误差分布论

WUCHA FENBULUN

刘智敏 著

原子能出版社

误差分布论

The Theory of Error Distribution

刘智敏　著

by Liu Zhimin

原子能出版社

内 容 简 介

本书论述了误差与数据处理的基础——误差分布论。全书分十六章，第一至第五章介绍矩阵与概率知识，第六第七章讨论正态分布、小子样分布及其它基本分布，第八第九章介绍多元分布及估计检验多组误差分析，第十章讨论最小二乘法中的分布，第十一第十二章介绍和讨论非中心分布、Wishart 分布、Hotelling 分布与经验公式中的分布，第十三至第十五章研究粗差分布、投影误差分布及威布尔分布，第十六章介绍不确定度。书中引用了最新科研成果，并尽量将理论与实际应用结合起来。

本书是在作者为中国科学院研究生院、清华大学等单位讲课的讲稿基础上写成的，可供科学工作者，特别是实验人员、计量人员使用，亦可供工程设计人员、高等院校和研究生院（部）有关专业师生参考。

误 差 分 布 论

刘智敏 著

原子能出版社出版

（北京2108信箱）

重庆印制一厂印刷

（重庆市中区枇杷山后街79号）

新华书店总店科技发行所发行 · 新华书店经售

☆

开本787×1092 1/32 · 印张14.75 · 字数 326 千字

1988年 8 月北京第一版 · 1988年 8 月北京第一次印刷

印数 1—2800

统一书号：15175·835　　定价：3.75元

ISBN 7-5022-0069-X/O·7

前　言

误差与数据处理对科学研究和生产实践极为重要，它是分析科学实验和测量结果的必不可少的知识，各科研机构、国民经济各部门和高等院校对这一学科都极其重视，目前对它的研究愈来愈多。为了深入掌握这一学科，必须研究它的基础——误差分布论。

本书介绍了概率基本概念后，接着介绍了数据处理必需的近代矩阵知识，然后讨论了随机变量性质和特征。在此基础上，详细讨论了误差分析中所需用的正态分布、小子样分布、两点分布、均匀分布及反正弦分布等基本分布。为了分析大量数据，讨论了多元分布、估计理论假设检验与多组测量误差分析以及最小二乘法中的分布，接着讨论和研究了非中心分布、Wishart 分布、Hotelling 分布和经验公式中的分布。最后仔细分析了近代提出的粗差分布、投影误差分布、威布尔分布及其应用。这些都是误差与数据处理使用和研究中所必须了解的分布。最后以国际讨论结果为基础介绍了不确定度的知识。

本书引用了最新科研成果，全书既有理论，也有它们的应用。它不但是学习误差与数据处理所必须知道的内容，也是深入研究误差与数据处理所必须了解的基础理论。

本书是在多次讲课的讲稿基础上修改而成的，不妥之处，切盼指正。

刘智敏

于中国计量科学研究院

目　录

第一章　概率概念

第一节　概率定义

一、概率的古典定义

若实验时，有且只有几个可能发生的情况，并且每个情况都是等可能的，其中恰有 m 个情况具有性质 E，则 E 出现的概率

$$P(E)=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

例 1　箱中有20个球，其中12个为白球，8个为黑球，称摸出白球的事件为 E，求摸出白球概率 $P(E)$。

因球总数为20，表明可能结果有20个，导致白球出现的结果有12个，故

$$P(E)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

加法性质　若 A_1，A_2，…，A_m 是 m 个两两互不相容（即任两个不能同时出现）的事件，则至少一个 A_i 出现的概率

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m) \tag{1.2}$$

乘法性质　若 A_1，A_2，…，A_m 是 m 个互相独立的事件（一事件的出现与否不影响其它事件的出现），则各 A_i 同时出现的概率

$$P(A_1A_2\cdots A_m)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_m) \qquad (1.3)$$

例 2 数字舍入时，以末位1为单位，当尾数小于0.5时舍去，大于0.5时进1，等于0.5时视末位为奇则进1，为偶则舍去，求末位为奇的概率。

末位全部可能出现数字为0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，它们两两互不相容，末位为奇即末位为1，3，5，7，9中任一数，由加法性质

$$\begin{aligned}P(\text{末位为奇})&=P(\text{末位为 1})+P(\text{末位为 3})\\&\quad+\cdots+P(\text{末位为 9})\\&=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 3 服从正态分布的偶然误差δ，其$|\delta|<3\sigma$的概率为0.9973（σ为标准差），若独立测两次，得δ_1及δ_2，求两次$|\delta|$皆不超过3σ的概率[1]。

两次皆不超过3σ，即$|\delta_1|$与$|\delta_2|$同时不超过3σ，由乘法性质，此概率为

$$\begin{aligned}P(|\delta_1|<3\sigma)P(|\delta_2|<3\sigma)&=0.9973\times0.9973\\&=0.9946\end{aligned}$$

二、概率与频率

在相同条件下，对同一实验的几次测量中，可能出现的事件（结果）为A，B，…。若事件A出现的次数是m，m与总实验次数n之比$\frac{m}{n}$称为在n次实验中A出现的频率。随着次数n的增加，$\frac{m}{n}$将趋于稳定，所稳定到的常数，叫做理

论频率，我们把这个理论频率作为在给定条件下事件A出现的概率。

例 4　投钱币时，出现正面的频率稳定在$\frac{1}{2}$，如蒲丰(Buffon)投过4040次，得2048次正面，其频率为2048/4040=0.5069，皮尔逊（Pearson）投过24000次，得12012次正面，其频率为12012/24000=0.5005，故可认为出现正面的概率为$\frac{1}{2}$。

例 5　测量某长度时，认为仅有正态分布的偶然误差，而一次测量中，误差可能为正，也可能为负。但在大量的重复测量中，随着测量次数的增加，正误差与负误差出现的频率都稳定到$\frac{1}{2}$，因此，出现正误差这一事件A或出现负误差这一事件B的概率均为$\frac{1}{2}$。

三、概　率　场

在实验中一定发生的事件叫必然事件，在实验中不会发生的事件叫不可能事件。

我们约定：

AB(也写作 $A\cap B$)：表事件A与事件B同时出现的事件；

$A+B$(也写作 $A\cup B$)：表事件A或事件B中至少有一个出现的事件；

$\bar{A}$：表事件A不出现的事件（A的逆事件）；

Ω：表必然事件，显然$P(\Omega)=1$；

Φ：表不可能事件，显然$P(\Phi)=0$。

按概率场定义的概率如下：

1. 由基本事件的全体组成基本空间Ω。

2. Ω中某些子集组成集类（称事件域）F，满足

（1） $\Omega\in F$；

（2） 若 $A_n\in F$，则$\bigcup A_n\in F$；

（3） 若 $A\in F$，则 $\bar{A}\in F$。

3. 定义在 F 上的一个非负集合函数$P(A)$，满足

（1） $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，当 $A\in F$ 时；

（2） $P(\Omega)=1$；

（3） 若 $A_n\in F$，$A_iA_j=\Phi(i\neq j)$，则

$$P(\bigcup A_n)=\sum P(A_n)$$

称 $P(A)$为事件 A 的概率。

第二节 概率基本运算

设 B 是具有正概率的事件，那么对于事件 A，我们把

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.4}$$

称为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率，或称为事件 A 对于事件 B 的条件概率。

如在相同条件下进行了几次实验。设所得实验结果中，事件 B 出现了 m 次，在这 m 次中，事件 A 出现了 $k\leqslant m$ 次。那么积事件 AB 的概率为$\frac{k}{n}$，事件B 的概率为$\frac{m}{n}$，在事件 B 出现下事件 A的概率为$\frac{k}{m}$，故

$$P(A|B)=\frac{k}{m}=\frac{k}{n}\Big/\frac{m}{n}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

从而成立式(1.4)。

若关系式

$$P(A|B)=P(A)$$

成立，表明"已知事件 B 发生"这一条件并不影响事件 A 出现的概率，即 A 与 B 是互相独立的，此时，由式(1.4)可得

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.5}$$

若有事件 A_1，A_2，…，A_m，则

$$P(A_1A_2\cdots A_m)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_m|A_1A_2\cdots A_{m-1}) \tag{1.6}$$

其中 $P(A_m|A_1A_2\cdots A_{m-1})$为 A_1，A_2，…，A_{m-1}同时出现条件下 A_m 出现的概率。

我们再看多个事件和的概率[2]。

对任意两事件 A_1，A_2，因

$$A_1+A_2=A_1+A_2\bar{A}_1$$

$$A_1(A_2\bar{A}_1)=\Phi$$

故

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2\bar{A}_1)$$

但

$$A_2=A_1A_2+\bar{A}_1A_2$$

$$(A_1A_2)(\bar{A}_1A_2)=\Phi$$

故

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(A_2\bar{A}_1)$$

于是

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2) \tag{1.7}$$

推广至任意 m 个事件 A_1，A_2，…，A_m，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=S_1-S_2+S_3-S_4\cdots+(-1)^{m+1}S_m \tag{1.8}$$

其中

$$S_1=\sum_i P(A_i)$$

为单个事件出现概率和；

$$S_2=\sum_{i<j} P(A_iA_j)$$

为任二个事件同时出现概率和；

$$S_3=\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)$$

为任三个事件同时出现概率和；

且有彭费雷尼（Benferroni）不等式

$$\begin{aligned}S_1-S_2+\cdots-S_{2n}&\leqslant P(A_1+A_2+\cdots+A_m)\\&\leqslant S_1-S_2+\cdots-S_{2n}+S_{2n+1}\end{aligned}\tag{1.9}$$

特别

$$S_1-S_2\leqslant P(A_1+A_2+\cdots+A_m)\leqslant S_1\tag{1.10}$$

下面讨论实验后计算概率的贝叶斯（Bayes）公式。

贝叶斯公式：设事件 B 能且只能与互不相容事件 A_1，A_2，…，A_m 之一同时发生，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}\tag{1.11}$$

因此

$$P(B)P(A_i|B)=P(A_i)P(B|A_i)$$

又

$$B=BA_1+BA_2+\cdots+BA_m$$

$$\begin{aligned}P(B)&=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_m)\\&=\sum_j P(BA_j)\\&=\sum_j P(A_j)P(B|A_j)\end{aligned}$$

故

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{j}P(A_j)P(B|A_j)}$$

例 有1号2号两台炮，它们向同一目标发射。若在1号炮射9次时间内，2号炮射10次。又1号炮平均10发中8发，2号炮平均10发中7发。在一次试射中有一发炮命中目标，但不知是那一台炮发射的，问由2号炮发射的概率是多少？

以 A_i 表 i 号炮发射事件，根据两台炮在同时间内发射的次数，可取

$$P(A_1)=0.9P(A_2)$$

又以 B 表炮命中目标事件，则

$$P(B|A_1)=0.8$$

$$P(B|A_2)=0.7$$

由贝叶斯公式，所求概率为

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}$$

$$=\frac{P(A_2)\times 0.7}{0.9P(A_2)\times 0.8+P(A_2)\times 0.7}$$

$$=0.493$$

第二章 矩　阵

第一节 矩阵概念

矩阵是由多个数排成的一个表。在误差分析中，我们经常要分析多个误差，这就需要矩阵。在近代自然科学和社会科学中，矩阵得到了广泛的应用。

$n\times m$个数a_{ij}排成的矩形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix}$$

称为矩阵，记为$A=(a_{ij})=(a_{ij})_{nm}$，nm称为A的阶，a_{ij}称为A的元素。矩阵的横排称为行，纵排称为列。需表明阶时，矩阵A写成$\underset{nm}{A}$。

$n=m$的矩阵称为方阵。此时，a_{11}，a_{12}，…，a_{nn}称为方阵的主对角元素，主对角元素的连线称为主对角线。

$m=1$的矩阵称为列向量，如列向量

$$A=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

$n=1$的矩阵称为行向量，如行向量

$$A=(x_1,\ x_2,\ \cdot,\ x_m)$$