高等学校教学参考书

代数拓扑基础讲义

陈吉象 编

高等教育出版社

本书是参照1980年5月在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会扩大会议上讨论并审订的《代数拓扑学教学大纲》编写的，并在教学中经几次试用修改而成.

全书内容包括：必要的点集拓扑知识，映射的同伦和基本群，单纯复形及其单纯同调群，拓扑空间的奇异同调群，同调群的一些应用. 最后有一个关于集合、群和交换群、线性欧氏空间的附录. 内容基本上是自包含的.

本书可供综合大学和高等师范数学系作为教学用书，也可供需要代数拓扑学知识的科技人员、教师参考.

高等学校教学参考书

代数拓扑基础讲义

陈吉象 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.25 字数247 000

1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷

印数 00 001—7 130

书号 13010·01350 定价 2.10元

编者的话

南开大学数学系自1981年恢复开设拓扑学课程以来，参照1980年5月由北京大学、南开大学、吉林大学共同草拟，经理科数学、力学教材编审委员会审订的《拓扑学教学大纲》，编写了这份讲义.

我们的教学对象是数学专业三、四年级学生，他们对点集拓扑已有所接触，也考虑到课时有限，重点放在代数拓扑方面，包括同伦与同调的基本知识，而把点集拓扑最最基本和必需的内容，仅安排为第一章. 基本群与同调群相比，更具有直观意义，而且与点集拓扑的关系又更密切，因此安排在第二章. 第三章介绍单纯同调群的基本概念及实例，让学生先对同调论有一个感性的认识. 至于它的拓扑不变性是较难处理的，我们没有介绍单纯逼近的方法，而是通过第四章引进奇异同调，最后在第五章完成证明. 理由在于如此安排，既能完成拓扑不变性证明，似乎又能让学生较早地接触一点近代处理方法. 当然，单纯逼近还是十分重要的内容，只是因为课时所限忍痛割爱了. 由于奇异同调论比较抽象，初学者难于接受，为了讲得尽可能具体一些，不免造成内容上比较松散，不紧凑，这也是编者能力所限，今后有待进一步完善.

我们考虑到学生需要看参考书的同时，也需要有习题进行练习. 因此在每节后附有一定数量的习题. 此外，书后有一个附录，包括点集、群与线性欧氏空间，便于查阅参考. 这些习题与附录(甚至正文内容)并不要求全部采用，可视学生实际能力与课时条件适当增删. 一个较有经验的教师在程度比较整齐的班级上，估计一学期(以64学时计)的讲授，一般可以概括本讲义的全部内容.

在一般情况下，用 48—64 学时，可将前三章和第五章的全部及第四章主要结果(不证明)讲完.

讲义中每个定理、命题、例子和公式前面采用三个数字统一编号. 例如“2.3.4.定理”意指第二章第三节第四个定理. 在命题的(证明)结尾用“□”表示. 每节内容又分若干段. 一些太简单的推理常常省略，注上“复习题”，让学生复习时思考.

本讲义是从 1982 年开始在周学光教授指导和帮助下编写的，周学光教授在 1983 年还亲自用来讲授一遍. 同调论部分的体系是参照林金坤同志 1981 年所编“同调论”一章讲义而形成的. 在这期间还受到江泽涵和姜伯驹二位教授的支持.

编者在 82，84，85 年试用的基础上，遵照审稿同志的意见，重新修改成如今的《代数拓扑基础讲义》. 审稿同志极为细致地进行了审阅，提出了许多宝贵而中肯的意见. 讲义中关于“范畴与函子”概念就是此后补充的.

对以上各位及其他关心支持这本讲义的老师们，编者于此一并致以衷心的感谢.

由于编者水平所限，讲义中的错误与不妥必定在所难免，希望使用本讲义的老师和同学给以指正，不胜感激.

编　者

1985年秋于南开大学

常用符号

$\varnothing$	空集	272
$\in(\notin)$	属于(不属于)	271
$=(\neq)$	等于(不等于)	271
$\subset(\supset)$	包含于(包含)	271
$\Rightarrow$	蕴含	273
$\Leftrightarrow$	等价,当且仅当	278
$\cup\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\right)$	并(集族的并)	272,276
$\cap\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}\right)$	交(集族的交)	272,276
$-$	差,减去	272
$\times$	直积	272,273
$\sim$	等价于,同调于	273
$X/\sim$	集合(空间)X关于等价关系$\sim$的商集(粘合空间)	273
$\{x\mid P(x)\}$	具有性质$P(x)$的对象x组成的集合	271
$\{a_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$	以Γ为下标集的族.	276
$f:X\to Y\ (X\xrightarrow{f}Y)$	X到Y的函数,映射,同态f	274
$f\vert_A$	函数f在A上的限制	275
$g\circ f$	函数f与g的合成	274
1_X	X上的恒同函数	274
$A\hookrightarrow X$	A内射于X	274
f^{-1}	函数、映射、同态f的逆	275
$\mathrm{im}f$	同态f的象	285

$\deg\alpha$	α 的度数(映射度)	101,263
S_+^{n-1}	北半球面	83,269
$P(A)$	A 张成的超平面	120
$[a_0,a_1,\cdots,a_q]$	以 $a_0,a_1,\cdots,a_q$ 为顶点的 q 维单纯形	122
$[s]$	单纯形	122
$\langle s\rangle$	$[s]$的开单形	123
$\dot{s}$	$[s]$的边缘	123
$[s]\leqslant[t]([s]<[t])$	$[s]$是$[t]$的(真)面	123
Δ^q	标准 q 维单形	123
$\lvert K\rvert$	复形K的多面体	129
$\mathrm{Cl}[s^q]$	$[s^q]$ 的闭包复形	132
$\mathrm{Bd}[s^q]$	$[s^q]$ 的边缘复形	132
$St_K[s]$	闭星形	252
$st_K[s]$	开星形	252
$a_0a_1\cdots a_q$	有向单形	142
$(a_0a_1\cdots a_q)$	有序单形	166
$l(a_0a_1\cdots a_q)$	线性奇异单形	166
$\mathrm{ind}x_0$	x_0 的指数	153,178
$\Sigma_q(X)$	q 维奇异单形的集合	166
K^ω	有序复形	188
$\Delta(X)$	奇异链复形	186
$\widetilde{\Delta}(X)$	增广奇异链复形	186
$\Delta(X,A)$	偶(X,A)的相对奇异链复形	203
$C^\omega(K)$	有序复形 K^ω 的定向链复形	188
$C(K)$	定向链复形	187
$C_q(K)$	复形K的 q 维链群	143
$Z_q(K)$	复形K的 q 维闭链群	145

$B_q(K)$	复形K的q维边缘链群	145
$H_q(K)$	复形K的q维同调群	146
f_Δ	映射f诱导的奇异链映射	170
f_*	映射f诱导的奇异同调群同态	171
$H_q(X,A)$	空间偶的q维相对奇异同调群	203
$\sigma^{(i)}$	奇异单形σ的第i个面	168
l_q	标准奇异q维单形	171
sd	重分奇异链映射	236
H. S. (X,A)	空间偶(X,A)的奇异同调序列	214
$\chi(K)$	复形K的示性数	254

目　录

绪　论

拓扑学是在欧氏几何、解析几何、射影几何与微分几何学之后发展起来的高度抽象的一门几何学，是近代基础数学的主要支柱之一，它研究具有拓扑结构的集合及其在拓扑变换下不变的性质，即所谓拓扑空间及其拓扑性质．用不同的方法，从不同的角度研究拓扑空间，就形成了不同的拓扑学分支．本讲义不同于一般（点集）拓扑学教程，我们是在点集拓扑基础上着重介绍如何应用代数工具获得空间的几何性质．代数拓扑的奠基人是法国数学家Poincaré(1854—1912)，他基于对天体力学与微分方程的深入研究，提出了代数拓扑的光辉思想．二十世纪以来，代数与拓扑这两大抽象数学分支的互相渗透，促使 Poincaré 的思想得到了异乎寻常的发展．目前，代数拓扑学已经成为十分重要的近代数学分支，它的发展深刻地影响着其他分支，诸如微分几何、复变函数、代数几何、抽象代数、代数数论、微分方程、对策论，甚至在理论物理与原子核构造的研究中，代数拓扑也得到了广泛的应用．

除了用一定的篇幅扼要地介绍必需的点集拓扑知识外，本讲义向读者展现了包括同调与同伦在内的代数拓扑基本思想．主要方法是给拓扑空间联系上适当的代数结构．同胚的空间必须有相同的代数结构．从而由空间的不同代数结构可以推断空间的不同胚．于是，代数工具得到了深刻的应用．

我们先看几个典型的问题，正是这一类问题促使形成并推动了代数拓扑学的发展．

0.1. 例　平面上两个同心圆周H与K（图 0.1）围成的图形

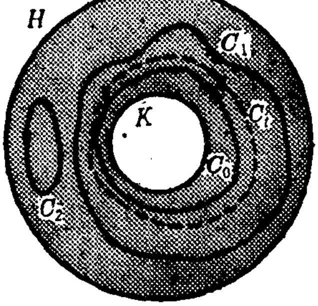

图 0.1

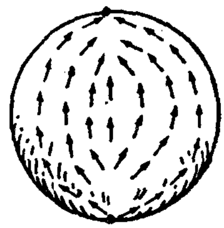

图 0.2

叫做平环,设在平环内有三条封闭曲线 C_0, C_1 与 C_2. 考虑如下的三个曲线积分

$$A_i=\int_{C_i} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy,\quad i=0,1,2,$$

其中二元函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 连续,而且具有连续的偏导数,满足方程

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

积分路线均沿逆时针方向,如图中箭头所示. Green 定理告诉我们: $A_2=0$, $A_0=A_1$. 因此,就曲线积分而言(在平环内),闭曲线 C_2 可以忽略,而曲线 C_0 与 C_1 则起着同等的作用.

那么如何刻划 C_2 可以忽略以及 C_0 与 C_1 的同等地位呢?

0.2. 例 用常微分方程理论研究一阶高次方程

$$f\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right)=0$$

时,涉及到一般曲面(例如球面和环面)上的向量场,发现球面 S^2 上连续向量场一定有奇点,即零向量的点. 换句话说, S^2 上不可能有处处非零的连续向量场(图 0.2). 我们形象地称之为发球性质:球面上每一点设想长出一根头发,如果想把所有头发都平滑地梳

扰到球面上，这是注定要失败的. 二维球面 S^2 上的这种性质到高维情形如何讨论，其结果又将如何呢？

0.3. 例 在平面几何中全等的图形不加区别. 数学的许多领域往往研究其对象的分类问题，拓扑学的兴趣是图形的拓扑分类. 比如球面 S^2 与环面 T 从拓扑学观点看有没有区别 (图 0.3)？它们是否拓扑等价(同胚)？差别似乎是明显的，S^2 只有一个洞，而 T 却有两个洞. 那么如何精确地刻划这些图形之间的差别呢？

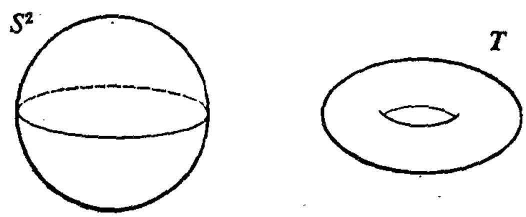

图 0.3

第一章　拓 扑 空 间

本章内容包括拓扑空间、连续映射、紧致性、连通性、乘积空间与粘合空间等基本概念. 学习这些概念，既要随时用欧氏平面中相应概念作为具体模型，又要注意它们的差别，必须能够站在抽象的高度来深刻理解它们.

§1　拓 扑 空 间

(1.1) 度量空间

无论数学分析、实变函数论还是复变函数论，其极限概念的讨论均以距离(我们用 $\rho(x, y)$表示点 x 到点 y 的距离)为基础. 当说到点列$\{x_n\}_{n\in N}$以 a 为极限时，都意味着 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, a)=0$. 这里所涉及的距离本质上由下列四条基本性质所确定:

(M 1)　$\rho(x,y)\geqslant 0$,

(M 2)　$\rho(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$,

(M 3)　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$,

(M 4)　$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

我们把这四条性质称为**度量公理**，其中(M4)叫做**三角不等式**.

由此可见，如果在一个抽象集合中引进了满足上述度量公理的距离，我们就可以象数学分析一样来讨论极限等概念.

定义　设X为一非空集合，$\rho: X\times X\to \boldsymbol{R}$ 为一函数，使得对X的任意点 x, y, z，总满足度量公理(M 1)—(M 4)，则 ρ 称为X上的一个**度量**，偶(X, ρ)称为以ρ为度量的**度量空间**. 若 $x, y\in X$,

则实数 $\rho(x,y)$ 称为从点 x 到点 y 的**距离**.

1.1.1. 例 实数空间 $\boldsymbol{E}^1=(\boldsymbol{R},\rho)$，其中 $\rho:\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 定义为

$$\rho(x,y)=|x-y|,\quad x,y\in\boldsymbol{R}.$$

这个 ρ 称为实数空间(实直线)的通常度量. □

1.1.2. 例 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^n=(\boldsymbol{R}^n,\rho)$，其中度量 ρ 定义为(见附录 §4)

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n.$$

这个 ρ 称为$\boldsymbol{E}^n$ 的通常度量. 当 $n=2$ 时，$\boldsymbol{E}^2$ 称为欧氏平面. □

1.1.3. 例 Hilbert 空间 $\boldsymbol{E}^\omega=(\boldsymbol{R}^\omega,\rho)$，其中

$$\boldsymbol{R}^\omega=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\mid x_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,\text{且}\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<+\infty\},$$

$\rho:\boldsymbol{R}^\omega\times\boldsymbol{R}^\omega\to\boldsymbol{R}$ 定义为

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots)\in\boldsymbol{R}^\omega.$$

显然 ρ 满足$(M1)$—$(M3)$，我们证明 ρ 也满足$(M4)$. 根据 $\boldsymbol{E}^n$ 中度量的三角不等式，有

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

令 $n\to\infty$，易得不等式

1.1.4. $$\left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

这说明 ρ 的定义有意义，且$(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots)\in\boldsymbol{R}^\omega$. 现设

$$x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots),z=(z_1,z_2,\cdots)\in\boldsymbol{R}^\omega,$$

则

$$(x_1-y_1, x_2-y_2, \cdots), (y_1-z_1, y_2-z_2, \cdots) \in \boldsymbol{R}^{\infty},$$

再由不等式 1.1.4,即得

$$\begin{aligned}\rho(x,z) &= \left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{\infty}((x_i-y_i)-(z_i-y_i))^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \rho(x,y)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

上述 ρ 称为 Hilbert 空间 $\boldsymbol{E}^{\omega}$ 的通常度量. □

(1.2) 度量空间的开集

从上述各例已经看到,度量空间是通常欧氏空间的自然推广,它们是最重要的一类拓扑空间. 为了进一步从度量空间抽象出一般拓扑空间的概念,我们要把数学分析中讨论的邻域概念引进度量空间,以便从中发现它们的本质特征. 在数学分析中,我们把开区间 $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ 称为点 a 的 ε- 邻域,它在实数轴上表示了与点 a 的距离小于 ε 的全体点. 因此我们作如下定义.

定义 设 (X,ρ) 为度量空间, $x\in X$, ε 为一正数,则称 X 的子集

$$B(x,\varepsilon)=\{y\in X \mid \rho(y,x)<\varepsilon\}$$

为**以 x 为中心、ε 为半径的球形邻域**,简称 x 的**球形邻域**或 x 的 **ε-邻域**. 显然,对任意正数 ε,中心 $x\in B(x,\varepsilon)$.

下述命题描绘了球形邻域的基本性质.

1.1.5. 命题 设 $\mathscr{B}$ 为度量空间 (X, ρ) 的所有球形邻域组成的族,则