

**WUCHA
FENBULUN**

刘智敏 著

误差分布论

原子能出版社



误差分布论

The Theory of Error Distribution

刘智敏 著

by Liu Zhimin

原子能出版社

内 容 简 介

本书论述了误差与数据处理的基础——误差分布论。全书分十六章，第一至第五章介绍矩阵与概率知识，第六第七章讨论正态分布、小子样分布及其它基本分布，第八第九章介绍多元分布及估计检验多组误差分析，第十章讨论最小二乘法中的分布，第十一第十二章介绍和讨论非中心分布、Wishart分布、Hotelling分布与经验公式中的分布，第十三至第十五章研究粗差分布、投影误差分布及威布尔分布，第十六章介绍不确定度。书中引用了最新科研成果，并尽量将理论与实际应用结合起来。

本书是在作者为中国科学院研究生院、清华大学等单位讲课的讲稿基础上写成的，可供科学工作者，特别是实验人员、计量人员使用，亦可供工程设计人员、高等院校和研究生院（部）有关专业师生参考。

误 差 分 布 论

刘智敏 著

原子能出版社出版

(北京2108信箱)

重庆印制一厂印刷

(重庆市中区枇杷山后街79号)

新华书店总店科技发行所发行·新华书店经售



开本787×1092 1/32·印张14.75·字数 326 千字

1988年 8月北京第一版·1988年 8月北京第一次印刷

印数 1—2800

统一书号：15175·835 定价：3.75元

ISBN 7-5022-0069-X/O.7

前 言

误差与数据处理对科学研究和生产实践极为重要，它是分析科学实验和测量结果的必不可少的知识，各科研机构、国民经济各部门和高等院校对这一学科都极其重视，目前对它的研究愈来愈多。为了深入掌握这一学科，必须研究它的基础——误差分布论。

本书介绍了概率基本概念后，接着介绍了数据处理必需的近代矩阵知识，然后讨论了随机变量性质和特征。在此基础上，详细讨论了误差分析中所需用的正态分布、小子样分布、两点分布、均匀分布及反正弦分布等基本分布。为了分析大量数据，讨论了多元分布、估计理论假设检验与多组测量误差分析以及最小二乘法中的分布，接着讨论和研究了非中心分布、Wishart 分布、Hotelling 分布和经验公式中的分布。最后仔细分析了近代提出的粗差分布、投影误差分布、威布尔分布及其应用。这些都是误差与数据处理使用和研究中所必须了解的分布。最后以国际讨论结果为基础介绍了不确定度的知识。

本书引用了最新科研成果，全书既有理论，也有它们的应用，它不但是学习误差与数据处理所必须知道的内容，也是深入研究误差与数据处理所必须了解的基础理论。

本书是在多次讲课的讲稿基础上修改而成的，不妥之处，切盼指正。

刘智敏

于中国计量科学研究院

目 录

第一章 概 率 概 念	1
第一节 概率定义	1
第二节 概率基本运算	4
第二章 矩 阵	8
第一节 矩阵概念	8
第二节 方阵的行列式	11
第三节 矩阵运算	14
第四节 矩阵分块	25
第五节 矩阵解析	30
第六节 矩阵的秩和迹	36
第七节 方阵的特征根	41
第八节 对称阵幂等阵和正交阵	44
第九节 双线性型与二次型	52
第十节 广义逆矩阵	61
第十一节 奇异单位阵	77
第三章 随机变量与分布函数	80
第一节 随机变量	80
第二节 随机向量	83
第三节 随机变量函数	86
第四节 随机向量函数	89
第四章 数字特征与特征函数	97
第一节 随机变量的数字特征	97
第二节 随机向量的数字特征	99
第三节 期望方差相关系数性质	102
第四节 特征函数	105
第五节 半不变量	107

第六节	分布函数与特征函数	109
第五章	概率论一些定理	111
第一节	小概率原理	111
第二节	大数定律与契贝雪夫不等式	111
第三节	中心极限定理	112
第六章	正态分布及有关分布	118
第一节	正态分布	118
第二节	正态分布的计算	120
第三节	分布的正态展开	123
第四节	χ^2 分布	125
第五节	t 分布	128
第六节	t 分布计算	131
第七节	F 分布	138
第七章	其它基本分布	141
第一节	一点分布与两点分布	141
第二节	二项分布	142
第三节	泊松分布	146
第四节	均匀分布	149
第五节	三角分布和梯形分布	153
第六节	反正弦分布	156
第七节	切尾正态绝对正态与对数正态分布	159
第八节	欧拉分布与马克斯威尔分布	162
第九节	均匀分布合成	166
第八章	多元分布基础	193
第一节	随机向量基本性质	193
第二节	连续随机向量变换	198
第三节	正态随机向量	205
第四节	样本与统计量	209
第五节	直接测量中的分布	210

第六节	两组测量的分布	219
第七节	多维正态随机向量有关分布	221
第八节	非正态分布时 t 分布的计算	224
第九章	估计检验与多组测量误差分析	233
第一节	估计概念	233
第二节	标准差的估计	235
第三节	假设检验概念	243
第四节	分布检验	244
第五节	多组测量误差分析等精度检验	252
第十章	最小二乘法中的分布	263
第一节	最小二乘法基础	263
第二节	正规方程及最小二乘解性质	268
第三节	最小二乘法误差分布	270
第四节	不等精度及相关最小二乘法	274
第五节	条件测量平差	279
第六节	带条件的最小二乘法分布	283
第七节	带条件的最小二乘法分布应用	288
第十一章	非中心分布、Wishart及Hotelling分布	291
第一节	非中心 χ^2 分布	291
第二节	非中心 t 分布	296
第三节	非中心 F 分布	299
第四节	非中心分布应用	300
第五节	Wishart分布	301
第六节	Hotelling分布	308
第七节	相关系数分布	312
第八节	T^2 应用	314
第十二章	经验公式中的分布	321
第一节	引言	321
第二节	拟合分布理论	321

第三节	拟合方法和步骤	326
第四节	拟合实例	328
第十三章	粗差分布	331
第一节	顺序量分布	331
第二节	残差性质	332
第三节	格拉布斯(Grubbs)标准	338
第四节	狄克逊(Dixon)标准	356
第五节	双侧检验	359
第六节	肖维勒(Chauvenet)标准	364
第七节	其它粗差剔除标准的讨论	365
第十四章	投影误差分布	368
第一节	投影误差性质	368
第二节	任意分布分位数的正态表示	373
第三节	投影误差分布的合成	383
第四节	投影误差分布的应用	386
第十五章	产品寿命与威布尔分布	389
第一节	引言	389
第二节	威布尔分布基本性质	389
第三节	参数估计	391
第四节	寿命计算	396
第十六章	测量结果的不确定度	398
第一节	引言	398
第二节	统计不确定度	399
第三节	非统计不确定度	401
第四节	合成不确定度	402
第五节	总不确定度和国际上关于不确定度的建议	403
附表 1	正态分布函数表	410
附表 2	χ^2 分布表	413
附表 3	t 分布表	414

附表 4	F 分布表	416
附表 5	标准化同均匀分布和表.....	418
附表 6	独立同均匀分布和之置信因子表	422
附表 7	不同均匀分布和表	422
附表 8	$\Gamma(x)$ 函数表	461
参考文献		462

第一章 概 率 概 念

第一节 概率定义

一、概率的古典定义

若实验时，有且只有几个可能发生的情况，并且每个情况都是等可能的，其中恰有 m 个情况具有性质 E ，则 E 出现的概率

$$P(E) = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

例 1 箱中有 20 个球，其中 12 个为白球，8 个为黑球，称摸出白球的事件为 E ，求摸出白球概率 $P(E)$ 。

因球总数为 20，表明可能结果有 20 个，导致白球出现的结果有 12 个，故

$$P(E) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

加法性质 若 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 是 m 个两两互不相容（即任两个不能同时出现）的事件，则至少一个 A_i 出现的概率

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_m) \\ = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m) \end{aligned} \quad (1.2)$$

乘法性质 若 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 是 m 个互相独立的事件（一事件的出现与否不影响其它事件的出现），则各 A_i 同时出现的概率

$$P(A_1 A_2 \cdots A_m) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_m) \quad (1.3)$$

例 2 数字舍入时，以末位 1 为单位，当尾数小于 0.5 时舍去，大于 0.5 时进 1，等于 0.5 时视末位为奇则进 1，为偶则舍去，求末位为奇的概率。

末位全部可能出现数字为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9，它们两两互不相容，末位为奇即末位为 1, 3, 5, 7, 9 中任一数，由加法性质

$$\begin{aligned} P(\text{末位为奇}) &= P(\text{末位为 1}) + P(\text{末位为 3}) \\ &\quad + \cdots + P(\text{末位为 9}) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 3 服从正态分布的偶然误差 δ ，其 $|\delta| < 3\sigma$ 的概率为 0.9973 (σ 为标准差)，若独立测两次，得 δ_1 及 δ_2 ，求两次 $|\delta|$ 皆不超过 3σ 的概率⁽¹⁾。

两次皆不超过 3σ ，即 $|\delta_1|$ 与 $|\delta_2|$ 同时不超过 3σ ，由乘法性质，此概率为

$$\begin{aligned} P(|\delta_1| < 3\sigma)P(|\delta_2| < 3\sigma) &= 0.9973 \times 0.9973 \\ &= 0.9946 \end{aligned}$$

二、概率与频率

在相同条件下，对同一实验的几次测量中，可能出现的事件（结果）为 $A, B, \cdots$ 。若事件 A 出现的次数是 m ， m 与总实验次数 n 之比 $\frac{m}{n}$ 称为在 n 次实验中 A 出现的频率。随

着次数 n 的增加， $\frac{m}{n}$ 将趋于稳定，所稳定到的常数，叫做理

论频率，我们把这个理论频率作为在给定条件下事件 A 出现的概率。

例 4 投钱币时，出现正面的频率稳定在 $\frac{1}{2}$ ，如蒲丰 (Buffon) 投过 4040 次，得 2048 次正面，其频率为 $2048/4040 = 0.5069$ ，皮尔逊 (Pearson) 投过 24000 次，得 12012 次正面，其频率为 $12012/24000 = 0.5005$ ，故可认为出现正面的概率为 $\frac{1}{2}$ 。

例 5 测量某长度时，认为仅有正态分布的偶然误差，而一次测量中，误差可能为正，也可能为负。但在大量的重复测量中，随着测量次数的增加，正误差与负误差出现的频率都稳定到 $\frac{1}{2}$ ，因此，出现正误差这一事件 A 或出现负误差这一事件 B 的概率均为 $\frac{1}{2}$ 。

三、概 率 场

在实验中一定发生的事件叫必然事件，在实验中不会发生的事件叫不可能事件。

我们约定：

AB (也写作 $A \cap B$)：表事件 A 与事件 B 同时出现的事件；

$A+B$ (也写作 $A \cup B$)：表事件 A 或事件 B 中至少有一个出现的事件；

$\bar{A}$ ：表事件 A 不出现的事件 (A 的逆事件)；

Ω ：表必然事件，显然 $P(\Omega) = 1$ ；

Φ ：表不可能事件，显然 $P(\Phi) = 0$ 。

按概率场定义的概率如下：

1. 由基本事件的全体组成基本空间 Ω .
2. Ω 中某些子集组成集类 (称事件域) F , 满足
 - (1) $\Omega \in F$;
 - (2) 若 $A_n \in F$, 则 $\bigcup A_n \in F$;
 - (3) 若 $A \in F$, 则 $\bar{A} \in F$.
3. 定义在 F 上的一个非负集合函数 $P(A)$, 满足
 - (1) $0 \leq P(A) \leq 1$, 当 $A \in F$ 时;
 - (2) $P(\Omega) = 1$;
 - (3) 若 $A_n \in F$, $A_i A_j = \Phi (i \neq j)$, 则

$$P(\bigcup A_n) = \sum P(A_n)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

第二节 概率基本运算

设 B 是具有正概率的事件, 那么对于事件 A , 我们把

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1.4)$$

称为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率, 或称为事件 A 对于事件 B 的条件概率。

如在相同条件下进行了几次实验。设所得实验结果中, 事件 B 出现了 m 次, 在这 m 次中, 事件 A 出现了 $k \leq m$ 次。那么积事件 AB 的概率为 $\frac{k}{n}$, 事件 B 的概率为 $\frac{m}{n}$, 在事件 B

出现下事件 A 的概率为 $\frac{k}{m}$, 故

$$P(A|B) = \frac{k}{m} = \frac{k}{n} \bigg/ \frac{m}{n} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

从而成立式(1.4)。

若关系式

$$P(A|B)=P(A)$$

成立, 表明“已知事件 B 发生”这一条件并不影响事件 A 出现的概率, 即 A 与 B 是互相独立的, 此时, 由式(1.4)可得

$$P(AB)=P(A)P(B) \quad (1.5)$$

若有事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$, 则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_m|A_1 A_2 \cdots A_{m-1}) \quad (1.6)$$

其中 $P(A_m|A_1 A_2 \cdots A_{m-1})$ 为 $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ 同时出现条件下 A_m 出现的概率。

我们再看多个事件和的概率^[2]。

对任意两事件 A_1, A_2 , 因

$$A_1 + A_2 = A_1 + A_2 \bar{A}_1$$

$$A_1(A_2 \bar{A}_1) = \Phi$$

故

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2 \bar{A}_1)$$

但

$$A_2 = A_1 A_2 + \bar{A}_1 A_2$$

$$(A_1 A_2)(\bar{A}_1 A_2) = \Phi$$

故

$$P(A_2) = P(A_1 A_2) + P(\bar{A}_1 A_2)$$

于是

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \quad (1.7)$$

推广至任意 m 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$, 有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \cdots + (-1)^{m+1} S_m \quad (1.8)$$

其中

$$S_1 = \sum_i P(A_i)$$

为单个事件出现概率和,

$$S_2 = \sum_{i < j} P(A_i A_j)$$

为任二个事件同时出现概率和,

$$S_3 = \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k)$$

为任三个事件同时出现概率和,

且有彭费雷尼 (Benferroni) 不等式

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 + \cdots - S_{2n} &\leq P(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) \\ &\leq S_1 - S_2 + \cdots - S_{2n} + S_{2n+1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

特别

$$S_1 - S_2 \leq P(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) \leq S_1 \quad (1.10)$$

下面讨论实验后计算概率的贝叶斯 (Bayes) 公式.

贝叶斯公式: 设事件 B 能且只能与互不相容事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 之一同时发生, 则

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)} \quad (1.11)$$

因此

$$P(B)P(A_i|B) = P(A_i)P(B|A_i)$$

又

$$B = BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_m$$

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_m)$$

$$= \sum_j P(BA_j)$$

$$= \sum_j P(A_j)P(B|A_j)$$

故

$$\begin{aligned}P(A_i|B) &= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} \\&= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}\end{aligned}$$

例 有 1 号 2 号两台炮，它们向同一目标发射。若在 1 号炮射 9 次时间内，2 号炮射 10 次，又 1 号炮平均 10 发中 8 发，2 号炮平均 10 发中 7 发。在一次试射中有一发炮命中目标，但不知是那一台炮发射的，问由 2 号炮发射的概率是多少？

以 A_i 表 i 号炮发射事件，根据两台炮在同时间内发射的次数，可取

$$P(A_1) = 0.9P(A_2)$$

又以 B 表炮命中目标事件，则

$$P(B|A_1) = 0.8$$

$$P(B|A_2) = 0.7$$

由贝叶斯公式，所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_2|B) &= \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} \\&= \frac{P(A_2) \times 0.7}{0.9P(A_2) \times 0.8 + P(A_2) \times 0.7} \\&= 0.493\end{aligned}$$

第二章 矩 阵

第一节 矩 阵 概 念

矩阵是由多个数排成的一个表。在误差分析中，我们经常要分析多个误差，这就需要矩阵。在近代自然科学和社会科学中，矩阵得到了广泛的应用。

$n \times m$ 个数 a_{ij} 排成的矩形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

称为矩阵，记为 $A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{nm}$ ， nm 称为 A 的阶， a_{ij} 称为 A 的元素。矩阵的横排称为行，纵排称为列。需表明阶时，矩阵 A 写成 A_{nm} 。

$n=m$ 的矩阵称为方阵。此时， $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ 称为方阵的主对角元素，主对角元素的连线称为主对角线。

$m=1$ 的矩阵称为列向量，如列向量

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$n=1$ 的矩阵称为行向量，如行向量

$$A = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$$