

结构力学

戴念慈题

覃作东 覃作华编译

浙江科学技术出版社

目 录

前言

第一章 定义和概念

1.1 力和力矩	1
1.2 平衡条件	3
1.3 位移和转角	4
1.4 应力	5
1.5 应变	6
1.6 应力与应变的关系式	9

第二章 静定平面结构

2.1 平面结构, 支座和反力	12
2.2 平面桁架	14
2.3 平面桁架的分析	20
2.4 剪力和弯矩	23
2.5 影响线	34

第三章 空间静力学和空间结构的分析

3.1 空间静力学	43
3.2 空间结构的约束	45
3.3 静定空间结构	46
3.4 静定空间桁架	49
3.5 静定空间桁架的分析	50

第四章 结构的基本概念

4.1 作用力和反力	60
4.2 位移和相应位移	60
4.3 作用力和位移的相关性	63
4.4 作用力和位移的叠加——影响系数	63
4.5 变形协调	66
4.6 功和余功	69
4.7 荷载——位移的线性关系	69
4.8 应变能和余能	72
4.9 应变能的叠加	73
4.10 弹性结构中的影响系数互等	74
4.11 弹性结构中广义互等定理, 贝梯定理	77
4.12 莫纳——勃力斯洛 (Mueller-Breslou) 原理	78
4.13 虚功原理	81
4.14 虚功原理的应用(1)	82
4.15 虚功原理的应用(2)	90

4.16 能量法在结构分析中的应用	105
4.17 图乘法	109
第五章 刚度和柔度	
5.1 刚度系数——棱柱体杆件	121
5.2 杆件的刚度和柔度方程	125
5.3 坐标变换	129
5.4 角变位移法	137
第六章 弯矩分配	
6.1 弯矩分配法	144
6.2 基本概念——术语	144
6.3 连续梁	145
6.4 平面结构的分析	149
6.5 铰支和悬臂端结构的分析	151
6.6 支座沉陷	153
6.7 有侧移框架的分析	154
第七章 刚度矩阵法	
7.1 引言	165
7.2 简单举例——刚度法	165
7.3 假定	166
7.4 符号和轴	166
7.5 单元刚度	167
7.6 坐标变换	168
7.7 变形协调	170
7.8 力的平衡条件	170
7.9 结构的刚度矩阵	171
7.10 结点的约束和对称性的利用	172
7.11 内部铰结点	174
7.12 刚性框架的实例分析	177
7.13 铰接结构	180
7.14 铰接桁架实例分析	181
7.15 节间荷载	183
7.16 温度效应和安装不足	185
7.17 连续梁分析	185
7.18 三维单元刚度矩阵	188
习题	189
第八章 柔度矩阵法	
8.1 基本公式	200
8.2 联结矩阵	205
8.3 柔度矩阵法	208

习题	211
第九章 压杆和框架的失稳	
9.1 铰支端压杆和欧拉压曲临界荷载	214
9.2 几个简单的压杆问题	217
9.3 压杆的实际性能	220
9.4 钢压杆的允许应力	227
9.5 复杂压杆	229
9.6 稳定问题的解—虚功方法	232
9.7 压弯构件的刚度, 稳定函数	235
9.8 侧向荷载对嵌固梁端部弯矩的影响	240
9.9 平面框架的弹性失稳	243
习题	245
第十章 结构动力学	
10.1 目的	248
10.2 单自由度结构	248
10.3 单自由度结构的自由振动	249
10.4 单自由度体系的强迫振动	255
10.5 多自由度体系的自由振动	262
10.6 多自由度体系的强迫振动	271
10.7 具有无限多自由度体系的振动	273
习题	274
第十一章 有限单元法	
11.1 离散单元的集合	277
11.2 弹性连续体	279
11.3 平面应力的三角形单元	280
11.4 平面应力的矩形单元	289
11.5 变换矩阵	292
11.6 结构刚度矩阵的集成	294
11.7 用于二维和三维分析中的各种单元	296
11.8 计算机流程图	298
习题	306
第十二章 电子计算机的应用	
12.1 刚度矩阵法的流程图	308
12.2 流程图—平面框架的弹性临界荷载	313
12.3 大型线性方程组的求解	314
12.4 矩阵带状特性的利用	318
12.5 特征值和特征向量	320
12.6 按刚度矩阵的降价—子结构的应用	325

第一章 定义和概念

1.1 力和力矩

作用于物体任意点的力都可以用力在坐标轴上的投影 x 、 y 、 z 来表示。如图1.1-1所示, 力 P 以向量 OA 表示, 它在 x 、 y 、 z 轴的投影可以分别通过其与坐标各轴的三角关系求得, 即

$$P_x = P \cos \alpha, \quad P_y = P \cos \beta, \quad P_z = P \cos \gamma \quad (1.1-1)$$

将 P_x 、 P_y 、 P_z 称为力 P 的分力, 力 P 称为 P_x 、 P_y 、 P_z 的合力。于是, 合力 P 可以用一个列阵来表示。

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = [P_x P_y P_z]^T \quad (1.1-2)$$

由方程(1.1-1)可知, 分力的大小仅取决于力 P 的大小和作用方面, 而与力 P 的作用点无关。这就是说, 只要力 P 的大小和作用方向不变, 在求解它的分力时, 是否取其作用点为坐标原点是无关紧要的。由此可见(1.1-1)式适用于求解任意力或力系对某一坐标的投影。

现在, 我们来求解力系 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 在某一坐标的投影。具体详见图1.1-2

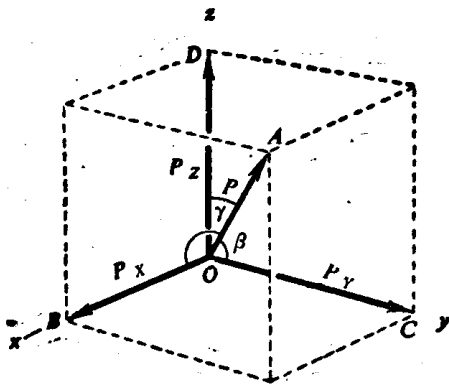


图 1.1-1

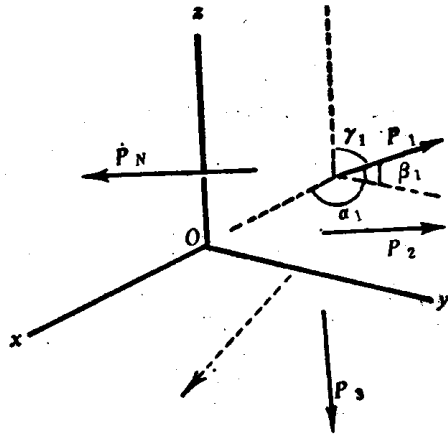


图 1.1-2

由(1.1-2)式可得

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{z2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad P_n = \begin{bmatrix} P_{xn} \\ P_{yn} \\ P_{zn} \end{bmatrix} \quad (1.1-3)$$

式中

$$\begin{aligned} P_{x1} &= P_1 \cos \alpha_1, & P_{y1} &= P_1 \cos \beta_1, & P_{z1} &= P_1 \cos \gamma_1 \\ P_{x2} &= P_2 \cos \alpha_2, & P_{y2} &= P_2 \cos \beta_2, & P_{z2} &= P_2 \cos \gamma_2 \\ &\dots & & \dots & & \dots \\ P_{xn} &= P_n \cos \alpha_n, & P_{yn} &= P_n \cos \beta_n, & P_{zn} &= P_n \cos \gamma_n \end{aligned}$$

将上述相应的分力相加便得到 n 个力的合力

$$\begin{aligned}
 P_1 + P_2 + \cdots + P_n &= \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} P_{xn} \\ P_{yn} \\ P_{zn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{x1} + P_{x2} + \cdots + P_{xn} \\ P_{y1} + P_{y2} + \cdots + P_{yn} \\ P_{z1} + P_{z2} + \cdots + P_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum P_x \\ \sum P_y \\ \sum P_z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (1.1-4)$$

当合力为零时, (1.1-4) 式为

$$\begin{bmatrix} \sum P_x \\ \sum P_y \\ \sum P_z \end{bmatrix} = 0 \quad (1.1-5)$$

(1.1-4) 式表明任何力系均可合成一个合力, 下面讨论任何力系同时又均可合成一力矩。

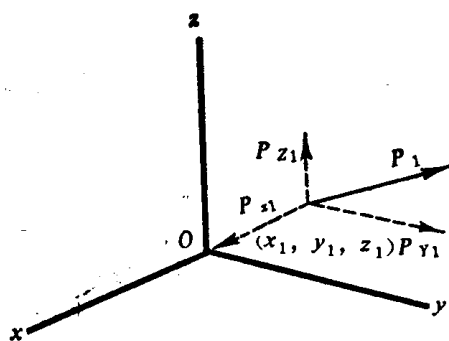


图 1.1-3

图 1.1-3 给出力 P_1 在坐标轴上的投影为 P_{x1} , P_{y1} , P_{z1} , 其作用点的坐标值为 x_1 , y_1 , z_1 , 试求 P_1 对坐标轴的力矩。

力矩为力与力臂之乘积, 由方程 (1.1-3) 可知, P_1 对坐标轴的力矩等于其分力对坐标轴的力矩之和, 于是

$$\begin{aligned}
 M_{x1} &= (P_1 \text{ 对 } x \text{ 轴的力矩}) = P_{z1}y_1 - P_{y1}z_1 \\
 M_{y1} &= (P_1 \text{ 对 } y \text{ 轴的力矩}) = P_{x1}z_1 - P_{z1}x_1 \\
 M_{z1} &= (P_1 \text{ 对 } z \text{ 轴的力矩}) = P_{y1}x_1 - P_{x1}y_1
 \end{aligned} \quad (1.1-6)$$

按上述同样的方法可求得力系 $P_1, P_2 \cdots P_n$ 对任一坐标轴的力矩。

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_{x1} \\ m_{y1} \\ m_{z1} \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} m_{x2} \\ m_{y2} \\ m_{z2} \end{bmatrix}, \quad \cdots M_n = \begin{bmatrix} m_{xn} \\ m_{yn} \\ m_{zn} \end{bmatrix} \quad (1.1-7)$$

将上述相应的力矩相加便得到力系合成的一个合力矩。

$$\begin{aligned}
 M_1 + M_2 + \cdots + M_n &= \begin{bmatrix} m_{x1} \\ m_{y1} \\ m_{z1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{x2} \\ m_{y2} \\ m_{z2} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} m_{xn} \\ m_{yn} \\ m_{zn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} m_{x1} + m_{x2} + \cdots + m_{xn} \\ m_{y1} + m_{y2} + \cdots + m_{yn} \\ m_{z1} + m_{z2} + \cdots + m_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum m_x \\ \sum m_y \\ \sum m_z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (1.1-8)$$

或

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \begin{bmatrix} \sum (P_{zy} - P_{yz}) \\ \sum (P_{xz} - P_{zx}) \\ \sum (P_{yx} - P_{xy}) \end{bmatrix} \quad (1.1-9)$$

当力矩之和为零时, (1.1-8) 式为

$$\begin{bmatrix} \sum M_x \\ \sum M_y \\ \sum M_z \end{bmatrix} = 0 \quad (1.1-10)$$

在结构分析中,通常将(1.1-3)和(1.1-7)式的列矩阵称为力向量和弯矩向量。

在本书中规定上述图中给出的坐标为正,力以沿坐标轴正方向的正,沿坐标轴负方向的为负。力矩以右手四指绕坐标轴转,大拇指指向坐标轴正方向的为正,反之为负,如图1.1-4所示:

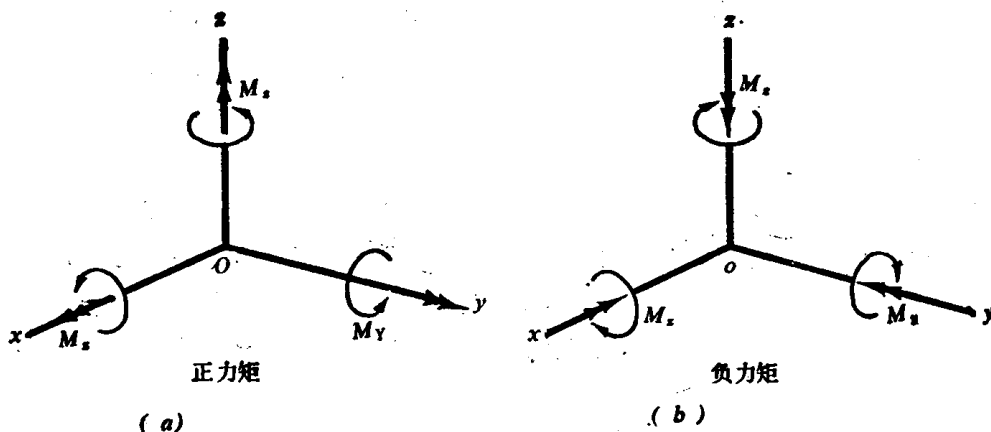


图 1.1-4

为了使方程式表达简明,可分别用力向量 P_R 和力矩向量 M_R 表示作用在物体上的力系合成的合力和合力矩。并用广义力向量 P 表示 P_R 和 M_R 。于是,可用列阵表示为

$$P = \begin{bmatrix} P_R \\ M_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma P_x \\ \Sigma P_y \\ \Sigma P_z \\ \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{bmatrix} \quad (1.1-11)$$

当物体某点仅作用一个力和一个力矩时,(1.1-11)式为

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (1.1-12)$$

1.2 平衡条件

图1.2-1给出一物体在受任意方向的 n 个力和 m 个力矩的作用下处于平衡。

根据由牛顿第二定律物体平衡必然具备

- (1) 合力为零
- (2) 由 n 个力产生的弯矩和 m 个弯矩之和为零

上述二点即为平衡条件,其平衡方程可以下列矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} \Sigma P_x \\ \Sigma P_y \\ \Sigma P_z \end{bmatrix} = \quad (1.2-1(a))$$

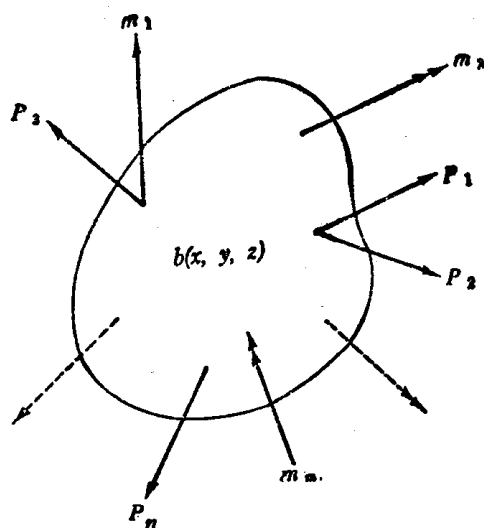
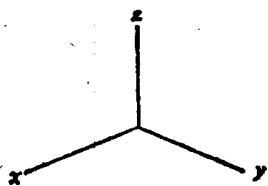


图 1.2-1

和

$$\begin{bmatrix} \Sigma(P_x y - P_y z) \\ \Sigma(P_x z - P_z x) \\ \Sigma(P_y x - P_x y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma m_x \\ \Sigma m_y \\ \Sigma m_z \end{bmatrix} = 0 \quad (1.2-1(b))$$

(1.2-1(b))式,通常简化为

$$\begin{bmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{bmatrix} = 0 \quad (1.2-1(c))$$

上式中 ΣM_x 表示为 $\Sigma(P_{zy} - P_{yz}) + \Sigma m_x$, 其余类推。值得指出, 方程(1.2-1)与坐标的选择无关, x, y, z 可以任意选择三个相互垂直的轴。在平面力系中, 平衡方程又可简化为

$$\Sigma P_x = 0 \quad \Sigma P_y = 0 \quad \Sigma M = 0 \quad (1.2-2)$$

式中 ΣM 也可理解为 ΣM_x 。

1.3 位移和转角

图1.3-1为一匀质薄层的平面物体, 其 b 点作用力 P , 一般说来, 在力 P 作用下, 除了物体的 A, B, C 点受支座的约束不产生位移外, 其余各点都产生位移。

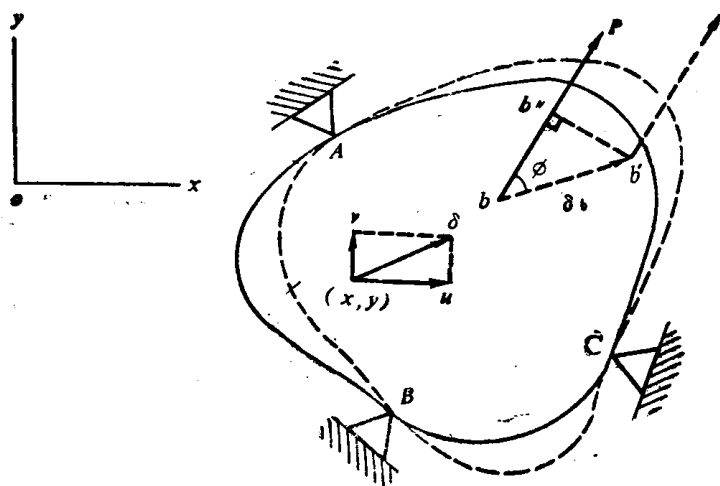


图 1.3-1

在平面物体任一点 (x, y) 的位移通常以 δ 表示,而 δ 沿 x 和 y 轴方向的分量分别用 u 和 v 表示。 δ 的列阵表达式为

$$\delta = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [u \ v]^T \quad (1.3-1)$$

上式通常称为任一点 (x, y) 的位移向量。值得注意, b 点的位移向量 δ_b 一般说来和力 P 的作用方向不一致, 我们将和力 P 作用方向一致的 δ_b 的位移分量称为相应位移或相应挠度, 由图1.3-1知

$$\text{相应位移} = b b'' = \delta_b \cos \phi \quad (1.3-2)$$

在力作用下, 物体任一点在产生线位移的同时, 一般来说还产生转角 θ 。平面结构只产生绕 z 轴旋转的转角, 而对空间结构来说, 转角 θ 以绕三个坐标轴旋转的转角分量表示, 即

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = [\theta_x \ \theta_y \ \theta_z]^T \quad (1.3-3)$$

(1.3-3) 或称为空间物体任一点 (x, y, z) 的转角向量。同样, 空间结构的线位移向量为

$$\delta = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [u \ v \ w]^T \quad (1.3-4)$$

式中 w 为沿 z 轴的线位移

为了使方程简明, 用广义位移向量 δ 表示位移和转角向量。

$$\text{平面结构} \quad \delta = [uv\theta]^T \quad (1.3-5)$$

$$\text{空间结构} \quad \delta = [uvw\theta_x\theta_y\theta_z]^T \quad (1.3-6)$$

前面根据图1.3-1讨论了平面结构的相应位移, 据此推广可确定空间结构的相应位移。若物体某点的广义力向量为 $[P_x P_y P_z M_x M_y M_z]^T$, 广义位移向量为 $[uvw\theta_x\theta_y\theta_z]^T$, 则广义位移向量的分量为对应的广义力向量的分量的相应位移。

1.4 应力

弹性体受力以后, 其内部便产生应力, 为描述弹性物体内某一点 A 的应力, 在这一点从物体割取一个微平行六面体, 其棱边分别平行于坐标轴且长度为 $AA' = dx$, $AB = dy$, $AD = dz$, 如图1.4-1所示。将每一面上的应力分解为一个正应力和二个剪应力, 分别与相应的坐标轴平行。正应力用字母 σ 表示。为表明这个应力的作用面和作用方向, 加上一个脚码。例如, 正应力 σ_x 表示其作用面与 x 轴垂直, 作用方向沿 x 轴。剪应力用字母 τ 表示, 加上二个脚码。前一个脚码表示其作用面垂直于哪一个坐标轴, 后一个脚码表示其作用方向沿哪一个坐标轴, 例如, 剪应力 τ_{xy} 是表示其作用面垂直于 x 轴, 作用方向沿 y 轴。

倘若某一面上的外法线是沿坐标轴的正方向, 那么这个面上的法向应力和剪应力就以沿坐标轴正方向的为正, 沿坐标轴负方向的为负。相反, 如果某一面上的外法线是沿坐标轴的负方向, 那么这个面上的法向应力和剪应力就以沿坐标轴负方向的为正, 沿坐标轴正方向的为负。图1.4-1中所示应力全都是正的。在应力分析中, 对于法向应力习惯上将拉应力取为正, 将压应力取为负。

六个剪应力并不是互不相关而是两两相等的。例如, 以 $\tau_{xy} dy dz$ 表示 $A'B'C'D'$ 和 $ABCD$ 面上的剪力, 以 $\tau_{yx} dx dz$ 表示 $BB'C'C$ 和 $AA'D'D$ 面上的剪力, 分别对 z 轴取矩, 由于对 z 轴不

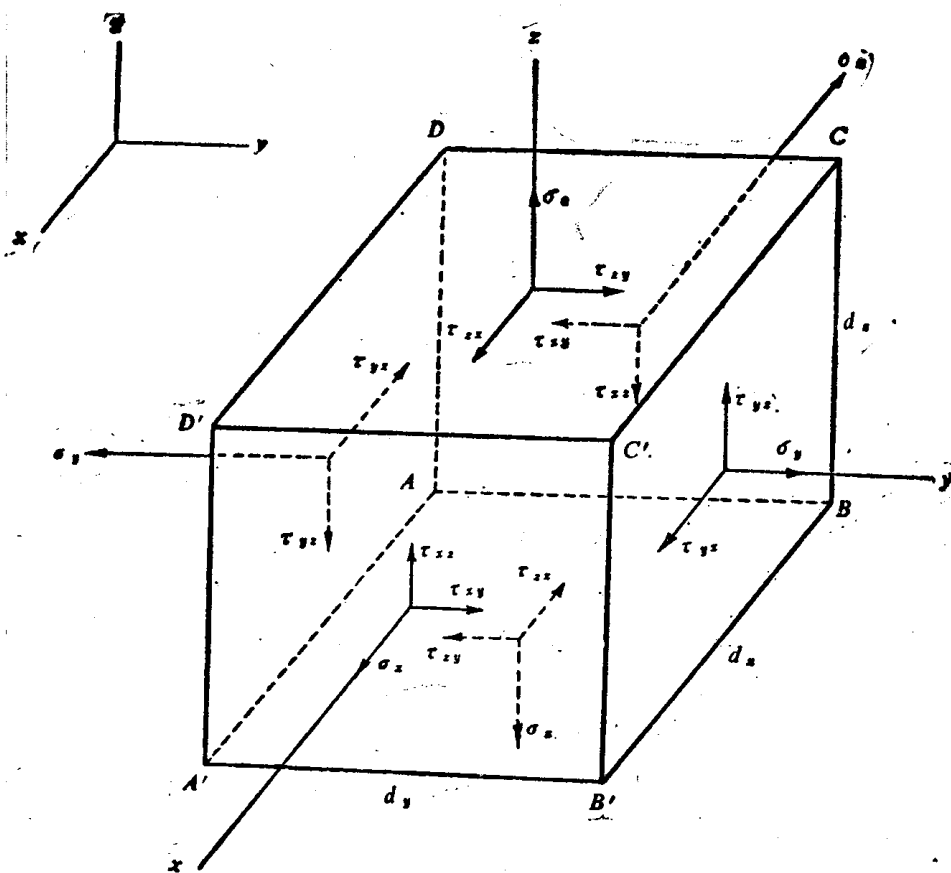


图 1.4-1

产生转动，故对 z 轴的力矩和必为零。于是

$$(\tau_{xy} dy dz) dx - (\tau_{yx} dx dz) dy = 0$$

按同样的方法可建立其他二个相似的方程式。并经简化后可得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1.4-1)$$

上式即为剪应力互等定律：作用在二个互相垂直面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的（大小相等，正负号一致）。因此，剪应力记号的二个脚码可对调。这样，微六面体上的九个应力便简化为六个应力。

可以证明，只要 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 这六个量在 A 点是已知的，经该点任何面上的应力都可以求得。因此，这六个量可以完全确定该点的应力状态。我们将它们称为该点的应力分量并用广义应力向量 σ 表示。

$$\sigma = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]^T \quad (1.4-2)$$

通常将(1.4-2)式称为一点 (xyz) 的应力向量。

在图1.4-1中，微六面体的边分别与坐标系 $Oxyz$ 的轴平行。其重心为图1.2-1中所示物体的点 $b(xyz)$ 。若考虑另一微六面体的重心同为物体的 b 点，只是其各边与新坐标系 $Oxyz$ 的轴平行。于是第二个微六面体的应力向量为

$$\sigma(Oxyz) = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]^T \quad (1.4-3)$$

(1.4-3)式中的应力分量不同于(1.4-2)式中的应力分量，但是，只要应力向量 $\sigma(Oxyz)$ 的应力分量已知， $\sigma(Oxyz)$ 的应力分量便可容易确定。

1.5 应变

正应变。图1.5-1为一棱杆，在轴力或温度等其他因素作用下，由其原来的长度 L 延长至 L' 。此时，在距固端 x 的 A 点移至 A' ，位移值为 u ， u 为 x 的函数。距 A 点 dx 的 B 点移至 B' ，位移值为 $u + (du/dx)dx$ 。棱杆在固端的位移值为零，在自由端的位移值为 $l' - l$ 。于是

$$\overline{OA'} = x + u$$

$$\overline{OB'} = x + dx + u + (du/dx)dx$$

$$\overline{A'B'} = [x + dx + u + (du/dx)dx] - (x + u)$$

$$= dx + (du/dx)dx$$

A 点的正应变或轴向应变为

$$\epsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{[dx + (du/dx)dx] - dx}{dx} = \frac{du}{dx} \quad (1.5-1)$$

倘若 du/dx 对整个杆长来说为常数，则杆的正应变为

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{du}{dx} = \frac{\text{自由端的 } u - \text{固定端的 } u}{l} \\ &= \frac{(l' - l) - 0}{l} = \frac{l' - l}{l} \end{aligned} \quad (1.5-2)$$

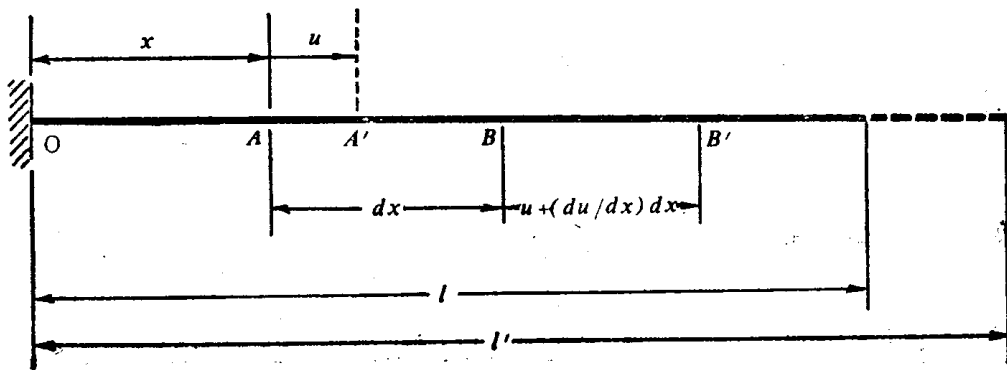


图 1.5-1

在实际工程中，大多数结构都是由一些等截面的直杆组成。当直杆受轴力作用时，在整个杆件的长度范围内的应变增量 du/dx 非常接近常数。因此，方程(1.5-2)通常用于确定杆件的正应变。由于 ϵ 值是由纵向或轴向位移引起，故也可称为杆件的纵向应变或轴向应变。

我们规定拉应变为正，压应变为负。

图1.5-2为匀质薄层的平面物体中的二条小的线单元， AB 段长度为 dx ， AC 段长度为 dy ，并分别与 x 轴和 y 轴平行。在力作用下，假设 A, B, C 三点分别移至 A', B', C' 。

由此便可导出 AB 段和 AC 段的正应变 ϵ_x 和 ϵ_y 的方程式，根据图中几何关系可求得 $A'B'$ 段在 x 坐标轴上的投影长度为 $dx + (\partial u/\partial x)dx$ ， $A'B'$ 段在 y 坐标轴上的投影长度为 $(\partial v/\partial x)dx$ ， $A'B'$ 段实际长度为 $[1 + (\partial u/\partial x)]dx$ ，于是 AB 段的正应变方程式为

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{[1 + (\partial u/\partial x)]dx - dx}{dx} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.5-3(a))$$

同样 AC 段的正应变方程式为

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.5-3(b))$$

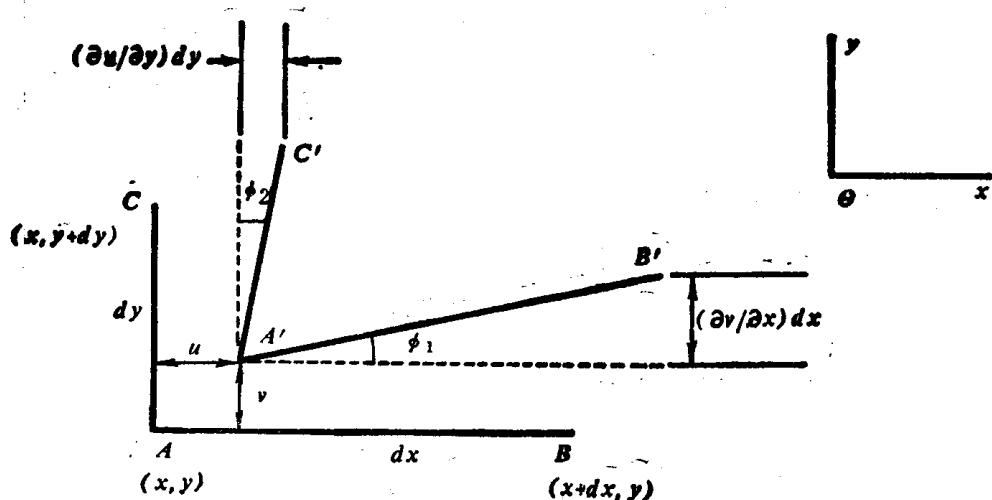


图 1.5-2

在空间物体的正应变分析中，多一个沿 z 轴的正应变方程式 $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ 其整个表达式为

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (1.5-4)$$

剪应变，图 1.5-2 中，微小线单元 AB 和 AC 之间的直角改变，定义为剪应变 γ_{xy} ，其表达式为

$$\gamma_{xy} = \angle CAB - \angle C'A'B' = \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi_1 = \sin \phi_1 = \frac{(\partial v / \partial x) dx}{dx(1 + \epsilon_x)} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{因 } \epsilon_x \ll 1); \quad \text{同理 } \phi_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

则 $\gamma_{xy} = \phi_1 + \phi_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$

按照上述同样方法，可建立空间物体的剪应变表达式

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (1.5-5)$$

值得指出的是方程 (1.5-4) 和 (1.5-5) 是基于小位移的假设而推导得出的。应变是以位移分量 u, v, w 的形式表示的。位移取为坐标 x, y, z 的连续函数，并且对 x, y, z 应具有连续导数。这些应变—位移关系是几何的，所以位移不论是由于应力还是由于温度变化或其他因素所引起，应变—位移间的关系仍是一样的。

对于刚体位移的情况，因整个物体的 u, v, w 为常数，因而对方程 (1.5-4) 和 (1.5-5) 求导后应变分量均为零。同时，上述方程还表明，物体任一点 (x, y, z) 只有六个独立的应变分量。我们将其称为点 (x, y, z) 的应变向量。并用列阵表示

$$\epsilon = [\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}]^T \quad (1.5-6)$$

在1.4节尾部结论：当应力向量 $\sigma(Oxyz)$ 已知时，那么对于不同坐标轴的应力向量 $\sigma(Oxyz)$ 即可确定。同样可结论：当形变向量 $\varepsilon(Oxyz)$ 已知时，那么与其不同坐标轴的形变向量 $\varepsilon(Oxyz)$ 也可确定。

1.6 应力与应变的关系式

在前面二节中已分别叙述了应力和应变，并指出应变可以由除了应力以外的其他因素引起。本节将讨论应力和由其引起的应变之间的关系式。

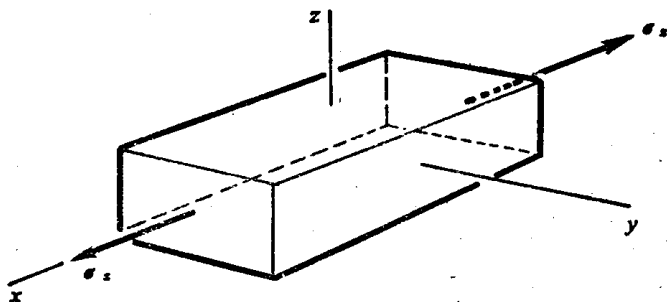


图 1.6-1

由虎克定律可知，如果一矩形方块(图1.6-1)受均布法向应力 σ_x 作用，那么由此产生的法向应变 ε_x 和 σ_x 成正比，即

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = E \quad \text{或} \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (1.6-1)$$

式中 E 为材料的弹性模量，由于 $\varepsilon = \frac{\Delta l}{L}$ ，且无量纲，所以 E 的量纲和应力 σ 的量纲相同，方程1.6-1中应力和应变的比例关系通称为虎克定律。对于各向同性的弹性体来说 E 值一样，于是当物体只受垂直于 y ——轴面的均布应力 σ_y 作用时，可得

$$\frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = E \quad \text{或} \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad (1.6-2)$$

同样，当物体只受垂直于 z ——轴面的均布应力 σ_z 作用时，可得

$$\frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} = E \quad \text{或} \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (1.6-3)$$

参照图1.6-1，如果移去应力 σ_x ，应变 ε_x 将趋向消失。当应变随应力的移去而完全消失，那么该材料称为理想的弹性体。在结构工程中使用的绝大多数材料由于应力在相应弹性极限值以下，而考虑为理想的弹性材料。同时，对已知的某一材料来说，只有当应力在相应的比例极限值以下时才服从虎克定律。对大多数结构材料而言，通常假设比例极限值和弹性极限值是一致的，因此，当应力在弹性极限范围内时，材料是理想的弹性体，同时，服从虎克定律，在这种条件下材料称为线弹性。

此外，在考虑图1.6-1所示方块时，注意力应集中在和应力 σ_x 同方向的应变 ε_x 上，实际上 ε_x 总是和侧向应变 ε_y 和 ε_z 伴随， ε_y 和 ε_z 与 ε_x 成比例，但符号相反，当仅作用 ε_x 时它们的关系式为

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\gamma \frac{\sigma_x}{E} \quad (1.6-4)$$

式中 γ 为材料的泊桑比。

根据单向应力状态下的各应变之间的关系，便可建立三向应力作用下，应力分量和应变分量之间的关系式：

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1.6-5(a))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad (1.6-5(b))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (1.6-5(c))$$

这些方程完全确定了矩形方块在法向应力 σ_x 、 σ_y 和 σ_z 作用下的变形,值得注意的是法向应力只产生轴法向应变而不产生剪应变,也就是说,矩形方块的每个面保持矩形,一般来说,对各向同性且线弹性材料可以证明:

(a) 法向应变 ε_x 、 ε_y 和 ε_z 只是法向应力 σ_x 、 σ_y 和 σ_z 的函数而和同时可存在的剪应力无关。

(b) 剪应变 γ_{xy} 只是剪应力的函数而和法向应力和剪应力 τ_{yz} 和 τ_{zx} 无关;同样 γ_{yz} 只是 τ_{yz} 的函数, γ_{zx} 只是 τ_{zx} 的函数。

因此在微单元同时受法向应力和剪应力作用的一般情况下(图1.4-1),法向应变仍由方程1.6-5求得,而剪应变由下列求得

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (1.6-6)$$

式中 G 为材料的剪切模量, ν 为泊桑比, E 为材料的弹性模量,三者之间有如下关系

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.6-7)$$

方程(1.6-5)和(1.6-7)加起来,且用下列矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

即

$$\varepsilon = N\sigma \quad (1.6-8)$$

上式中常数 G 已变换为 $E/[z(1+\nu)]$,根据方程(1.6-3)和(1.6-6)应力可用应变形式来表示

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

即

$$\sigma = D\varepsilon \quad (1.6-9)$$

式中 D 为(1.6-8)式中 N 的逆矩阵,平面应力,平面应力系指 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ 的应力状态。因

此,在平面应力状态中,只有 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 不等于零。

于是方程1.6-8可简化为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.6-10)$$

经变换后便求得下列平面应力矩阵

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.6-11)$$

值得指出的是在平面应力状态中, ε_z 不等于零。可通过方程1.6-5(c)中 $\sigma_z = 0$ 得到,即

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \quad (1.6-12)$$

平面应变,平面应变系指 $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ 的应变状态。因此,在平面应变状态中,只存在 ε_x , ε_y 和 γ_{xy} 。

于是方程1.6-9简化为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.6-13)$$

经变换后便求得下列平面形变

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.6-14)$$

注意在平面应变状态中, σ_z 不等于零,可由方程1.6-5(c)得到

$$0 = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

因此

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (1.6-15)$$

第二章 静定平面结构

2.1 平面结构, 支座和反力

平面结构意指结构位于都在同一平面内, 而且外力一般也认为作用在平面内。图2.1-1给出了几种不同类型的平面结构, 它们是: (a) 薄板; (b) 平面桁架—在同一平面内由若干端部相互铰接的直杆组成; (c) 拱—在同一平面内一根两端受支座约束的曲杆; (d) 简支梁; (e) 悬臂梁。

通常假设平面结构所承受的荷载位于同一平面内。但这种假设不是平面结构分析时必须具备的条件, 实际上, 在某些情况(如楼板承受的荷载是与其平面垂直的)中上述假设条件显然是无效的。不过在本章中, 只讨论与结构为同一平面内的荷载情况。

某些结构在外力作用下, 由于受支座的约束不产生刚体位移。如在图2.1-1中所示的几种支座类型用不同符号表示。如图(a)中的支座A, 图(b)中的支座D, 图(c)中的支座E, 图(d)中的支座G均为铰支座。结构可以绕支点转动, 但沿支座面的水平方向和垂直方向的位移则被限制。因此, 结构在荷载作用下, 支座有水平反力和垂直反力。图中用反力符号 $\uparrow$ 表示。图(a)中的支座B, 图(b)中的支座C, 图(c)中的支座F, 图(d)中的支座H均为滚轴支座。结构可以绕支点转动, 又可以沿支座面的水平方向移动, 但支座面垂直方向的位移则被限制。因此, 结构在荷载作用下支座反力垂直于NN面。图中用反力符号 $\uparrow$ 表示。图(e)中支座J为固定支座。结构在固定支座的转动, 水平位移和垂直位移全被限制。因此, 结构在荷载作用下, 支座有反力矩, 水平反力和垂直反力。图中用反力符号 $\curvearrowright$ 表示。

在求解平面结构时, 只有下列三个平衡方程

$$\sum P_x = 0 \quad \sum P_y = 0 \quad \sum M = 0 \quad (2.1-1)$$

因此, 由上述静力平衡方程可确定结构最多的未知反力数目是三个。如果作用力和反力的延线交于一点或者互相平行时, 只需确定二个反力。于是, 当某一结构的所有反力能由方程(2.1-1)确定时, 便将该结构称为外部静定结构。在图2.1-1中所示的每个结构由于都只有三个反力, 所以都是外部静定结构。

根据图2.1-1中所示的一些结构, 可论证下述结论, 即在力系作用下, 平面结构必须具有三个反力才能维持自身的平衡。倘若支座只有二个反力, 那么该结构就有可能不能维持自身的平衡。例如, 将图2.1-1(a)中铰支座A换成滚轴支座后, 结构因支座A去掉了沿支座面的水平反力, 而只有二个分别垂直支座面A和B的反力, 在力系作用下该结构就会发生水平位移, 从而失去原平衡状态。另一方面, 如果结构具有的反力数目多于三个时, 也就是说, 结构的反力不能由方程(2.1-1)全部确定时, 便将该结构称为外部超静定结构。例如, 将图2.1-1(c)中滚轴支座F换成铰支座后, 结构因支座F增加了沿支座面的水平反力, 而具有二对分别与支座面E和F水平垂直的反力。此时因拱的反力数目大于3, 而变成外部超静定结构。

必须强调, 在一般情况下, 满足静定平面结构的三个反力的作用方向, 既不是全部相互平行也不是全部交于一点。虽然, 在某些特殊情况下例外, 如图2.1-2中(a)和(b)示, 三个反力作用方向全部相互平行的滚轴支座((b)中滚轴支座以支杆*表示)的梁只有在垂直荷载作用下

注: 支杆是习惯用以表示支座的链杆并被认为是刚性的

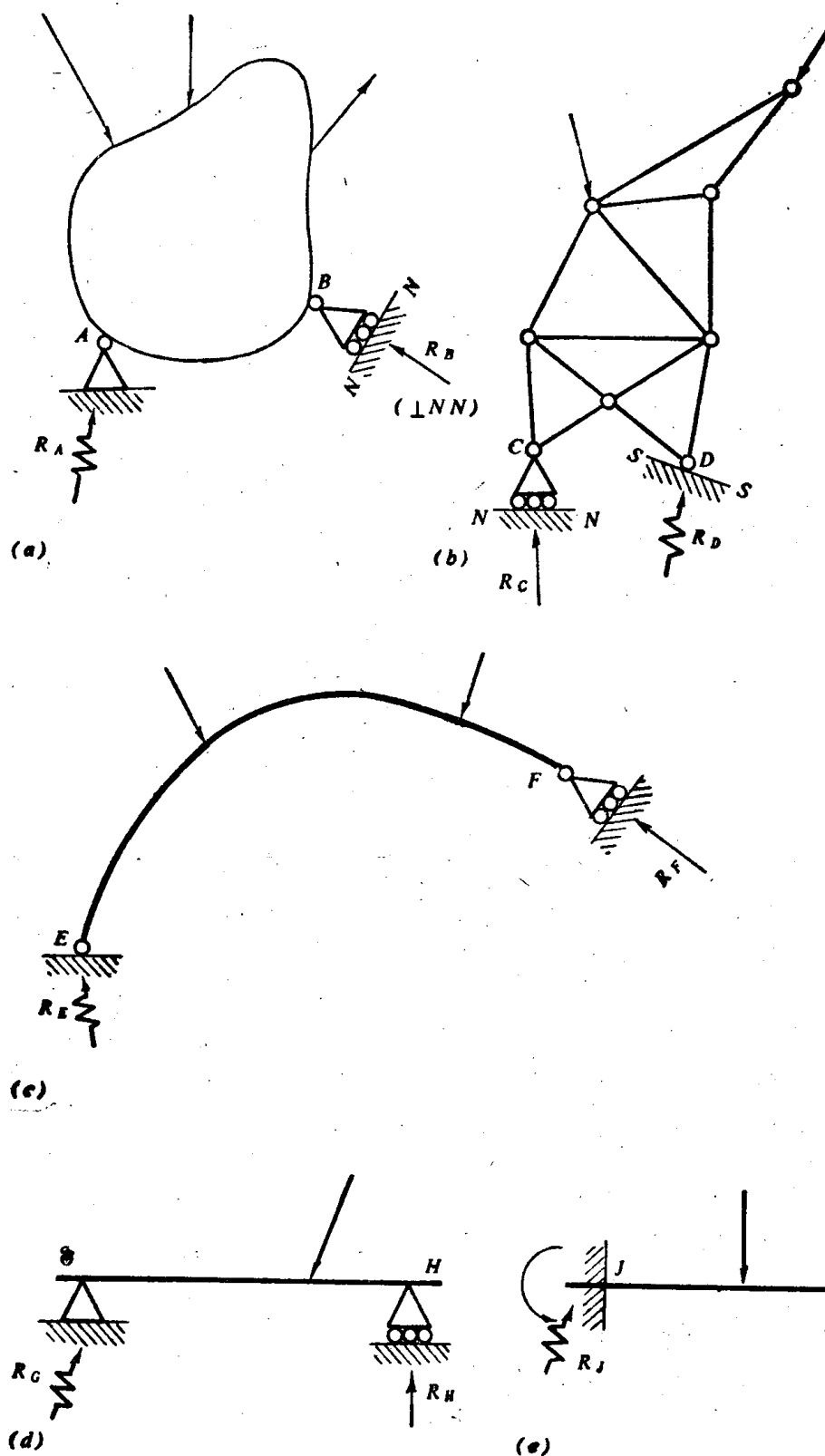


图 2.1-1

才处于平衡。再如图 2.1-2 中(c)和(d)示,三个反力作用方向全部交于一点的滚轴支座((d)中滚轴支座以支杆表示)的梁只有在荷载作用延线与反力延线交于一点时才处于平衡,所以在实际工程中不应采用图 2.1-2 中所示支座的布置形式。