微分方程式的基本原理及習題詳解

〔日〕矢野健太郎 原著
張文 譯著

曉園出版社
世界图书出版公司

微分方程式

（基本原理及習題詳解）

原著者　矢野健太郎
譯著者　張　　　文

曉園出版社

微分方程式的基本原理及习题详解

(日)矢野健太郎　原著

张　文　译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1994 年 8 月第　一　版　　开本：711 × 1245 1/24

1994 年 8 月第一次印刷　　印张：18.75

印数：0001－950　　字数：33.3 万字

ISBN: 7－5062－1901－8/O・ 120

定价：22.90 元（W$_B$9402/2)

原　　序

本書主題微分方程在大學課程裡的微分學積分學上爲重要科目之一，其特徵與數學上之他種科目相同，不僅對基礎事項必須有充分的理解，而且要多演習這些基礎事項的應用實例。如果僅僅懂得理論而不能體會其靈活應用的方法，也就沒有什麼用了。

微分方程在大學課程中居極重要的地位自不待言；理科、工科固需研習，而且凡與應用數習有關之一切科學亦須研習。目前大多數的新制大學，都是講授些基礎事項，對於在實際應用上必須學習的演算反而不太重視，教授的時間也有限得很。

在這種情況，尤其是站在學習微分方程求其應用的立場來說，實在是一個致命傷。爲彌補現狀，唯有藉實例的演算，學習其靈活的應用從而達到精通熟練的目的，使在課堂內以最少的時間發揮最大的效果；課外的讀者也可充分的自習，而達到應用的目的。

本書係日本“裳華房”書局企劃的大學演習叢書之一，專門針對上述目標而刻意編著的微分方程原理及演習。

本書標題雖爲習題之演習，但也儘可能地擴充爲兼有教科書和演習書的雙重用途；其著眼點在於使課外的讀者能獲得簡捷的研習。

是以本書在每一章節的開端，首先舉出基本的事項而予以簡捷的說明。這些可由授課教授說明，必要時可再加以證明使學生易於牢記及進一步明瞭其重要事項。

在重要事項之後儘量多舉例題並列出其詳盡的解答作爲應用之實例。

例題之後，我們也大量搜集各類習題。因爲讀者的需求不一，礙於課堂上時間的限制，有的自修讀者僅需學習微分方程之觀念；有的讀者已學過微分方程概要而擬作更多習題演算以充實自己之實力，因此在這些習題中，再依問題難易之程序，歸納而分爲〔A〕，〔B〕，〔C〕三類，讀者可自行斟酌依需要揀選練習。

〔A〕類，收集直接應用各章節所列舉的基礎事項及類似例題，是比較容易的部份。這類問題選了很多，當然也決不會是類似到重複者，而是選擇其有多種不同解答方法之題目以不使讀者覺得單調枯燥爲原則。本類習題對

於只需學習微分方程學概要的讀者已經綽綽有餘。

〔B〕類，比〔A〕類較難，適於對〔A〕類習題尚不能滿足的讀者。

〔C〕類，收集數學上，比較需要深度技巧和有趣者，適宜程度較高的讀者。

本書編輯方針如上，若有不週之處，敬希不吝指正，如承採用本書之各位教授，學生賜予高見，使本書有所改進，則深慶幸。

此外，本書之編寫，承蒙理學碩士長野正先生對各方面的大力協助以及裳華房編輯部給予作者的鼎力支持。謹此申謝。

昭和32年5月

矢野健太郎

微分方程式原理及題解

（目　錄）

第一章
微分方程式

§1 微分方程式

凡方程式中含有導函數者，謂之微分方程式，例如：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=2x+3$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=0$

(3) $xy'+y=5$　　(4) $(y''')^5+4(y'')^2-y=\tan x$

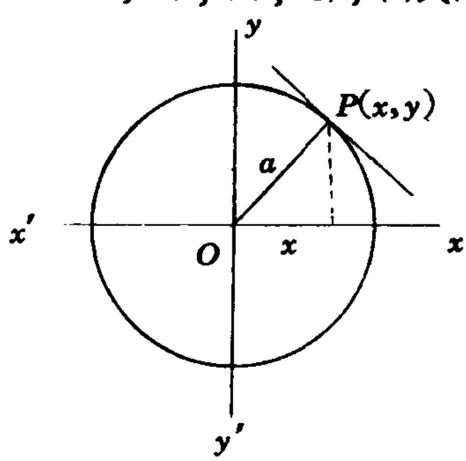
(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+z+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$　　(6) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=3x^2-y$

等皆爲微分方程式。方程式(1)至(4)式係求自變數 x 的未知函數 y，(5)和(6)式求自變數 x 與 y 之未知函數 z。方程式(5)和(6)含偏導函數，類似此種方程式稱爲偏微分方程式。相對而言(1)至(4)式則稱爲常微分方程式。

一個微分方程式其所含導函數中之最高階的階數，稱爲此微分方程式的階數。舉例而言，(1)，(3)，(5)式爲一階微分方程式，(2)式爲二階，(4)式爲三階常微分方程式。(6)爲二階偏微分方程式。

此外，任一微分方程式，其相關之各導函數的多項式變爲 0 之形式時（就以上例而言，僅需移項即成爲該種形式），相關之最高階的導函數其多項式之次數稱爲此微分方程式之次數。上例之(1)，(2)，(3)，(5)，(6)式均爲一次，(4)式則爲五次。

§2 微分方程式的由來和問題



舉例而言，以原點爲中心，半徑 a（$a>0$）作成的圓

(1) $$x^2+y^2=a^2$$

以原點爲中心之任意圓，只要其半徑

a 能適當決定的話，上式均能滿足表示之。爲消去 a ，兩邊各對 x 微分之

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

即成爲

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{2}$$

因此，以原點爲中心之圓的方程式，微分方程式(2)均能予以滿足。此式亦可改寫爲 $\left(\dfrac{y}{x}\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = -1$, 由此可知「以原點爲中心之圓周上任意一點 p 與原點連結之線段（半徑），與 p 點之切線相互直交」,此即，以原點爲中心之一切圓，其共同之性質如撇開半徑 a 不談，則可由一微分方程式的形式來表示。

逆言之，由(2)式之可解，則尚不能確知(1)式。蓋唯有在曲線之集體中能滿足「其曲線上任意點 p 與原點連結之直線與 p 點之切線相互直交」之條件方爲正確的答案。欲由曲線群中尋找出能滿足某種條件的問題，在理論上，應用上都極其重要。此曲線或表示此曲線之函數即稱之爲可解微分方程式之解。微分方程式之解的問題可分如下列：

1° 滿足可解微分方程式之曲線是否確實存在的問題，

2° 當解存在時，如何實際求出其解的問題。即解微分方程式之問題，

3° 確認除實際之解以外是否還有其他之解的問題（就上述之例而言，如指定原點以外之一點，此微分方程式之解是否僅是以原點爲中心而通過該點之圓，除此別無他解嗎？類此一貫性的問題。）

本書之主要目的係針對 2° 類。本書重點在於實際地求出微分方程式之解，故解的存在幾乎不成問題。雖能滿足一貫性的居多，但是不能滿足的也有（參看後面有關奇解事項）。

例 題

1． 由下面的方程式中消去常數 A，B，C，並作其對應之微分方程式。

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$$

解：對 x 連續作三次微分

$$x+yy'+A+By'=0$$
$$1+(y')^2+yy''+By''=0$$
$$3y'y''+yy'''+By'''=0$$

由最後兩式消去 B

$$\{1+(y')^2\}y'''-3y'(y'')^2=0$$

即爲所求之微分方程式。此方程式亦可變形爲

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}}{y''}\right]=0$$

是以得知，此曲線之曲率半徑即爲一定。

2. 由以下方程式中消去函數 f，並作其對應偏微分方程式。

$$z=f(x^2+y^2)$$

解：對 x 偏微分之

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2)$$

對 y 偏微分之

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2)$$

故

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

問　　題

(A)

1. 由下列方程式，消去[ ]內之常數，並作其對應微分方程式

(1) $y=ae^{x}$ [a]　(2) $y+ax=0$ [a]

(3) $y=\sin(x+c)$ [c]　(4) $y=x+ax^{2}$ [a]

(5) $y=mx+m^{2}$ [m]　(6) $x^{2}+y^{2}-2ax=0$ [a]

(7) $y=mx+\sqrt{1+m^{2}}$ [m]　(8) $(x-a)^{2}+(y-a)^{2}=a^{2}$ [a]

(9) $\dfrac{x^{2}}{a^{2}+\lambda}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}+\lambda}=1$ [λ]　(10) $y=ax+bx^{2}$ [a, b]

2. 有一曲線上之各點(x,y)，其切線之斜率等於該點兩座標和的2倍，試以此條件，表示出其微分方程式。

3. 試作出切線之 x 軸截距與 y 軸截距的和等於3之微分方程式。

(B)

4. 由下列方程式，消去[ ]內之常數，並作其對應微分方程式。

(1) $y=ax+\dfrac{b}{x}$ [a, b]　(2) $ay^{2}+by=x$ [a, b]

(3) $x-ay+bxy=0$ [a,b]　(4) $4y=\dfrac{1}{3}x+ax^{5}+bx$ [a,b]

(5) $y^{2}+bx^{2}=a$ [a,b]

(6) $y=A\cos mx+B\sin mx$ [A, B]

(7) $v=a\cos(mt+b)$ [a,b]

(8) $y=ae^{x}+bxe^{x}$ [a,b]　(9) $y=\dfrac{2}{15}e^{2x}+ae^{-x}+be^{-3x}$ [a,b

(10) $xy=ae^{x}+be^{-x}$ [a,b]　(11) $y=ax+\dfrac{b}{x}+c$ [a,b,c]

(12) $ax^{2}+2bxy+cy^{2}=1$ [a,b,c]

(13) $y=Ae^{x}+Be^{-x}+Ce^{2x}$ [A, B, C]

(14) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ [a,b,c,d]

(15) $y=(Ax+B)e^{x}+(Cx+D)e^{-x}$ [A, B, C, D]

5. 作出滿足下列條件之曲線族之微分方程式

(1) 圓心在 x 軸，半徑爲 1 之圓族

(2) 以 x 軸爲軸，以原點爲焦點之拋物線族。

(3) 拋物線 $2y=x^2$ 之切線族

6. 由下列方程式，消去[ ]內之函數，並作其對應偏微分方程式

(1) $\phi(x+y+z,z)=0$ [ϕ]

(2) $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ [f]

(3) $\phi(x+y-z, x^2+y^2-z^2)=0$ [ϕ]

(4) $z=e^y\phi(x+y)$ [ϕ]

(5) $z=(x+y)f(x^2-y^2)$ [f]

(C)

7. 由下列方程式，消去[ ]內之常數，並作其對應偏微分方程式

(1) $y=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$ [A, B, C, D]

(2) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ [a, b, c, f, g, h]

(3) $x^2+y^2+z^2=r^2$ [r] (4) $yz+zx+xy=c$ [c]

(5) $(x+z)(y+z)=c(x+y)$ [c]

(6) $z=(x+a)(y+b)$ [a, b]

(7) $z^2=ax^2+by^2$ [a, b] (8) $u=ax+by+cz$ [a, b, c]

(9) $u^3=ax^3+by^3+cz^3$ [a, b, c]

(10) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ [a, b, c, r]

8. 寫出滿足以下列條件決定之曲線族之微分方程式。

(1) $P(x,y)$ 點之法線與 x 軸之交點，與 $P(x,y)$ 之連線爲 y 軸所平分。

(2) 在各點 (r,θ) 上，位置向量與切線所成之角度之正切等於位置向量與極軸所成角度之正切的三分之一。

(3) 由曲線上一定點沿此曲線到一任意點，該段曲線下之面積爲弧長之 2 倍。

9. 找出與原點之距離等於 1 之一切直線之微分方程式。

10. 由下列方程式中，消去[ ]內的函數，並作出其對應之偏微分方程式

(1) $\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=f\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$ $[f]$ (2) $z=e^{\frac{x}{x+y}}\varphi(x+y)$ $[\varphi]$

(3) $z=f\left(\frac{y-nz}{x-mz}\right)$ $[f]$ (4) $z=f(y+ax)+g(y-ax)$ $[f,g]$

(5) $z=xf(ax+by)+yg(ax+by)$ $[f,g]$

解 答

1. (1) $y'=ae^x$ 所以 $y'=y$ (2) $y'+a=0$ 所以，$y=xy'$
(3) $y'=\cos(x+c)$ 所以，$y^2+y'^2=1$ (4) $xy'-2y+x=0$
(5) $y=xy'+y'^2$ (6) $x^2-y^2+2xyy'=0$ (7) $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$
(8) 以 x 微分之 $x-a+(y-a)y'=0$ 由此求得 a，$a=\frac{x+yy'}{1+y'}$，
因此 $x-a=\frac{(x-y)y'}{1+y'}$，$y-a=-\frac{x-y}{1+y'}$，將這些代入原式，
$(x-y)^2(1+y'^2)=(x+yy')^2$ 故得 $(y-xy')^2=2xy(1+y'^2)$
(9) 以 x 微分之，$\frac{x}{a^2+\lambda}+\frac{yy'}{b^2+\lambda}=0$，於是 $\lambda=-\frac{b^2x+a^2yy'}{x+yy'}$，因此
$a^2+\lambda=\frac{(a^2-b^2)x}{x+yy'}$，$b^2+\lambda=-\frac{(a^2-b^2)yy'}{x+yy'}$。將這些代入原式
$(x+yy')(y-xy')+(a^2-b^2)y'=0$，又 $xyy'^2+(x^2-y^2-a^2+b^2)$
$y'-xy=0$ (10) $y=ax+bx^2$，$y'=a+2bx$，$y''=2b$，於是即
可消去 a，b。$\begin{vmatrix} y & x & x^2 \\ y' & 1 & 2x \\ y'' & 0 & 2 \end{vmatrix}=x^2y''-2xy'+2y=0$。
2. 切線之斜率為 y'，$y'=2(x+y)$ 即為所求之微分方程式。
3. (x,y) 點之切線方程式為 $(Y-y)=y'(X-x)$，故 x 軸，y 軸之截距各為 $x-\frac{y}{y'}$，$y-xy'$，因此 $\left(x-\frac{y}{y'}\right)+(y-xy')=3$，即
$x(y')^2-(x+y-3)y'+y=0$ 為所求之微分方程式。
4. 與 (1) 1 (10) 相同 $x^2y''+xy'-y=0$ (2) 相同

$$\begin{vmatrix} y^2 & y & x \\ 2yy' & y' & 1 \\ 2y'^2+2yy'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y & x \\ yy' & y' & 1 \\ 2y'^2+yy'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = 0$$ ，將第 3 列展開之，$y^2y'' + 2(y-xy')y'^2 = 0$　(3) $xyy''-2xy'^2+2yy' = 0$　(4) $x^2y''-5xy'+5y=0$　(5) $xyy''+xy'^2-yy'=0$　(6) $y''+m^2y=0$　(7) $v''+m^2v=0$　(8) $y''-2y'+y=0$　(9) $y''+4y'+3y=2e^{2x}$　(10) $xy''+2y'-xy=0$　(11) $xy'''+3y''=0$　(12) $(y-xy')y'''+3xy''^2=0$　(13) $y'''-2y''-y'+2y=0$　(14) $2y'y''' = 3y''^2$　(15) $y^{(4)}-2y''+y=0$

5. (1)以曲線族 $(x-a)^2+y^2=1$ 可解，微分之 $(x-a)+yy'=0$，將此 $(x-a)$ 代入前式 $y^2(1+y'^2)=1$　(2)設準線之方程式爲 $x=-2A$，則 $y^2=4A(A+x)$，以 x 微分之 $yy'=2A$，因此 $y^2=(yy')^2+2xyy'$，$y(y')^2+2xy'-y=0$　(3) $y'^2-2xy'+2y=0$

6. (1)設 $\phi=\phi(u,v)$，因爲 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=0$，故 $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$

因爲 $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0$，故 $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}(1+\dfrac{\partial z}{\partial y})+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，消去 $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}$，$\dfrac{\partial\phi}{\partial v}$ 即得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$。　(2)由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)$，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$．$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$．　(3)與(1)相同 $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}+(x-y)=0$．　(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^y\phi'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+e^y\phi'=z+\dfrac{\partial z}{\partial x}$．$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$．　(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f+2x(x+y)f'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f-2y(x+y)f'$．$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=yf+xf=z$.

7. (1) $y^{(4)}+2y''+y=0$.　(2) $9(y'')^2y^{(5)}-45y''y'''y^{(4)}+40(y^{(3)})^3=0$　(3) $xdx+ydy+zdz=0$（此種形態之微分方程式稱爲全微分方程式）在此把 x，y 當作獨立變數的話，同樣可表示爲 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+x=z\dfrac{\partial z}{\partial y}+y=0$　(4) $(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0$

(5) $(y^2-z^2)dx+(x^2-z^2)dy+(x+y+2z)(x+y)dz=0$.

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+b$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+a$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ (7)由 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}=ax$, $z\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $=by$, $xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial x}{\partial y}=ax^2+by^2=z^2$, 得 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$,

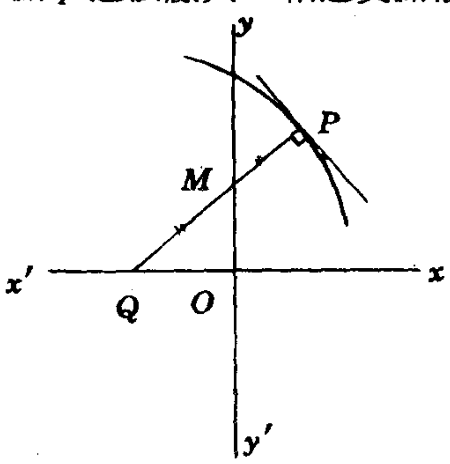
z爲相關 x 與 y之1次齊次函數實際上甚爲明顯。

(8) u 爲 x,y,z之1次齊次函數，故 $u=\dfrac{\partial u}{\partial x}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}y+\dfrac{\partial u}{\partial z}z$.(9)與(8)相同 (10) $(x-a)+(z-c)\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，再進一步對 x 偏微分之

$1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+(z-c)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，另對 y 偏微分之 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-c)$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$．由此2式得 $\dfrac{r}{1+p^2}=\dfrac{s}{pq}$, 但 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，其次 x,y交換並進行同樣之推論 $\dfrac{t}{1+q^2}=\dfrac{s}{pq}$, 但 $t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, 合併之 $\dfrac{r}{1+p^2}=\dfrac{s}{pq}=\dfrac{t}{1+q^2}$。

8. (1)點 p 之法線與 x 軸之交點設定爲Q，線段PQ之中點M則位於中點，



$yy'+2x=0$. (2) $r\dfrac{d\theta}{dr}=\dfrac{1}{3}\tan\theta$.

(3)由 $\displaystyle\int_a^x y\,dx=2\int_a^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx$,

以 x 微分之則 $y=2\sqrt{1+(y')^2}$。

9. 與原點之距離爲1之任意直線，設 θ 爲任意之常數，可表示爲 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$, $\cos\theta+y'\sin\theta=0$，由此二式，得 $y'^2\sin^2\theta=\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ 及 $(y-xy')\sin\theta=1$ 於是 $1+(y')^2=(y-xy')^2$.

10. (1) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$ (2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{x+y}$. (3)設 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=p$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=q$ 則 $p=\dfrac{(nz-y)+p(my-nx)}{(x-mz)^2}f'$,

$$q=\frac{(x-mz)+q(my-nx)}{(x-mz)^2}f'\text{ 故 }(x-mz)\frac{\partial z}{\partial x}+(nz-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

(4)因爲 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2f''+a^2g''$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''+g''$，故 $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$

(5)由於 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a(2f'+axf''+ayg'')$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=bf'+abxf''+ag'$ $+abyg''$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=b(bxf''+2g'+byg'')$，故 $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2ab\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ $+b^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$．

§3　微分方程之解與其存在性

滿足微分方程式之函數，即保證解存在的定理，隨微分方程式之形態而有很多種。在此特舉出最簡單、最重要的。

定理　（存在定理）— 階常微分方程式

(3)　在 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 中，$f(x,y)$ 爲閉區域

D：$a-A\leqq x\leqq a+A$，$b-B\leqq y\leqq b+B$（$A>0$，$B>0$）上連續，又對 y 之偏導函數存在且連續，則滿足

$$b=y(a)\quad\text{之解}\quad y(x)$$

在閉區間

$$|x-a|\leqq A,\qquad |x-a|\leqq\frac{B}{M}$$

中僅僅有一個存在，式中 M 在閉區域 D 中 $f(x,y)$ 之最大値。

依此定理，當 c 趨近於 b 時，因爲能滿足 $c=y(a)$ 之解只有一個存在，此可以 $y=g(x,c)$ 來表示之。此 c 即稱之爲任意常數。雖說任意，但也非完全任意，例如在此例中，一般上亦受 $b-B<c<b+B$ 的限制。此外，由存在定理保證這種存在的解 $y=g(x,c)$ 即稱爲通解（

general solution)，c 以特殊數值 c_0 代入之各個解 $y=g(x, c_0)$ 即稱之爲特解（special solution）。

例如，微分方程式(2)，如 $a=0$，$b>0$ 即能滿足定理之條件（A 任意值，$B<b$），因之，$x=0$ 時 $y=b$ 之解僅僅有一個存在。若已知(1)依定理可知通過（0，b）之解除此以外別無他的了。(1)即爲通解，再如 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=3$ 等則爲特解。

此種定理的自然擴張即成立以下定理。

定理 n 階微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots\cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{4}$$

中 $f(x, y, y', \cdots\cdots, y^{(n-1)})$，在閉區間

$$|x-a|\leq A,\ |y-b|\leq B,\ |y'-b_1|\leq B_1,\ \cdots\cdots,$$
$$|y^{(n-1)}-b_{n-1}|\leq B_{n-1}$$

但，$A>0$，$B>0$，$B_1>0$，……，$B_{n-1}>0$

上連續，又對 $y, y', \cdots\cdots, y^{(n-1)}$ 之偏導函數存在且連續的話則滿足

$$y(a)=b,\ y'(a)=b_1,\ \cdots\cdots,\ y^{(n-1)}(a)=b_{n-1}$$

之解在 $x=a$ 附近僅有1個存在。

依此定理，$|c-b|<B$，$|c_1-b_1|<B_1$，……，$|c_{n-1}-b_{n-1}|<B_{n-1}$ 時，

初始條件爲 $y(a)=c$，$y'(a)=c_1$，……，$y^{(n-1)}(a)=c_{n-1}$

滿足此式之解 $y=g(x, c, c_1, \cdots\cdots, c_{n-1})$ 僅一個存在。這與前面所述的一樣稱爲通解，n 階常微分方程式之通解包含 n 個任意常數。

例如§1之(2)所示之微分方程式

$$y''+3y'+2=0$$

可適用此項定理。