



# 世纪之交话数学

齐民友 著

本书是作者多年从事数学教育工作的经验总结，也是作者对数学教育改革的思考。本书可作为中小学教师继续教育教材，也可供广大数学爱好者阅读。

进入21世纪的科学技术丛书

丛书主编 于光远

湖北教育出版社



进入 21 世纪的科学技术丛书

丛书主编 于光远

丛书副主编 王国政 夏立容 熊芳直

# 世纪之交话数学

齐民友 著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

世纪之交话数学/齐民友著. —武汉:湖北教育出版社,  
1999

(进入 21 世纪的科学技术丛书/于光远主编)

ISBN 7-5351-2624-3

I. 世… II. 齐… III. 数学-研究 IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 29090 号

出版:湖北教育出版社  
发行

武汉市青年路 277 号  
邮编:430015 电话:83625580

经销:新华书店

印刷:文字六〇三厂

(441021·襄樊市盛丰路 45 号)

开本:850mm×1168mm 1/32

8 插页 8.75 印张

版次:2000 年 1 月第 1 版

2000 年 1 月第 1 次印刷

字数:212 千字

印数:1—3 000

ISBN 7—5351—2624—3/N·34

定价:15.50 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

HK76/19

# 当代的文明是以科学为中心的文明

(代 序)

19世纪是古典的资本主义在征服世界的道路上取得辉煌胜利,也是它的内部矛盾进一步显露出来、从而作为学说和运动的社会主义兴起的时代。19世纪末出现了自由资本主义向垄断资本主义、私人资本主义向社会资本主义转变的趋势。20世纪前半世纪是战争与革命的时期。两次世界大战,战后都诞生了新的社会主义国家。社会主义从学说和运动发展成为在地球这个星球上的一种制度和发展起来的文化。资本主义国家与社会主义国家并存。20世纪的后半世纪,我想称之为世界历史大调整时期。这是我对当前时代特征的回答。资本主义国家在调整,社会主义国家在调整(改革),国与国之间的关系在调整。这种调整不是一次完成的,会有多次调整,而且会有经常性的即不断发生的小调整。调整时期不会短,有可能整个21世纪都属于这个调整时期。但在世界史上它毕竟带有某种过渡性质,这个时期过后的资本主义国家不再是调整时期开始时的资本主义国家,那时的社会主义国家也不再是调整时期开始时的社会主义国家;那

时的国际关系也不是调整时期开始时的国际关系。调整时期的产生有客观的原因,对历史的演变发生过重要作用的组织和人物的行为也起了一定的作用。这样的世界历史大调整时期的出现,有其必然性。历史的发展不会是笔直的。20世纪末的变化曲折应该说是很大的,世界历史上出现的调整不是一般的而是大调整。

历史进入和走出这个调整时期,总的来说它意味着人类历史的一种前进。调整时期的质的规定性有待于进一步明确。它的发展规律也有待于探索。

在即将来临的21世纪,世界自然科学技术可以预计会有更大的发展。20世纪末在科学技术上所取得的成果,包括20世纪提出而尚未解决的课题,将是新世纪更高发展的坚实基础。

即将过去的20世纪和正在来临的21世纪,都是世界历史文明特别迅速发展的时期。不同时期文明发展的速度,正如恩格斯在《自然辩证法》中指出的那样,同它距人类社会开始时候之间的时距长短的平方成比例。在20世纪的历史舞台上有过许许多多有声有色的演出,甚至还有狂风骤雨的时候,但是生产力的发展毕竟是社会发展的基础。在历史的长河中每时每刻的进步是在“看不见”“听无声”(唐刘长卿诗:细雨湿衣看不见,闲花落地听无声)的情况下实现的。时代的特征不应该从时代的哲学而应该从时代的经济学中寻找。当代的文明是以科学为中心的文明。即将成为过去的20世纪,在社会的物质

生活——包括物质资料的生产和流通,也包括人的消费生活和社会对它的服务——依靠科学和根据科学原理而形成的技术取得的进步,是符合这个数学公式的。20世纪人类发展的文明中自然科学和技术的发展是最令人瞩目的。

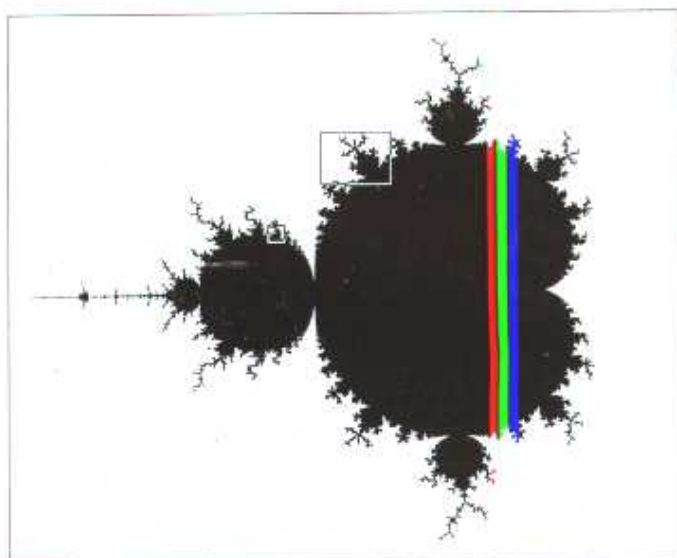
中国有善于吸收并发展外来文明的优秀传统,如:佛之于唐,科学启蒙之于明末,马克思主义之于“五四”,现代市场经济之于今日等。日本和其他东亚国家也有此特点。牛顿花不少时间获得的对二项式定理的发现,今天的初中生用一堂课的时间就可以学会。当然,我们也是善于创造而且取得了许许多多伟大成果的民族,在向外来文明的学习中也有创造。我们走过的和正在走的道路是民族文化传统与现代科学技术相结合,创新与引进相结合。经过21世纪,再坚持几个世纪,以科学为中心的现代亚洲文明将居世界前列。

文明的对词是蒙昧与野蛮。人类历史经历了使用旧石器的蒙昧时期、使用新石器的野蛮时期,才进入文明社会。历史是有连续性的,文明社会中蒙昧与野蛮今日远未绝迹。奴隶社会、封建社会和资本主义社会初期不用说了,就是在20世纪,希特勒、日本军国主义者的野蛮行径仍记忆犹新。对于邪恶必须与之斗争,进行镇压。对邪恶宽容就是助长邪恶。现代蒙昧与现代野蛮这些概念是可以成立的。发展文明、建设文明,不能不与现代蒙昧和现代野蛮坚决斗争。人类的历史与生物进化的历史长度之

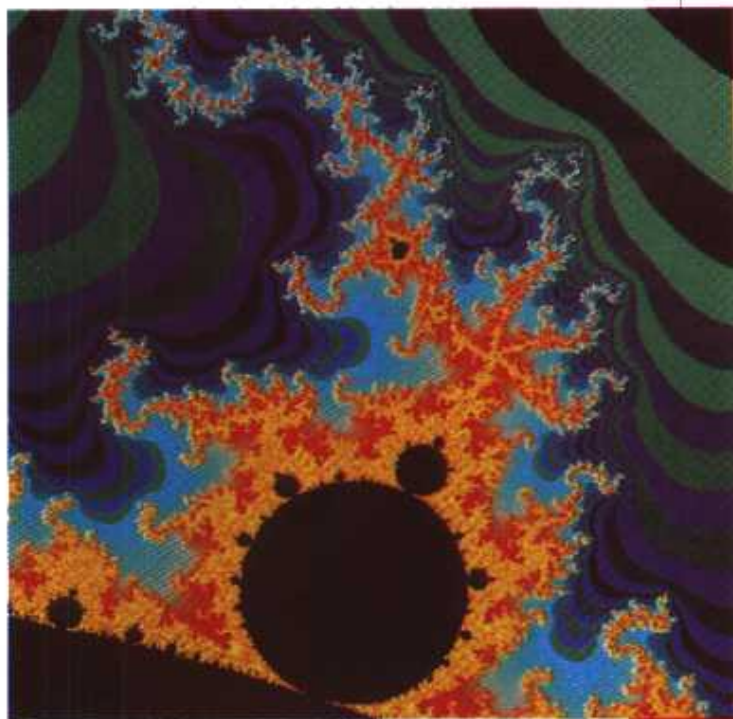
比只占千分之几,人类文明的历史与蒙昧野蛮的历史长度之比也仅有千分之几,蒙昧、野蛮不是短期内能够消除的,但应力争缩短现代蒙昧、现代野蛮存在的时间。要崇尚理性,坚持发展以科学为中心的文化,在科学中包括人文科学。不论迷信和蒙昧野蛮如何冒充科学的名义,但科学与伪科学之间的互相排斥是绝对的。科学越向前发展,伪科学越是陷入困境。在20世纪科学技术发展的基础上,21世纪的科学技术的进一步发展,就会迫使伪科学难售其奸,这也是必然的。

于光远

曼德耳布罗特集的细节。图  
(a)中的两个小方块，放大后  
就是(b)和(c)(第七章，图11)



(a)



(b)



(c)



# 目 录

<b>第一章</b>	<b>辉煌的历史,更辉煌的未来</b> .....	(1)
<b>第二章</b>	<b>最后的定理? 最后的证明?</b> .....	(22)
	附加的话 .....	(43)
<b>第三章</b>	<b>Down from the Grace</b> .....	(50)
	1. 从图灵谈起 .....	(51)
	2. 密码学的新时代 .....	(56)
	3. 素因子分解 .....	(64)
	4. “高处不胜寒” .....	(76)
<b>第四章</b>	<b>流体的数学</b> .....	(82)
	1. 什么是湍流 .....	(84)
	2. 计算流体力学 .....	(90)
	3. 孤立子和其它 .....	(100)
	附加的话 .....	(107)
<b>第五章</b>	<b>从物理学大师的反思谈起</b> .....	(109)
	1. 大师们的反思 .....	(109)
	2. 对称性 .....	(116)
	3. 规范场革命 .....	(122)
	4. 包罗万象的理论:TOE .....	(130)

---

附加的话	(133)
<b>第六章 生命科学与数学的新生机</b>	(134)
1. 生物群体的数量规律	(134)
2. “虫”口论	(143)
3. CT 与数学	(150)
4. 让 DNA 作计算	(160)
<b>第七章 非线性的世界、复杂的世界(一)</b>	(169)
1. 有没有混沌?	(169)
2. 能不能预报天气?	(172)
3. 无处不在的混沌	(177)
4. 分形	(184)
5. 来自经典数学	(190)
<b>第八章 非线性的世界、复杂的世界(二)</b>	(201)
1. 科学的新综合	(202)
2. 什么是复杂性?	(213)
3. 复杂性理论的一个例子 ——对生命现象的模拟	(218)
4. 听听反对意见	(226)
<b>第九章 根本在于教育</b>	(236)
1. 我国的数学发展处于什么水平?	(236)
2. 谈谈“转变观念”	(241)
3. 基础教育中的数学	(244)
4. 数学教学方法的研究	(251)
5. 少数优秀人才的培养	(255)
6. 专门数学人才的培养	(259)
后记	(265)
Contents	(268)

# 第一章 辉煌的历史,更辉煌的未来

## I

20 世纪带着它的辉煌历史即将过去。更加辉煌的 21 世纪正在向我们招手。20 世纪为什么这样辉煌? 21 世纪为什么会更加辉煌? 科学技术的作用是谁也不会否认的了。数学在这里起了什么作用? 数学是一切科学最重要的基础之一,将来势必会起更大的作用,看看它的昨天和今天,就谁也不会怀疑了。

在人类科学史上出现过不多的几位巨人中,牛顿(Newton, 1642~1727)是其中之一,他第一次给出了整个物理世界的统一的图景。我们大家都熟悉他的三大定律,在其最重要的著作《自然哲学的数学原理》中,牛顿实际上是把这三个定律看做几何公理一样,想从这里推导出整个物理世界的各种规律,他利用这个方法讨论了万有引力定律、各个星体的运动、流体的运动、潮汐现象等等。牛顿为了研究这一切,创立了微积分学,它是现在一切理工科、经济和管理科学的学生、教师、技术人员都必须学的科目,由微积分

和它的各个部分发展起来的众多分支,成为当代数学科学的基础,又是物理科学和技术科学最常用的数学工具。所以,一位著名的科学史专家说:“科学产生于用数学解释自然这一信念。”

如果说牛顿的物理学主要还是研究各种机械运动,就已然主要用数学作为自己的语言,到了后来电磁学、光学、热力学……更加如此。到了19世纪末,力学、电磁学、光学、弹性力学、流体力学、热传导……所有这一切科学的基本定律都写成了一组方程式。至少在这些领域,没有数学化就谈不上科学化。当然,也应该承认,有许多学科(这里主要说自然科学),应用数学就少得多。例如化学,其中也需要一些数学,但主要是通过物理学来应用数学;生物学依靠数学就少得多了;至于社会科学,当时还看不到认真地应用数学的例子。

到了20世纪,在科学史上起了里程碑作用的伟大发现,有两项实在与数学很难分家。

第一是相对论的创立。早在19世纪20年代非欧几何在三位伟大数学家手下独立地诞生了。一位是俄罗斯数学家罗巴契夫斯基(Lobachevskii, 1792~1856),第二位是匈牙利的鲍耶依·雅诺什(Janos Bolyai, 1802~1860),他的父亲鲍耶依·法尔卡什也是一位数学家,是第三位发现者高斯的老朋友,也一直热衷于此。老鲍耶依深知这个问题的困难,并且曾一再深情地以自己失败的经历来劝儿子小鲍耶依放弃这个雄心,但是当他一旦得知儿子已经成功之后,又劝儿子立刻发表自己的结果,以免被别人抢了先。他说:“许多东西都有一个时机,时机一到就在几个不同的地方被发现,好像春天的紫罗兰处处开放一样。”这是什么样的春天?大家知道,欧几里得(Euclid, 约前330~约前275)几何,也就是我们中学学的平面几何有许多公理,其中有一条平行线公设(公设就是公理)说:过直线外一点,一定能作出与此直线相平行的直线,而且只能作出一条。这条公理并不像其它公理那样不言而喻,问题在于

很难设想这些直线在无穷远处会是怎么样。所以,由公元5世纪的一些著作中就看到有人想从其它公理来证明平行线公设。然而一千多年的努力全都归于徒劳。于是到了19世纪初,人们开始明白,应该考虑有没有可能提出另外一种几何学(后来称为非欧几何学),非欧几何学(准确些说只是一种非欧几何学)就这样诞生了。它的意义是什么呢?我们知道,由平行线公设就可以证明三角形三内角之和是 $180^\circ$ ,那么空间中的三角形,其内角和是不是 $180^\circ$ 呢?如果不是,那么在我们生活于其中的空间里,平行线公设是不成立的。高斯曾经做过实验,但是在当时的实验条件下,并不能得出结论。所以,到了19世纪初,也就是到了“春天”,人们的问题是:我们的空间的本性究竟是什么呢?它是不是欧几里得空间,就是说在这个空间中我们中学学的几何确实成立吗?19世纪中叶,一位与高斯可以齐名的大数学家黎曼(Riemann, 1826~1866)在他的名著《论作为几何基础的假设》一文的结束语中说:“这里我们已经进入了另一门科学即物理学的领域,我们的讲演的性质使我们不能再深入一步了。”爱因斯坦(Einstein, 1879~1955)是伟大的物理学家,他在晚年(1946年,当年他67岁)写的一篇《自述》中说早在1908年他就有了广义相对论的思想,但是一直为数学上的许多疑难而困惑。他在朋友的帮助之下,认真研究了黎曼和另外一些数学家的著作,从中受益。爱因斯坦自己说,影响他最深的是黎曼的著作,由此他完成了广义相对论的建立。在这个过程中数学起了什么作用呢?还是用黎曼在那篇名著最后一段的话来说:数学帮助物理学的研究“不会受到过分局限的概念之妨害,而且不会因传统定见而难于理解事物的联系”。一句话,数学帮助我们解放了思想。

量子力学的出现也是数学与物理这种关系的光辉例证。量子现象在20世纪初就已经进入了人们的视界,但是,当时的物理学家还不能理解微观世界的物理规律与宏观世界为何如此地不同,

总是对经典物理的框架加上一些修补,因此不能得到深刻而系统的理解。微观世界有一个非常奇特的现象,称为测不准原理。例如一个电子我们可以多次测量它的位置和速度(准确的说法应该说是动量),这些测量会有一些不可避免的误差,而误差又会有一个平均值。大家可能觉得似乎在经典物理领域中也一样,没有什么奇怪。可是在微观世界中,不论怎样改进仪器,(位置误差的平均值) $\times$ (动量误差的平均值) $\geq h$ , $h$ 是一个十分重要的常数,称为普朗克常数。这样一来,位置和动量不可能同时都相当准确地测量。位置误差平均值越小,动量误差的平均值就越大,这就叫测不准原理。这是一个使物理学家十分困惑的原理,怎样去理解它呢?物理学家发现了,这与宏观世界的物理量不一样,例如牛顿的苹果,它的(重心)位置是三个函数 $x(t)$ , $y(t)$ , $z(t)$ ;重心的速度也可以用三个函数表示。可是描述微观世界的物理量要用什么呢?量子力学的创始人之一海森堡(Heisenberg, 1901~1976)找到了一种奇怪的东西,怪就怪在它的乘法是不可交换的!即 $A \times B \neq B \times A$ 。这是什么东西呢?海森堡去请教他的一位懂数学的老师波恩。波恩也大惊失色,原来海森堡找到的东西在数学上早就有了(至少早70年),叫做矩阵!对今天的大学生,这只是一、二年级一门课程的一个基本概念,而在当时,懂得矩阵的大物理学家确实不多。重要的是,测不准原理正是矩阵乘法不可交换性的结果。这里我们又看到了数学的作用与相对论的情况一样:它不仅是一种计算工具,也不只是一种语言,因为没有现代的数学,物理学的最基本的定律是无法表述的,无法表述就不但无法讲给别人听,自己也无法去思考、去研究。更重要的是数学解放了人们的思想:对一条直线只能作一条平行线吗?三角形内角和一定是 $180^\circ$ 吗?几千年来人们都这样想,有些伟大的哲学家例如康德,甚至认为这是先验的知识,即天上掉下来的知识。可是数学家告诉人们,不一定,空间可能是弯曲的,这是一个物理学的问题,爱因斯坦接

受了这个思想,这即是广义相对论的核心。 $A \times B$  一定等于  $B \times A$  吗? 数学家又说,不一定,当  $A$ 、 $B$  是矩阵时就不一定。海森堡接受了用矩阵来表示物理量,于是测不准原理就清楚了,于是微观世界的物理学——量子力学就建立起来了。这一点正是数学作用的最关键之处。迄今为止,物理学上的几次大革命都是以数学为自己的旗帜的。

在这个过程中数学本身也发展起来了。没有牛顿力学就没有微积分,也就没有它的各个分支,可以说,现在大学数学系的课程将要被砍掉一半。没有相对论和量子力学,剩下来的数学(本来就不会剩下什么。一棵树把树干砍掉,上面还会有树叶吗?),如果还能剩下一点什么,比方矩阵(学矩阵确实不需要微积分),充其量只能是一个胎儿,要等待物理学为自己发出生证。一位物理学家问过我们,如果没有相对论和量子力学,数学还剩下什么? 以上就是回答。但是反过来也可以问物理学家,如果没有高等数学,物理学还剩下什么? 如果连欧几里得几何学也没有,物理学又剩下什么?

但是我们很庆幸,我们有数学与物理学历经多少世纪的同盟,这样我们有了现代物理,我们有了电磁波,我们有了通讯,我们有了原子能,有了芯片,有了空间技术,有了海洋科学,……一句话,我们有了现代人类社会。可以说,现代人类社会就建筑在数学与物理学的这个同盟的基础上。

上面没有讲到计算机。如果不讲到计算机,就算不上是在讲现代的科学技术。下面我们会从数学角度来讨论这个问题,现在只简单地讲一个结论。据说当年柏拉图在自己的学院门口立了一个牌子,上面写着:“不懂几何者,不得入此门”。看来,21 世纪的门口也会立一块牌子:“不懂计算机者,不得入此门。”

20 世纪下半叶是人类科学史上非常重要的年代。它的一个特点就是基础研究可以直接转化为生产力。研究科学思想和科学史的人,都认为科学的结构是有层次的。最下层是物理学,它研究

物质运动最“简单”最“原始”的成分,小而至于原子、电子、质子,乃至夸克,大而至于宇宙的空间、时间的本性。然后是化学,然后是生命科学、地学、……。数学不在这个层次结构之内,它研究一切层次的数量、空间、……的侧面。但是由于物理学最“简单”,数学与物理学的关系也更深。这种分层次的说法可能是太简单化了,但是大体上可以用。20世纪下半叶,很明显可以看到“由下往上”的趋势。上层的科学向下层提出问题,而一定要用下层科学的方法去解决。生命科学的发展是一个好例子,分子生物学始于奥地利物理学家(薛定谔,量子力学的创始人之一)写的一本书《生命是什么?》第一次提出用物理学研究生命现象。后来华生和克里克发现了DNA的双螺旋结构,最意味深长的,这是在卡文迪许实验室完成的。卡文迪许实验室是一个著名的物理实验室,20世纪物理学诺贝尔奖的得主有好几位来自这个实验室。华生和克里克的工作深受X光在晶体中的衍射的理论和实验方法的影响,当时,这个实验室的领导人布拉格斯正是由于这方面的贡献而得到诺贝尔奖的。同样,数学方法也由此而越来越多地渗透到一切方面。

有一个小故事很能说明问题。英国著名的数学家哈代(Hardy, 1877~1947),写有一本名著《一个数学家的自白》,他认为数学本身的美才是推动他研究数学的动力,所谓应用数学就是不好的数学,他自己的工作决不会有任意的应用。当时在研究遗传学时提出了一个问题:人的某种遗传病(如色盲),会不会一代一代传下去而使得患者越来越多?到最后人人都变成色盲?人们把它看成一个概率论的问题去请教哈代。哈代用了很简单的数学(据说是中学水平的数学),证明了患者的分布不会随时间而改变。这个结论只作为一个引理放在一篇论文的附录里,后来却成为数理统计学的一个重要的结论而且应用十分广泛。这个引理在统计学界被称为哈代引理,可是数学家中很少人知道该引理,这可以说是一个讽刺。当然这不能否定哈代是一位大数学家,但是这件事



确实说明纯粹数学和应用数学的界限已经越来越难分划了。数学应用的广泛许多时候到了令人吃惊的地步。我们大家都知道一句名言：“数学是科学的女王”，还有“数论是数学的女王”，这些话都反映了一种认为数学由于它自身的完整、严密、无限美妙、数学家的无比的智慧等等而产生的赞叹。数论更由于其问题之貌似简单而实际上无比艰难而吸引了成千上万的爱好者，特别是青少年。有谁不知道哥德巴赫猜想与费马大定理呢？然而密码的编制与破译正是依靠了数论的知识，它要求解决的是如下的问题：任一个自然数在什么条件下是素数，以及当它不是素数时又怎样把它的素数因子找出来（更深刻、也更有效的密码的编制、破译还会用到更抽象，更少为人知的代数几何知识）。有人甚至提出了一个问题：“数论为什么会如此有效？”可见，我们再不要孤芳自赏了，再不要留恋“女王”的称号了，把数学的研究与最广泛的实际生活结合起来，这是不可移易的历史潮流。

## II

为什么数学会有如此大的效用？为什么会像相对论、量子力学的情况那样，数学的发展远远走在前面数十年？要知道这并不是孤立偶然的事件。不妨再举一个例子：法国的天才数学家伽罗瓦(Galois, 1811~1832)在 21 岁发现了群论，可第二天他将与人决斗。一种不幸的预感笼罩着他，于是他连夜极其潦草地写下了自己关于群论的手稿，可以说，群论就是他的绝命书。在黎明到来之时，伽罗瓦如流星一样消失了，时为 1832 年 5 月 31 日。人们说，伽罗瓦生前最后几个小时的工作够数学家们忙上几个世纪。当时他研究的问题是：为什么五次方程的解不能用只含有限多个四则运算和开方的公式来表示。人们几百年来一直不明白为什么二、三、四次方程都有这样的公式而五次以上方程就没有。到了 19 世