$$f(x+1)=f[(x+2)-1]=(x+2)^2.$$

1.4 已知 $\varphi(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$, 证明

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

证 证右边 = 左边.

$$\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=\lg\frac{1-\dfrac{x+y}{1+xy}}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}=\lg\frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}=$$

$$=\lg\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}=\lg\frac{1-x}{1+x}+\lg\frac{1-y}{1+y}$$

$$=\varphi(x)+\varphi(y).$$

故
$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

本题也可证左边 = 右边，或证左、右同时等于第三式.

1.5 设：$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 称为双曲正弦函数； $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 称为双曲余弦函数； $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$称为双曲正切函数. 证明：

（1） $\mathrm{ch}(x_1\pm x_2)=\mathrm{ch}x_1\mathrm{ch}x_2\pm\mathrm{sh}x_1\mathrm{sh}x_2$；

（2） $\mathrm{sh}(x_1\pm x_2)=\mathrm{sh}x_1\mathrm{ch}x_2\pm\mathrm{ch}x_1\mathrm{sh}x_2$；

（3） $\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$；

（4） $\operatorname{th}2x=\dfrac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$；

（5） $\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch}x}{2}}$；

（6） $(\operatorname{ch}x\pm\operatorname{sh}x)^n=\operatorname{ch}nx\pm\operatorname{sh}nx$。

证 （1） 证右边＝左边。

$$\operatorname{ch}x_1\operatorname{ch}x_2\pm\operatorname{sh}x_1\operatorname{sh}x_2$$

$$=\frac{e^{x_1}+e^{-x_1}}{2}\cdot\frac{e^{x_2}+e^{-x_2}}{2}\pm\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}\cdot\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2}$$

$$=\frac{e^{x_1+x_2}+e^{-x_1+x_2}+e^{x_1-x_2}+e^{-x_1-x_2}}{4}$$

$$\pm\frac{e^{x_1+x_2}-e^{-x_1+x_2}-e^{x_1-x_2}+e^{-x_1-x_2}}{4}$$

$$=\frac{e^{x_1\pm x_2}+e^{-(x_1\pm x_2)}}{2}=\operatorname{ch}(x_1\pm x_2),$$

即 $$\operatorname{ch}(x_1\pm x_2)=\operatorname{ch}x_1\operatorname{ch}x_2\pm\operatorname{sh}x_1\operatorname{sh}x_2.$$

本题还可用如下方法证明：

由双曲正弦、余弦函数定义，得

$$e^x=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x,\quad e^{-x}=\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x.$$

从而 $$\operatorname{ch}(x_1+x_2)=\frac{e^{x_1+x_2}+e^{-(x_1+x_2)}}{2}=\frac{1}{2}(e^{x_2}\cdot e^{x_1}+e^{-x_1}\cdot e^{-x_2})$$

$$=\frac{1}{2}[(\operatorname{ch}x_1+\operatorname{sh}x_1)(\operatorname{ch}x_2+\operatorname{sh}x_2)+(\operatorname{ch}x_1-\operatorname{sh}x_1)(\operatorname{ch}x_2-\operatorname{sh}x_2)]$$

$$=\operatorname{ch}x_1\operatorname{ch}x_2+\operatorname{sh}x_1\operatorname{sh}x_2,$$

即 $\qquad \mathrm{ch}(x_1+x_2)=\mathrm{ch}x_1\,\mathrm{ch}x_2+\mathrm{sh}x_1\,\mathrm{sh}x_2$.

（2）仿（1）亦可得两种证法．请读者自己证明．

（3）证左边＝右边．

$$\mathrm{sh}2x=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=2\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x,$$

即 $\qquad \mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$.

（4）证右边＝左边．

$$\frac{2\mathrm{th}x}{1+\mathrm{th}^2x}=\frac{2\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1+\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2}=\frac{2(e^x-e^{-x})\ (e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2}$$

$$=\frac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{e^{2x}+2+e^{-2x}+e^{2x}-2+e^{-2x}}=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$$

$$=\mathrm{th}2x,$$

即 $$\mathrm{th}2x=\frac{2\mathrm{th}x}{1+\mathrm{th}^2x}.$$

（5）证左边＝右边．

$$\mathrm{ch}\frac{x}{2}=\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}=\sqrt{\frac{(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2}{4}}=\sqrt{\frac{e^x+2+e^{-x}}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}x}{2}},$$