

HANGKONG BANQIWOLUN FADONGJI QIANGDU SHEJI

航空燃气涡轮发动机 强度设计

宋兆泓 主 编

熊昌炳 郑光华 编

715858



北京航空學院出版社

航空

PDG

航空燃气涡轮发动机强度设计

宋兆泓 主編

熊昌炳 郑光华 編

北京航空學院出版社

内 容 简 介

本书是大学航空燃气涡轮发动机专业教科书，与《航空燃气涡轮发动机结构设计》一书配合使用。本书以介绍发动机主要零、部件的强度计算和强度设计为主，编入了较先进和实用的计算方法。全书共八章，包括叶片、轮盘和联接件的强度，叶片、轮盘、转子和整机的振动，零件疲劳强度等；并附有轮盘强度、叶片振动和转子临界转速计算程序。本书内容广泛，概念清楚、图表清晰，简要易懂，是专业教材也是一种参考书籍，可供从事航空和地面燃气涡轮发动机研制、生产和使用的工程技术人员阅读，也可作为大专院校有关专业师生的教学参考书籍。

航空燃气涡轮发动机强度设计

HANGKONG RANQIWOLUN FADONGJI QIANGDU SHEJI

宋兆泓 主编

熊昌炳 郑光华 编

责任编辑 陶金福

北京航空学院出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

北京航空航天大学印刷厂印装

787×1092 1/16 印张：16.75 字数：428 千字

1988年11月第一版 1988年11月第一次印刷 印数：1500 册

ISBN 7-81012-061-1/V·006

定价：2.80 元

前 言

随同科学技术的不断提高,航空燃气涡轮发动机,在结构设计,强度计算和试验研究等方面都有新的进展。结构的强度已从早期的经验设计,静强度破损计算的比较法,进入到零、部件或整机的强度设计与优化设计阶段,进行零部件的静、动强度计算,寿命预估计算,损伤容限设计等。强度计算已从单纯的强度验算方法进入到结构强度的全面设计。当前零、部件的强度计算与设计有二类方法。一类应用有限元法计算,该法虽繁,但计算精确,适用于对复杂工况,复杂零件的计算,使用有效,将有专门教材讲述。另一类应用解析法计算,该法力学模型简单,物理概念清晰,应用数值解法方便,为一种常规方法,对于多参数变化的优化设计较为方便、省时。本书将以解析法为主,介绍零、部件的强度计算与设计。

本书是航空院校发动机专业的主要专业课程之一,与《航空燃气涡轮发动机结构设计》一书配合使用。本书编入了近年来国内、外航空动力强度与振动研究中的部分科研成果,力求与发动机设计实践相结合。在分析发动机零、部件工作条件的基础上,贯彻基本概念,简化力学模型,建立基本方程,导出工程中适用的计算方法,并联系实际,贯彻零、部件的强度设计思想和设计方法。

本书共分为八章,前三章为零件的强度计算与设计,即叶片强度、轮盘强度和联接零件强度。第四章到第七章为零件的振动计算与设计,即叶片振动,轮盘振动,转子振动和整机振动与平衡。第八章为零件的疲劳强度。本书还在轮盘强度、叶片振动和转子振动三章中,编入了用 FORTRAN 语言编写的计算程序。本书作为专业教材来讲,内容较多,可按具体教学大纲内容,酌情取舍。

本书在编写过程中,考虑到教学和生产使用单位的不同要求,编入的内容较多、较全面。因此,可供从事航空与地面燃气轮发动机研制、生产和使用的工程技术人员参阅,也适用于大专院校有关专业阅读,是一本工程性参考书籍。

本书由宋兆泓教授主编,并负责编写第一章和第四至第七章。第三章和第八章由熊昌炳教授编写。第二章由郑光华教授编写。晏砺堂教授给本书提出了有益的指导并编写了双转子临界转速的计算方法。本书在编写过程中还得到北航四〇五教研室的支持和指导。

由于编者水平所限,错误与不当之处,望广大读者指正。

宋兆泓

1987年 北京

目 录

前 言

第一章 叶片强度

第一节 概述	(1)
1. 叶片的工作条件	(1)
2. 计算状态的选取	(2)
3. 叶型几何特性参数的计算	(2)
第二节 离心拉伸应力计算	(4)
1. 离心拉伸应力	(4)
2. 面积变化规律与拉伸应力	(5)
第三节 弯曲应力计算	(8)
1. 气动力弯矩	(8)
2. 离心力弯矩	(9)
3. 弯矩合成与离心力弯矩补偿	(12)
4. 弯曲应力	(12)
第四节 总应力与安全系数	(14)
1. 总应力	(14)
2. 安全系数	(15)
第五节 影响叶片强度的因素	(15)
1. 扭转应力的影响	(15)
2. 扭向影响	(16)
3. 柔性叶片的影响	(16)
4. 热应力、蠕变和伸长量计算	(18)
第六节 工作叶片榫头的强度计算	(19)
1. 燕尾形榫头	(19)
2. 楔树形榫头	(20)
3. 销钉式联结	(23)

第二章 轮盘强度

第一节 概述	(24)
第二节 轮盘应力计算的基本方程	(25)
第三节 等厚轮盘应力	(29)
1. 等温实心等厚盘	(30)
2. 等温空心等厚盘	(31)
3. 等厚盘的温度应力	(32)

第四节 轮盘应力近似计算方法——分段等厚圆环算法	(36)
1. 輪盤形狀的簡化	(36)
2. 基本公式	(36)
3. 計算步驟	(39)
4. 輪緣的徑向負荷	(40)
第五节 轮盘的安全系数	(41)
1. 比較应力法	(41)
2. 局部安全系数法	(41)
3. 总安全系数法	(42)
第六节 轮盘型面设计	(43)
第七节 弹塑性轮盘强度概述	(45)
附录 1 式 (2-37) 及 (2-38) 的推导	(46)
附录 2 “分段等厚圆环” 计算程序	(49)

第三章 主轴及联接零件的强度计算

第一节 主轴的强度计算	(56)
1. 渦輪軸的強度計算	(56)
2. 其他各种类型主軸的外載荷	(59)
3. 主軸的剛度	(60)
4. 主軸的疲勞強度計算	(64)
第二节 花鍵强度计算	(67)
1. 矩形花鍵	(67)
2. 漸开綫花鍵	(68)
3. 軸綫傾斜問題	(69)
第三节 球形联轴器承压计算	(70)
第四节 螺栓联接的强度	(71)
1. 弯矩引起的載荷	(71)
2. 拉伸引起的載荷	(73)
3. 螺栓的強度校核	(74)

第四章 叶片振动

第一节 概述	(75)
第二节 叶片振动基本特性	(75)
1. 振动的主要参数	(75)
2. 单个叶片的振形	(76)
3. 成組叶片的振动	(77)
4. 整体叶輪的振动	(78)
第三节 等截面梁 (叶片) 的振动特性	(78)
1. 弯曲振动微分方程及其解	(78)

2. 伸臂梁的频率式	(80)
3. 弹性线、振形与振动应力	(81)
4. 扭转振动微分方程及其解	(83)
第四节 带扭向叶片频率计算——数值积分法	(84)
1. 无扭向叶片的振动计算	(85)
2. 带扭向叶片的振动计算	(87)
3. 高阶振动特性计算——正交条件	(90)
第五节 能量法	(91)
1. 瑞列法	(92)
2. 里兹法	(93)
第六节 旋转下的叶片振动	(95)
1. 动频的基本计算式	(95)
2. 动频系数	(97)
3. 旋转下的叶片振动应力	(99)
4. 应力监控与应力标准	(100)
第七节 影响叶片自振频率的因素	(102)
1. 离心力场的影响	(102)
2. 温度的影响	(103)
3. 根部固持刚性的影响	(104)
4. 盘的影响	(105)
第八节 激振力与共振特性	(105)
1. 激振力的种类与特性	(106)
2. 谐波分析	(109)
3. 共振图与共振转速	(110)
第九节 叶片颤振	(111)
1. 颤振的基本特征	(111)
2. 亚音非失速颤振	(113)
3. 叶片弯扭耦合颤振	(116)
4. 叶片型面设计对颤振的影响	(118)
5. 叶片错频抑制颤振	(120)
第十节 排除叶片振动故障的方法	(120)
1. 叶片的调频法	(121)
2. 改变激振条件	(122)
3. 提高叶片的抗振性能	(124)
4. 叶片的减振结构	(125)
附录3 带扭向叶片频率计算——数值积分法程序	(128)

第五章 轮盘振动

第一节 轮盘振动的基本振形	(138)
---------------	-------

1. 伞形振动	(138)
2. 扇形振动	(138)
3. 复合振动	(140)
第二节 等厚薄圆盘的自振频率	(140)
第三节 轮盘的行波振动	(143)
1. 行波振动	(143)
2. 驻波与临界转速	(145)
3. 共振特性	(145)

第六章 转子振动与临界转速

第一节 概述	(147)
第二节 临界转速的基本特征	(147)
1. 单盘无重轴的临界转速	(147)
2. 均质轴的临界转速	(149)
第三节 影响临界转速的因素	(152)
1. 阻尼力的影响	(152)
2. 离心力矩的影响	(154)
3. 支承弹性的影响	(155)
4. 外负荷的影响	(155)
第四节 转子的进动运动	(156)
1. 运动轨迹	(158)
2. 轴上的纤维变化	(158)
3. 激振力	(158)
第五节 双支承转子临界转速的计算——数值积分法	(159)
第六节 多跨支转子临界转速的计算——传递矩阵法	(162)
1. 全弹性支承转子的传递矩阵式	(163)
2. 全刚性支承转子的传递矩阵式	(169)
第七节 复杂转子系统临界转速的计算——子结构传递矩阵法	(170)
1. 复杂转子临界转速的特点	(170)
2. 复杂转子临界转速的计算方法	(172)
3. 复杂转子临界转速时振形算法	(174)
4. 计算中的几个具体问题	(174)
第八节 转子振动设计与临界转速	(176)
1. 刚性转子与柔性转子	(176)
2. 弹性支承转子的设计	(176)
3. 挤压油膜轴承	(180)
第九节 旋转坐标系中转子的振动特性	(183)
1. 坐标系的变换	(183)
2. 转子的运动方程	(185)

3. 轉子的临界轉速.....	(186)
4. 軸心軌迹与进动.....	(187)
附录 4 双弹性支承转子临界转速计算程序.....	(188)

第七章 转子平衡与整机振动

第一节 转子的平衡.....	(193)
1. 轉子的靜平衡.....	(193)
2. 刚性轉子的动平衡.....	(194)
3. 柔性轉子的动平衡.....	(196)
4. 保证轉子良好平衡的方法.....	(196)
第二节 转子的整机平衡.....	(197)
1. 三圓平衡法.....	(197)
2. 三矢平衡法.....	(201)
第三节 发动机整机振动特性.....	(202)
第四节 整机振动的检测.....	(204)
1. 振动量的拾取与指示.....	(204)
2. 振动指示参数的选取.....	(205)
3. 测振点选取与振动量关系.....	(206)
4. 单轉子发动机的测振.....	(207)
5. 双轉子发动机的测振.....	(209)
第五节 整机的振动监控与诊断.....	(211)
1. 振动监控.....	(212)
2. 振动診斷.....	(212)

第八章 疲劳强度

第一节 疲劳强度的基本概念.....	(215)
1. 疲劳強度的重要性.....	(215)
2. 疲劳裂紋.....	(216)
3. 疲劳损伤积累.....	(222)
第二节 高循环疲劳.....	(225)
1. 概述.....	(225)
2. 疲劳載荷.....	(226)
3. 材料的 N-S 曲綫.....	(227)
4. 等寿命設計方法.....	(230)
第三节 低循环疲劳.....	(236)
1. 概述.....	(236)
2. 低循环疲劳的基本知識.....	(237)
3. 低循环应变——寿命曲綫.....	(242)
4. 低循环疲劳的能量法.....	(244)

~ V ~

5. 低循环疲劳寿命预测方法.....	(246)
第四节 热疲劳.....	(249)
1. 概述.....	(249)
2. 热疲劳试验模型.....	(249)
3. 影响热疲劳的主要因素.....	(251)
4. 热疲劳-机械应力叠加的疲劳强度.....	(254)

第一章 叶片强度

第一节 概述

发动机中的静子叶片和转动叶片都是进行功能转换的重要零件，转子叶片又称动叶或工作叶片。由于动叶受力状态比较复杂，一般发动机中仅进行动叶的强度计算。工作时如果叶片本身强度不足，产生变形、挠曲或者折断，都将直接影响到发动机的工作性能、安全可靠，甚至造成不同程度的故障和飞行事故。因此叶片的强度计算就非常重要。

叶片的强度计算可分为静强度计算和动强度计算两大类。静强度计算是指叶片所受的外力为非交变载荷的强度计算，包含应力计算、变形计算和强度考核。动强度计算是指叶片受有交变载荷的强度计算，如叶片频率、动态响应和稳定性计算以及叶片高周疲劳寿命预估和低周疲劳寿命预估计算等。一般动强度计算比较复杂，将在叶片振动和疲劳强度两章中分别介绍。

叶片在设计阶段，强度计算是叶片造型设计中的一个重要工序。叶片在满足气动性能要求的前提下，保证一定的强度裕度，通过叶片强度计算来完成与实现叶片的造型设计，这一过程可统称为叶片强度设计。对于已成型的叶片，所进行的强度计算，大多情况下属于强度考核性质的。

近年来随同科学技术的不断发展，计算机技术的广泛应用，已形成了叶片的一体化设计程序。叶片按照预定的气动性能、强度裕度和工艺制造等要求，通过计算机辅助设计程序，一次完成叶片的气动设计、强度设计、振动验算和工艺成型等环节。在这个设计过程中，还可以随意修改其中任一环节，以达到总体设计的合理性。这时叶片的强度计算也属于叶片的强度设计。

本章将主要介绍叶片静强度的计算方法，介绍叶片工作条件，计算状态的选取，几何参数计算和相应的应力标准的确定等。

1. 叶片的工作条件

发动机工作时，叶片上受有如下几种负荷：

① 叶片本身质量所产生的离心力

叶片在旋转离心力场的作用下，由本身质量而产生的力为质量离心力。此种力使叶片产生拉伸应力、弯曲应力和扭转应力。

② 空气与燃气的气动力

由发动机气流流动对叶片所作用的力为气动力。此种力使叶片产生弯曲应力和扭转应力。

③ 热应力

叶片受热不均匀所产生的应力为热应力。涡轮工作叶片受热温度变化较大，热应力也较大，特别是发动机起动和停车瞬间更为严重。

④ 交变力

由发动机振动所产生的力为交变力或称振动力。此种力使叶片产生振动或共振，并产生较大的弯曲应力、扭转应力和具有复合振型的复杂应力。

⑤ 随机载荷

近代研究叶片疲劳和疲劳寿命时，还要计入叶片所受的随机载荷。随机载荷主要来源于发动机工作时的随机振动，通常此力为一种无规律的形式，随不同的工作状态而不同。

叶片进行静强度计算时，为了突出主要受力影响和简化问题，通常仅计入在离心力和气动力下引起的应力。当然些应力将随不同工作状态有所改变，因此进行强度计算，要按各种主要飞行状态进行计算。至于被忽略的外力和难以计算的应力成份，可在强度储备中给以考虑。

2. 计算状态的选取

航空发动机工作状态多，载荷的变化也大，因此叶片强度计算就要考虑到在几种主要工作状态下，叶片的强度足够。如果对每一个工作状态进行逐一的计算，则工作量将十分繁重。所以目前根据飞行包线，选取几种危险的应力状态或典型的工作状态作为计算点。一般有四种状态。

① 最大气动力状态：在海平面 ($H=0$) 以最大马赫数飞行，发动机处于最大转速 n_{max} 时，此时叶片所承受的气动力最大。

② 最小气动力状态：飞机在最高升限飞行，发动机转速为额定或巡航转速，由于空气密度低，此时叶片承受的气动力最小。

③ 最高温度状态：叶片承受的载荷不是最大，但温度高，材料的机械性能将降低，需要计算此种状态下的强度。

④ 设计状态：发动机强度设计点多选取在地面试车状态，此时高度为零，无飞行，转速为最高，提供的气动参数最全，必须进行叶片的应力计算。

计算状态的选择和参数的选取是一项复杂的工作，计算时还需要不断积累经验，以求计算更为准确。

3. 叶型几何特性参数的计算

不论压气机或涡轮叶片，在进行强度计算时都需事先知道叶型几何特性的主要参数，如重心、面积和惯性矩等。叶型几何特性主要参数如图1-1所示，其计算式为：

在 XOY 坐标系中，距 X 位置处，叶背坐标为 Y_2 ，叶盆坐标为 Y_1 。则有

面积
$$A = \int_a^b (Y_2 - Y_1) dX$$

静矩
$$S_X = \frac{1}{2} \int_a^b (Y_2^2 - Y_1^2) dX$$

$$S_Y = \int_a^b (Y_2 - Y_1) X dX$$

重心
$$X_c = S_Y / A$$

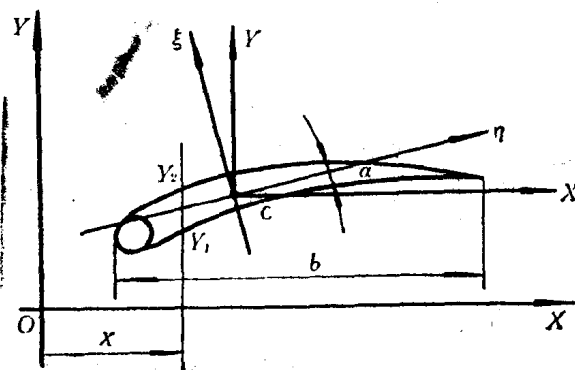


图1-1 叶型坐标图

$$Y_c = S_X / A$$

惯性矩

$$J_X = \frac{1}{3} \int_a^b (Y_2^2 - Y_1^2) dX$$

$$J_Y = \int_a^b (Y_2 - Y_1) X^2 dX$$

$$J_{XY} = -\frac{1}{2} \int_a^b (Y_2^2 - Y_1^2) X dX$$

平移到 $X_c Y$ 坐标系中, 则有

$$J_{X_c} = J_X - Y_c^2 A$$

$$J_{Y_c} = J_Y - X_c^2 A$$

$$J_{X_c Y_c} = J_{XY} - X_c Y_c A$$

$$J_{P_c} = J_{X_c} + J_{Y_c}$$

转置到叶片主惯性轴 $\eta C \xi$ 坐标系中, 则有

$$\text{主惯性轴倾角 } \alpha = \tan^{-1} \frac{J_{X_c} - J_{Y_c} + \sqrt{(J_{Y_c} - J_{X_c})^2 + 4J_{X_c Y_c}^2}}{2J_{X_c Y_c}}$$

$$\text{最大主惯性矩 } J_{\max} = J_{\xi} = \frac{1}{2} \left[J_{X_c} + J_{Y_c} + \sqrt{(J_{Y_c} - J_{X_c})^2 + 4J_{X_c Y_c}^2} \right]$$

$$\text{最小主惯性矩 } J_{\min} = J_{\eta} = \frac{1}{2} \left[J_{X_c} + J_{Y_c} - \sqrt{(J_{Y_c} - J_{X_c})^2 + 4J_{X_c Y_c}^2} \right]$$

$$\text{抗扭惯性矩 } J_K = A^4 / 40 (J_{\max} + J_{\min})$$

$$\text{极惯性矩 } J_P = J_{\eta} + J_{\xi} = J_{X_c} + J_{Y_c}$$

计算时可按上述诸公式编程计算。见第四章附录 3 叶片频率计算程序。

应用高斯法计算时, 则有

$$A = b \sum A_i (Y_{2i} - Y_{1i})$$

$$S_X = \frac{b}{2} \sum A_i (Y_{2i}^2 - Y_{1i}^2)$$

$$S_Y = b \sum A_i X_i (Y_{2i} - Y_{1i})$$

$$J_X = \frac{b}{3} \sum A_i (Y_{2i} - Y_{1i})$$

$$J_Y = b \sum A_i X_i^2 (Y_{2i} - Y_{1i})$$

$$J_{XY} = \frac{b}{2} \sum A_i X_i (Y_{2i} - Y_{1i})$$

其余计算式见前。叶片高斯点坐标见图 1-2。

式中 b 为叶片弦长; A 为高斯系数。

对于 5 分点及 8 分点, 各 A 值如下, 取 $X = \frac{X}{b}$:

$$\begin{aligned}
 n=5 \text{ 时 } & \bar{X}_1=0.04961 \quad A_1=A_5=0.11846 \\
 & \bar{X}_2=0.23076 \quad A_2=A_4=0.23931 \\
 & \bar{X}_3=0.5 \quad A_3=0.28444 \\
 & \bar{X}_4=0.76923 \\
 & \bar{X}_5=0.95308 \\
 n=8 \text{ 时 } & \bar{X}_1=0.01986 \quad A_1=A_8=0.05061 \\
 & \bar{X}_2=0.10167 \quad A_2=A_7=0.11119 \\
 & \bar{X}_3=0.23723 \quad A_3=A_6=0.15685 \\
 & \bar{X}_4=0.40828 \quad A_4=A_5=0.18134 \\
 & \bar{X}_5=0.59172 \\
 & \bar{X}_6=0.76277 \\
 & \bar{X}_7=0.89833 \\
 & \bar{X}_8=0.98014
 \end{aligned}$$

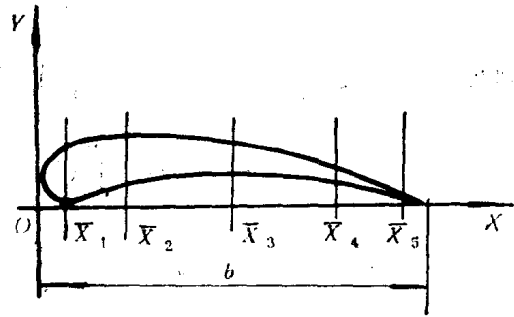


图1-2 高斯点坐标

实际上对积分的处理方法是比较多的，可以根据强度设计的要求自行选定。

第二节 离心拉伸应力计算

在旋转离心力场下，叶片受本身质量离心力作用，将产生离心拉伸应力。一般假设质量离心力仅产生沿Z轴方向的拉伸应力，且叶片在同一截面上的拉伸应力处处相等。

1. 离心拉伸应力

如图1-3所示，取叶片坐标系XYZ，OX轴为发动机轴向，取气流的流动方向为正；OY轴为旋转平面方向，取与旋转轴同旋转方向为正；OZ轴为径向方向，取半径方向为正。距旋转轴 R_1 处在叶片上取一微元体 $dX dY dZ$ ，则水平面积为 $dA = dX dY$ ，微元体的质量离心力为

$$dP = \frac{\gamma}{g} \omega^2 R_1 dA dR \quad (1-1)$$

式中： γ ——叶片材料的比重；

g ——重力加速度；

ω ——叶片的旋转角速度；

R_1 ——微元体重心到旋转轴的距离。

一般离心力 dP 与Z轴偏离一个小角度 ϕ ，由图上

知， $\cos \phi = \frac{R}{R_1}$ ，则离心力沿Z轴方向的分量为

$$dP_Z = dP \cos \phi = \frac{\gamma}{g} \omega^2 R dA dR \quad (1-2)$$

因此，面积为 $A(R)$ 在Z方向产生的离心力为

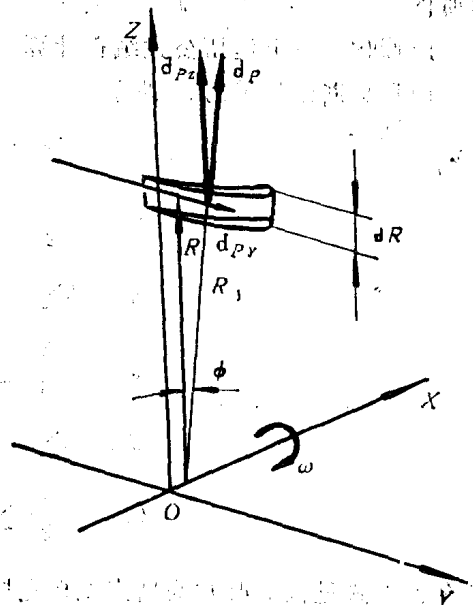


图1-3 叶片微元上离心力

$$\int_{A(R)} dP_z = \frac{\gamma}{g} \omega^2 R dR \int_{A(R)} dA = \frac{\gamma}{g} \omega^2 R A(R) dR \quad (1-3)$$

取叶尖半径为 R_t ，叶根半径为 R_b ，叶片任一截面处半径为 R ，则取叶片任一截面 R_i ($R_i = R$) 以上部分的叶片质量离心力为

$$P_i = \int_{R_i}^{R_t} \frac{\gamma}{g} \omega^2 R A(R) dR = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \int_{R_i}^{R_t} R A(R) dR \quad (1-4)$$

全叶片的离心力为

$$P = \frac{\gamma \omega^2}{g} \int_{R_b}^{R_t} R A(R) dR \quad (1-5)$$

式中： $A(R)$ ——表示面积随叶片高度变化的函数。对于任一截面上的离心拉伸应力为

$$\sigma_i = \frac{P_i}{A(R_i)} = \frac{\gamma \omega^2 \int_{R_i}^{R_t} R A(R) dR}{g A(R_i)} \quad (1-6)$$

可见只要知道叶片面积随半径 R 变化的规律，便可以求得叶片截面上的拉伸应力 σ_i 。

以往计算拉伸应力 σ_i 时，按式(1-6)进行数值积分法运算，算法较繁。如应用计算机，可按式(1-6)编程计算。

一般离心拉伸应力占据叶片总应力水平的60%~70%，并作为叶片强度造型的基础计算值。所以叶片离心拉伸应力值的计算是十分重要的。

2. 面积变化规律与拉伸应力

叶片面积变化规律不同，叶片产生的拉伸应力也不相同，叶片的造型就是根据叶片上合理应力分布的要求，来确定叶片面积的变化规律。通常叶片面积变化规律首先满足于合理的离心拉伸应力分布，然后再依据气动弯曲应力等进行修正。

(1) 等截面叶片

等截面叶片其面积沿叶高变化为一常数，即 $A(R) = \text{常数}$ 。此时拉伸应力式(1-6)为

$$\sigma_i = \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{A(R)_i \int_{R_i}^{R_t} R dR}{A(R)_i} = \frac{\gamma \omega^2}{2g} (R_t^2 - R_i^2)$$

离心拉伸应力 σ_i 与叶片面积无关。仅随半径 R 的二次曲线向叶根部增大，如图1-4(a)所示，叶片根部应力最大。

今取叶片长度为 l ，叶片长度系数为 $\lambda = \frac{D_m}{l}$ ， $D_m = R_b + R_t$ 为平均直径，其切线速度为

$$v_c = \omega R_c = \omega \frac{D_m}{2}$$

$$u_c^2 = \omega^2 \frac{D_m^2}{4}, \quad \omega^2 = \frac{4u_c^2}{D_m^2}$$