国外计算机科学教材系列

离散数学

（第4版）

Discrete Mathematics

（Fourth Edition）

Richard Johnsonbaugh 著

王孝喜 邵秀丽 朱思俞 等译

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

PRENTICE HALL 出版公司

国外计算机科学教材系列

离散数学

第4版

Discrete Mathematics

(Fourth Edition)

Richard Johnsonbaugh 著

王孝喜　邵秀丽　朱思俞　等 译

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 提 要

离散数学是现代数学的一个重要分支和计算机科学基础理论的核心课程，它充分描述了计算机科学离散性的特点，是随着计算机科学的发展而逐步建立起来的新兴的基础性学科。

本书作为离散数学的基本教材，把握关键问题并以全新的编排方式通过精选的大量实例深入浅出地介绍了数理逻辑、组合算法、图论、布尔代数、网络模型、形式语言与自动机理论等与计算机科学密切相关的前沿课题，既着重于各部分内容之间的紧密联系，又深入探讨各部分内容的概念、理论、算法和实际应用，内容叙述严谨，推演详尽。各章节配有相当数量的习题与书后的提示和答案为读者迅速掌握有关知识提供有效帮助。

本书内容丰富、全面系统、结构清晰、通俗易懂、注重实用，既可作为计算机科学和计算数学等专业的本科生和研究生的教科书，又可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/王孝喜等译. -4版. -北京:电子工业出版社,1999.10

书名原文:Discrete Mathematics

ISBN 7-5053-5490-6

Ⅰ.离… Ⅱ.王… Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 64008 号

丛 书 名:国外计算机科学教材系列

书　　名:**离散数学(第 4 版)**

原 书 名:Discrete Mathematics(Fourth Edition)

著　　者:[美] Richard Johnsonbaugh

译　　者:王孝喜　邵秀丽　朱思俞　等

责任编辑:宋杏珍

印 刷 者:北京科技印刷厂印刷

出版发行:电子工业出版社　URL:http://www.phei.com.cn

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036

经　　销:各地新华书店

开　　本:787×1092 1/16　印张:43.25　字数:1040 千字

版　　次:1999 年 11 月第 1 版　1999 年 11 月第 1 次印刷

印　　数:5000 册

书　　号:ISBN 7-5053-5490-6/TP·2772

定　　价:66.00 元

著作权合同登记号　图字:01-1999-3177

出版说明

计算机科学的迅速发展是20世纪科学发展史上最伟大的事件之一。从1946年第一台笨重而体积庞大的计算机的发明至今,仅仅半个多世纪,计算机已经变得小巧无比却又能力非凡。它的应用已经渗透到了社会的各个方面,成为当今所谓的信息社会的最显著的特征。

处于世纪之交科技进步的大潮中,我国正在加强计算机科学的高等教育,着眼于为下一世纪培养高素质的计算机人才,以适应信息社会加速度发展的需要。当前,全国各类高等院校已经或计划在各专业基础课程规划中增加计算机科学的课程内容,而作为与计算机科学密切相关的计算机、通信、信息等专业,更是在酝酿着教学的全面革新,以期规划出一整套面向21世纪的、具有中国高校计算机教育特色的课程计划和教材体系。值此,我们不妨借鉴并引进国外具有先进性、实用性和权威性的大学计算机教材,洋为中用,以更好地服务于国内的高校教育。

美国Prentice Hall出版公司是享誉世界的高校教材出版商,自1913年公司成立以来,即致力于教育图书的出版。它所出版的计算机教材在美国为众多大学所采用,其中有不少是专业领域中的经典名著。许多蜚声世界的教授学者成为该公司的资深作者,如:道格拉斯·科默(Douglas Comer),安德鲁·坦尼伯姆(Andrew Tanenbaum),威廉·斯大林(William Stallings)……几十年来,他们的著作教育了一批批不同肤色的莘莘学子,使这些教材同时也成为全人类的共同财富。

为了保证本系列教材翻译出版的质量,电子工业出版社和Prentice Hall出版公司共同约请北京地区的清华大学、北京大学、北京航空航天大学,上海地区的上海交通大学、复旦大学,南京地区的南京大学、解放军通信工程学院等全国著名的高等院校的教学第一线的几十位教师参加翻译工作。这中间有正在讲授同类教材的年轻教师和博士,有积累了几十年教学经验的教授和博士生导师,还有我国著名的计算机科学家。他们的辛勤劳动保证了本系列丛书得以高质量地出版面世。

如此大规模地引进计算机科学系列教材,在我们还是第一次。除缺乏经验之外,还由于我们对计算机科学的发展,对中国高校计算机教育特点认识的不足,致使在选题确定、翻译、出版等工作中,肯定存在许多遗憾和不足之处,恳请广大师生和其他读者提出批评、建议。

电子工业出版社
URL:http://www.phei.com.cn
Prentice Hall 出版公司
URL:http://www.prenhall.com

译者序言

本书是一本能扩展学生的数学知识和抽象能力的关于离散数学的入门教材。

离散数学是现代数学的一个重要分支,它充分描述了计算机科学离散性的特点,是计算机科学的数学基础,是计算机专业必修的专业基础课。

本书是一本非常有特点的教材。首先,其内容就和现在国内使用的一般离散数学教程有相当大的不同:例如,本书增加了许多新内容,如网络模型、计算几何和公用密钥加密算法、铺瓦问题等,在国内的离散数学教材中基本还没有见过;本书中加入的算法、组合数学、自动机和形式语言等内容也较少见。而国内讲授的一些内容,如代数系统、半群和群等,本书中则完全没有。本书的内容考虑 ACM 和 IEEE 建议的离散数学课程大纲(见作者序言)且和我们现行的内容差别不小,所以是很值得参考的。

其次,本书力求把握与计算机科学密切相关的问题,以全新的编排方式通过精选的大量实例深入浅出地介绍了数理逻辑、组合算法、图论、布尔代数、网络模型、形式语言与自动机理论等与计算机科学密切相关的前沿课题,既着重于各部分内容之间的紧密联系,又深入探讨各部分内容的概念、理论、算法和实际应用,内容叙述严谨,推演详尽。

和一般的教材相比,本书的特点还有:着重于各部分内容之间的相互关系,有关算法及算法分析贯穿于本书的各个章节,仔细阅读每个算法并在条件允许的情况下实践一下有关习题对弄懂基本概念和掌握有关算法将会收益匪浅;着重便于阅读和自学,大多数的证明都用有注解的图来帮助解释,有大量验证过的例题分布于本书的各处;着重于理论和实际的结合以及系统模型和应用的关系,注重实用,特别是计算机科学方面的应用;分布于各章的问题求解之角指导学生如何分析问题和解决问题;各章的小结对有关理论和算法的产生和发展进行了综述,并提供了进一步阅读的建议;有大量的习题(共约 2400 个)且部分习题在书后还有提示和答案,为读者迅速掌握有关知识提供有效的帮助。因而本书既有深度,又有广度,相信阅读本书既能培养逻辑思维能力,又能培养理论联系实际的扎实功底。

因此,本书既可作为计算机科学和计算数学等专业的本科生和研究生的教科书,又可作为工程技术人员的参考书。

本书主要由王孝喜、邵秀丽和朱思俞联合翻译,参加本书部分章节翻译和录入工作的还有刘建中、李勇建、罗艳、朱逢、王新宇、刘秋兰、赵捷、刘伟等。由王孝喜和朱思俞对全部译文进行了校对整理和统--风格。在全书的翻译过程中,得到了南开大学计算机与系统科学系许多老师和同学的热情帮助与支持,陈有祺老师和刘璟老师参加了多次讨论,对译文的组织和某些词语的敲定提供了宝贵的建议和改进意见,特别是刘瑞挺老师给予很多具体的指导和热情的鼓励,在此一并致谢。

由于译者水平有限和时间仓促,错误和不当之处实难避免,恳请广大读者特别是同行专家批评指正。

1999 年 5 月

于南开大学

前　言

本书的目的是作为一或二个学期离散数学的入门教材。只需要最少的数学预备知识，不需要微积分。计算机方面的预备知识也不需要。本书包括例、习题、图、表、问题求解的段落、小结及章的复习，还有自测题，帮助读者掌握离散数学的入门知识。此外，同一家出版社还有一本教师指导，可以选用。

概　述

在二十世纪八十年代的早期，基本上没有合适的离散数学入门教材。当时，需要有一本教材，能扩展学生的数学知识和抽象能力，并包括有用的内容如组合，算法和图。本书的原始版本(1984 年)就考虑了这种需要。适用于不同对象(包括数学和计算机专业)的离散数学课程被许多组织认可。MAA(美国数学学会)的一个分部认可一个一年长的离散数学课程。IEEE(电气和电子工程师协会)的教育分部建议了一个新生的数学课。ACM(美国计算机学会)和 IEEE 认可了一个离散数学课程的方针。本书的这一版，像以前各版一样，包括了这些组织认可的内容，如算法、组合、集合、函数和数学归纳法。它也着重于理解和进行证明，一般地，扩展读者数学的成熟性。

关于本书

本书内容包括：

·逻辑(包括量词)，证明，归结证明和数学归纳法(第 1 章)。

·集合，序列，串，以及和、积的记法，数字系统，关系和函数，包括目的明确的例子如偏序应用于任务安排(2.4 节)，关系数据库(2.7 节)，和散列函数的入门(2.8 节)。

·关于算法，递归算法和算法分析的深入讨论(第 3 章)。此外，算法的方法贯穿于全书中。算法是用伪代码，以灵活的方式写出(本书不需计算机的预备知识，使用的伪代码在本书中自己描述)。书中的算法包括求最大公约数的欧几里德算法(3.3 节)，铺瓦(3.4 节)，RSA 公共密钥加密算法(3.7 节)，产生组合和排列(4.3 节)，合并分类(5.3 节)，Dijkstra 的最短路径算法(6.4 节)，回溯算法(7.3 节)，广度优先和深度优先搜索(7.3 节)，树的遍历(7.6 节)，对一个游戏树求值(7.9 节)，在一个网络中求最大流(8.2 节)，求一个点的最小对(11.1 节)，和计算凸壳(11.3 节)。

·关于“大 O”的完全的讨论，函数生长的 Ω 和 Θ 记号(3.5 节)。有了所有的这些记号，关于函数的生长和算法的复杂性就可以给出精确的陈述。

·组合，排列和鸽洞原理(抽屉原理)(第 4 章)。

·递归关系及其在算法分析中的应用(第 5 章)。

·图，包括了并行计算机的图模型，骑士的旅行问题，哈米尔顿回路，图的同构和平面图

(第 6 章)。定理 6.4.3 给出 Dijkstra 算法正确性的一个简短、清楚的证明。

·树,包括二叉树,树的遍历,最小生成树,决策树,分类的最小时间,和树的同构(第 7 章)。

·最大流算法,匹配和 Petri 网(第 8 章)。

·布尔代数,着重布尔代数和组合线路的关系(第 9 章)。

·自动机,着重模型和应用(第 10 章)。SR 触发器线路在例 10.1.11 中讨论。分形,包括 VonKoch 雪花,由特种文法来描述(例 10.3.19)。

·计算几何导论(第 11 章)。

·关于矩阵的附录。

·特别着重于各部分内容之间的相互关系。例如,数学归纳法和递归算法有密切关系(3.6 节);菲波那契级数用于欧几里德算法的分析(3.6 节);本书的许多习题需要数学归纳法;我们示出如何用定义结点集合的一个等价关系来描述图的组成部分(见例 6.2.13 后面的讨论);还有求 n 个结点的二叉树的个数(定理 7.8.12)。

·特别着重于阅读和进行证明。大多数的证明都用有注解的图来帮助解释。一些分离的节,称为问题求解之角,教给学生如何进行解题和证明。

·有大量验证过的例题分布于本书的各处(多于 430 个例题)。

·大量的应用,特别是计算机科学方面的应用。

·将近 2400 个习题,约三分之一在书的后面有答案(书中带 * 的习题在书的后面有答案)。

·小结一节中有进一步阅读的建议。

·每章有本章的复习。

·每章有自测题(均有答案在书的后面)。

·有超过 100 个参考文献。

·书后面综合了本书使用的数学和算法符号。

与第 3 版的不同

·加入了 11 个问题求解之角的小节。这些小节教给学生如何分析、解决问题和进行证明。

·归结证明是新的 1.5 节的内容。该方法容易自动化,因此对人工智能是重要的,一般地,此方法能帮助学生深入逻辑,特别是有助于阅读和构造证明。

·加入了关于二进制和 16 进制数的一节(2.3 节)。引入了二进制和 16 进制数,讨论了各种数制之间的转换。包括各种数制下的算术运算。

·新的 3.7 节的内容是 RSA 公共密钥加密算法,其名称来自其三个发明人:Ronald L.Rivest,Adi Shamir 和 Leonard M.Adelman 名字的缩写。在 RSA 系统中,每个参与者的一个密钥是公开的,另一个则不公开。欲发送一个信息,要在公开的表中找到接收人的密钥,接收人用不公开的密钥对信息进行解密。

·增加了一些图来对定理的证明进行图解。现在所有的图都有说明,这些说明给出了证明的进一步的解释,并使能更深入地理解证明。

·在参考文献中增加了一些新的书和文章。
·例题的数目增加到超过 430 个。
·习题的数量增加到约 2400 个。
·建立了一个万维网的站点，对本书提供最新的技术支持。

章的结构

每章的组成如下：
. 概述
. 节
. 节的习题
. 节
. 节的习题
…
. 小结
. 复习
. 自测题

小结的一节中包括进一步阅读的建议。复习中有该章关键概念的参考列表。自测题中，对每节有四个练习，书后均有答案。此外，大多数的章中有问题求解之角。

习题

本书有约 2400 个习题。比平均水平更具有挑战性的习题用★号标志。有 * 号的习题(约占总量的 1/3)表示该题在书的后面有提示。其他习题的解在教师指导一书中。少量习题明白地标明需要微积分。本书的主体不需要微积分的概念，因此，除了这些标明的习题，作其他习题并不需要微积分。定理证明的结尾用符号■标志。

例

本书包括超过 430 个例题，这些例子教给学生如何抓住离散数学的问题，演示理论的应用，使证明更清晰，有助于进一步掌握内容。例题的结尾用□符号标志。

问题求解之角

新的问题求解之角帮助学生分析和解决问题并教给他们如何进行证明。采用了非正式的风格，在讨论问题主题的小节之后，是一个自含的小节。不是简单地给出一个问题的解或证明，而是示出解决一个问题的不同方法，讨论在试图得到一个问题的解时，该作些什么，还有要给出解题和证明的技巧。

每个问题求解之角由问题的陈述开始，之后讨论分析问题的方法。其后就是找出提供解的技巧。当找到一个解以后，给出正式的解来示出如何正确地写出形式化的解。最后，总结本节所使用的问题求解技术。除此之外，有些节的末尾还有一个注释段，讨论本问题与数

学和计算机的其他问题的联系，进一步理解本问题的意义，并列出本问题进一步阅读的参考文献。

教师的参考

本出版社还有一本“教师指导”，对采用本书的教师是很有用的。其中包含了本书中未列出解的习题的解法、计算机练习和幻灯片的素材。在该书中有超过 100 个计算机练习。需要“教师指导”一书的任课教师可联络本地 Prentice Hall 公司的代表。

（使用本书中文版作为教材的授课教师，请与 Prentice Hell 公司北京代表处联络，电子邮件地址：ssbj@bupt.edu.cn　通讯地址：北京[100081]海淀西三环北路外研社大厦 2205 室。）

WWW 站点

有一个 WWW 站点 http://condor.depaul.edu/~rjohnson，包含关于本书的信息，有计算机程序，幻灯片，计算机练习，一个产生各种随机图形的程序，和一个勘误表。

感谢

我从许多人那里得到有益的意见，这些人包括 Gary Andrus, Robert Busby, David G. Canter, Tim Caroll, Joseph P. Chen, Hon-Wing Cheng, Robert Crawford, Henry D'Angelo, Jerry Delazzer, Br. Michal Driscoll, Carl E. Eckberg, Susanna Epp, Gerald Gordon, Jerrold Grossman, Mark Hebster, Steve Jost, Nicholas Krier, Warren Krueger, Glenn Lancaster, Donald E. G. Malm, Kevin Phelps, James H. Stoddard, Michel Sullivan, Edward J. Williams 和 Hanyi Zhang。

这一版要特别感谢的人有 Martin Kalin，他提出了关于新的问题求解之角和归结证明的意见；GregoryBrewster 和 I-Ping Chu，作了网络中关于流的讨论；Gregory Bachelis，校阅了 RSA 加密系统的内容；还有 Sam Stueckle，东北大学；Towanna Roller，阿斯伯理学院；Feng-Eng Lin，乔治．梅森大学；Gordon D. Prichett，巴伯森学院；和 Donald Bein，费尔莱·狄克森大学，校阅了本版的手稿。

我非常感激 Helmet Epp，德·波尔大学计算机学院通讯和信息系统的主任，提供时间和鼓励以发展本书和它以前的各版。

我从 Printice Hall 出版社的全体人员得到了始终不渝的支持。还要特别感谢执行编辑 George Lobell 和产品主管 Nicholas Romanelli 的帮助。

第 1 章　逻辑和证明

逻辑是研究推理的，它特别着重于推理过程是否正确。它不是研究某个特定的语句是否正确，而是着重于语句之间的关系。例如，考虑下列语句：

所有数学家都穿凉鞋。

任何穿凉鞋的人都是代数学家。

因此，所有的数学家都是代数学家。

从技术上来说，要单独确定这些语句中的某一句是否正确，逻辑并没有用。但是，如果前两个语句为真，逻辑可以肯定第三个语句。

因此，所有的数学家都是代数学家。

也是正确的。

逻辑方法在数学中用于定理证明，在计算机科学中，用来证明程序是在作它应该作的事情。在本章的后面，将讨论一些证明的一般方法，其中之一是数学归纳法，它广泛用于数学和计算机科学中。数学归纳法对离散数学特别有用。

1.1　命题

下面的语句中，哪一个是真的或者假的(但不能二者都是)？

(a)能整除 7 的整数只有 1 和 7 本身。

(b)阿尔弗雷德·希区柯克在 1940 年因指导吕贝卡得到一个奥斯卡学院奖。

(c)对于每一个正整数 n，存在一个大于 n 的素数。

(d)在宇宙中，地球是唯一有生命的星球。

(e)买两张星期五的摇滚音乐会的票。

语句(a)是真的。对于一个大于 1 的整数 n，如果它只能被 1 和 n 本身整除，我们称之为**素数**。语句(a)是说 7 是素数的另一种方法。

语句(b)是假的。虽然吕贝卡在 1940 年得到奥斯卡最佳图像奖，但约翰·福特因导演“愤怒的葡萄”而得到最佳导演奖。令人惊奇的是，阿尔弗雷德·希区柯克从未得过奥斯卡最佳导演奖。

语句(c)是真的，它是存在无穷素数系列的另一种说法。

语句(d)是真或假之一(但不是既真又假)，但现在没有人知道是哪个。

语句(e)既不是真，也不是假(它是命令语句)。

一个语句，如果它或是真的，或是假的(但不是既真又假)，称为一个**命题**。语句(a) - (d)是命题，而语句(e)则不是。一般来说，命题是一个陈述语句(而不是问题，命令句等)。命题是任何逻辑理论的基本构造模块。

我们将用小写拉丁字母，如 p，q 和 r，来表示命题。我们也要用下面的符号：

p：$1+1=3$

来表示 p 是命题 $1+1=3$。

在日常的语言和文章中，我们用一些连接词如"并且"(and)，"或"(or)等来连接命题。例如，命题"天正在下雨"和"我要拿雨伞"可以合成一个单一的命题"天正在下雨并且我要拿雨伞"。and 和 or 的正式定义如下：

定义 1.1.1

令 p 和 q 是命题。

p 和 q 的合取，表为 $p \wedge q$，就是连接词

p and q.

p 和 q 的析取，表为 $p \vee q$，就是连接词

p *or* q.

把命题合并而得到的命题，如 $p \wedge q$，$p \vee q$，称为**复合命题**。

例 1.1.2

如

p：$1+1=3$，

q：一个世纪是一百年，

则 p 和 q 的合取是

$p \wedge q$：$1+1=3$ 并且一个世纪是一百年。

p 和 q 的析取是

$p \vee q$：$1+1=3$ 或者一个世纪是一百年。 □

析取和合取命题的真值可用**真值表**来表示。一个命题 P 的真值表是，其每个个别的命题 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$ 取所有可能的值，在每一个组合下列出 P 的真值。用 T 表示真，F 表示假。

定义 1.1.3

复合命题 $p \wedge q$ 的真值由下列的真值表表示：

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

注意在上表中，给出了 p 和 q 的所有可能的 4 种组合。

定义 1.1.3 说明，只当 p 和 q 都为真时，$p \wedge q$ 为真；其他情况下 $p \wedge q$ 都为假。

例 1.1.4

如

p：$1+1=3$，

q:一个世纪是一百年,

则 p 为假,q 为真,其合取

$p \wedge q$:$1+1=3$ 并且一个世纪是一百年

为假。 □

例 1.1.5

如

p:本尼·古德曼录制了古典音乐,

q:巴尔的摩的奥里奥尔家就是圣路易斯的布朗家。

则 p 和 q 都为真。虽然本尼·古德曼最知名的是其爵士乐的录音,但他的确录制了许多古典音乐(如威伯的单簧管协奏曲 1 号和 2 号,和芝加哥管弦乐团)。圣路易斯的布朗家在 1954 年搬到巴尔的摩,并改名为奥里奥尔。其合取

$p \wedge q$:本尼·古德曼录制了古典音乐并且

巴尔的摩的奥里奥尔家就是圣路易斯的布朗家

为真。 □

例 1.1.6

如

p:$1+1=3$,

q:明尼阿波利斯是明尼苏达的首府,

则 p 和 q 皆为假,合取

$p \wedge q$:$1+1=3$ 并且明尼阿波利斯是明尼苏达的首府

为假。 □

定义 1.1.7

复合命题 $p \vee q$ 的真值由下面的真值表定义

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

析取 $p \vee q$ 中的或(or),其意义是可兼或即 $p \vee q$ 当 p 或 q 之一为真或二者皆为真时,其值为真,仅当 p,q 皆为假时才为假。还有一个不可兼或(见习题 31),也称**异或**,exor,xor。当 p 或 q 之一为真(不是 p,q 皆为真)时,p exor q 为真。

例 1.1.8

如

$p:1+1=3$,

q:一个世纪是一百年,

则 p 为假,q 为真,其析取

$p \vee q:1+1=3$ 或者一个世纪是一百年

为真。 □

例 1.1.9

如

p:本尼·古德曼录制了古典音乐,

q:巴尔的摩的奥里奥尔家就是圣路易斯的布朗家。

则 p 和 q 皆为真,其析取

$p \vee q$:本尼·古德曼录制了古典音乐或者

巴尔的摩的奥里奥尔家就是圣路易斯的布朗家

也为真。 □

例 1.1.10

如

$p:1+1=3$,

q:明尼阿波利斯是明尼苏达的首府,

则 p 和 q 皆为假,析取

$p \vee q:1+1=3$ 或者明尼阿波利斯是明尼苏达的首府

为假。 □

本节中讨论的对命题 p 的最后一个操作是 p 的**否定**。

定义 1.1.11

p 的否定,表为 $\overline{p}$,是命题

not p.

其真值表如下

p	$\overline{p}$
T	F
F	T

例 1.1.12

如

p:加里·格兰特在"后窗"中扮演了角色,

则 p 的否定是命题

$\overline{p}$:说加里·格兰特在"后窗"中扮演了角色是不对的。

因为 p 为假,$\overline{p}$ 为真。(詹姆士·斯图尔特是"后窗"的男主角)p 的否定一般写为:

加里·格兰特在“后窗”中没有扮演角色 □

例 1.1.13

令

p:布莱斯·帕斯卡发明了一些计算机器,

q:第一个全电子数字计算机是在20世纪建造的,

r:π 在1954年已计算到十进制一百万位。

用符号形式表述下面的命题,并确定其为真或假。

或者布莱斯·帕斯卡发明了一些计算机器并且

第一个全电子数字计算机不是在20世纪建造的,

或者 π 在1954年已计算到十进制一百万位。

上述命题可用符号形式表示如下:

$$(p\wedge \overline{q})\vee r$$

我们首先注意 p and q 为真,且 r 为假(π 在1973年才计算到十进制一百万位,此后已计算到超过二十亿位)。如果我们把每个符号用其真值代替,可得

$$\begin{aligned}(p\wedge \overline{q})\vee r &= (\mathrm{T}\wedge \overline{\mathrm{T}})\vee \mathrm{F}\\ &= (\mathrm{T}\wedge \mathrm{F})\vee \mathrm{F}\\ &= \mathrm{F}\vee \mathrm{F}\\ &= \mathrm{F}\end{aligned}$$

因此,上述命题为假。 □

习 题

确定习题1-8中的语句是否命题。如语句是命题,写出其否定(此处并未问是命题的语句是否为真)。

*1. $2+5=19$

2. 侍者,上干果——我的意思是,给客人上干果。

3. 对于某个正整数 n,$19340=n\cdot 17$。

*4. 奥德雷·米度斯是“度蜜月的人们”中爱丽斯的原型。

5. 给我剥葡萄皮。

6. 台词“再演奏一次,山姆”出现在“卡萨布兰卡”中。

*7. 每个大于4的偶数是两个素数的和。

8. 两个素数的差。

对于习题9-14中的命题,求其真值。$p=\mathrm{F}, q=\mathrm{T}, r=\mathrm{F}$.

*9. $p\vee q$

10. $\overline{p}\vee \overline{q}$

11. $\overline{p}\vee q$

*12. $\overline{p}\vee \overline{(q\wedge r)}$

13. $\overline{(p\vee q)}\vee(\overline{p}\vee r)$

14. $(p \vee \overline{r}) \wedge (q \vee r) \vee \overline{(r \vee p)}$

对习题 15 – 22 中的每个命题,写出其真值表。

*15. $p \vee \overline{q}$

16. $(\overline{p} \vee \overline{q}) \vee p$

17. $(p \vee q) \wedge \overline{p}$

*18. $(p \wedge q) \wedge \overline{p}$

19. $(p \wedge q) \wedge (\overline{p} \vee p)$

20. $\overline{(p \wedge q)} \vee (r \wedge \overline{p})$

*21. $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$

22. $\overline{(p \wedge q)} \vee (\overline{q} \vee r)$

在习题 23 – 25 中,把给出的陈述用符号形式表示。令

p:5<9, q:9<7, r:5<7

确定每一个语句是真是假。

*23. 5<9 并且 9<7。

24. 并非(5<9 且 9<7)。

25. 5<9 或者(9<7 且 5<7)不对。

在习题 26 – 30 中,将符号表示写成文字形式。使用

p:**今天是星期一,**

q:**天正在下雨,**

r:**天气热。**

*26. $p \vee q$

27. $\overline{p} \wedge (q \vee r)$

28. $\overline{p \vee q} \wedge r$

*29. $(p \wedge q) \wedge \overline{(r \vee p)}$

30. $(p \wedge (q \vee r)) \wedge (r \vee (q \vee p))$

31. 对于 p 和 q 的不可兼或 p exor q,写出其真值表。它当 p 或 q 之一为真时,其值为真;但 p,q 都为真时其值为假。

*32. 有一段时间,下列法令在伊利诺州的纳帕维尔是有效的:"任何人,如在城市内,其财产中保有多于三只猫和三条狗是非法的"。查尔斯·马尔科有五条狗但没有猫,和此法令抵触吗?解释之。

注:用*号标明的习题,在本书的后面有其解法的提示。

1.2 条件命题和逻辑等价

系主任曾宣称:

如果数学系得到额外的2万元,它就要再聘用一个教员。 (1.2.1)

语句(1.2.1)说,在数学系得到额外2万元的条件下,它就要再聘用一个教员。像语句(1.2.1)这样的命题称为**条件命题**。

定义 1.2.1

如 p 和 q 都是命题,复合命题

如 p 则 q

称为条件命题,并表为

$$p \to q \tag{1.2.2}$$

命题 p 称为假设(或前件),命题 q 称为结论(或后件)。

例 1.2.2

如果我们定义

p:数学系得到额外2万元,

q:数学系再聘用一个新教员,

则语句(1.2.1)就是式(1.2.2)的形式。假设是“数学系得到额外2万元”,结论是“数学系再聘用一个新教员”。

一些语句不是式(1.2.2)的形式,可以重组表为条件语句,如下例所示。 □

例 1.2.3

把每个命题表述为式(1.2.2)条件命题的形式。

(a)玛丽将是一个好的大学生,如果她努力学习的话。

(b)约翰可以选微积分,仅当他有大学二,三或四年级学生的身份。

(c)当你唱时,我的耳朵受损。

(d)Cubs队要赢得总决赛,必要条件是他们必须签约一个右手的后备投手。

(e)拉尔夫访问加利福尼亚的一个必要条件是他去迪斯尼乐园。

(a)假设是“如果”后面的语句;所以一个等价的表述是

如果玛丽努力学习,她将是一个好的大学生。

(b)仅当语句是结论,即是

如 p 则 q

逻辑上和下面的形式一样

p 仅当 q。

因此,(b)的等价的表述为

如果约翰可以选微积分,那么他有大学二,三或四年级学生的身份。

(c)当和如果的作用相同,所以其等价表述为

如果你唱,那么我的耳朵受损。

(d)结论表示一个**必要条件**,所以一个等价的表述是

如果Cabs队赢了总决赛,那么他们签约了一个右手的后备投手。

(e)结论表示一个**充分条件**,所以一个等价的表述是

如果拉尔夫去迪斯尼乐园,那么他访问加利福尼亚。 □

考虑给系主任命题一个真值

如果数学系得到额外的 2 万元,它就要再聘用一个新教员。

此陈述只当假设“如果数学系得到额外的 2 万元”为真时,才会令人感兴趣。如它为真,就是如果数学系得到了额外的 2 万元,要是数学系再聘用一个新教员也为真,我们就认为系主任的言论为真。另一方面,如数学系得到额外的 2 万元为真,但数学系再聘用一个新教员为假,我们就认为系主任的言论为假。当假设为真,条件命题作为一个整体,其真值取决于结论的真值。一般来说,如假设 p 为真,条件命题 $p \to q$ 取决于 q,如 q 为真即为真;如 q 为假则为假。如假设 p 为假,直觉上可以知道的是,条件语句 $p \to q$ 的真值将不依赖于结论的真值。简单地由于数学系没有得到额外的 2 万元,我们将不会认为系主任的言论为假。无论如何,条件命题像其他命题一样,必须有真假值,即使前提为假也一样。根据标准的定义,当前提 p 为假时,$p \to q$ 为真。上面的讨论可以归结在下面的定义中。

定义 1.2.4

条件命题的真值由下面的真值表定义:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例 1.2.5

令

$p: 1 > 2$　　　　$q: 4 < 8$

则 p 为假而 q 为真,因此

$p \to q$ 为真,　　$q \to p$ 为假。 □

例 1.2.6

设 p 为真,q 为假,r 为真,求下面各命题的真假值。

(a) $(p \wedge q) \to r$

(b) $(p \vee q) \to \overline{r}$

(c) $p \wedge (q \to r)$

(d) $p \to (q \to r)$

我们把符号 p, q, r 用其真值代替,得出各命题的真值。

(a) $(\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}) \to \mathrm{T} = \mathrm{F} \to \mathrm{T} =$ 真

(b) $(\mathrm{T} \vee \mathrm{F}) \to \overline{\mathrm{T}} = \mathrm{T} \to \mathrm{F} =$ 假

(c) $\mathrm{T} \wedge (\mathrm{F} \to \mathrm{T}) = \mathrm{T} \wedge \mathrm{T} =$ 真

(d) $\mathrm{T} \to (\mathrm{F} \to \mathrm{T}) = \mathrm{T} \to \mathrm{T} =$ 真 □

在日常的语言中,条件命题的假设和结论一般是有关的,但在逻辑中,条件命题的假设和结论并不需要和同一个主题有关。例如在逻辑中,我们允许下面的命题: